УДК 519.21

**А. А. Дороговцев** (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

# НЕКОТОРЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ИТЕРАЦИЙ СО СЛУЧАЙНЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

For a sequence of random iterations, we study the set of partial limits and the frequency of visiting their neighborhoods.

Для послідовності випадкових ітерацій вивчаються множина часткових границь та інтенсивність відвідування їх околів.

**1. Введение.** Объектом исследования настоящей статьи являются случайные последовательности, удовлетворяющие уравнению

$$x_{n+1} = Ax_n + \xi_{n+1}, \quad n \geq 0, \qquad x_0 = u. \tag{1}$$

Здесь $A$ — линейный оператор в $\mathbb{R}^d$, $u$ — некоторый фиксированный элемент в $\mathbb{R}^d$, $\{\xi_n; n \geq 0\}$ — заданная последовательность случайных возмущений. Для последовательности $\{x_n; n \geq 0\}$ рассматривается вопрос о существовании детерминированной последовательности $\{c_n; n \geq 0\}$ такой, что $\{x_n / c_n; n \geq 0\}$ имеет ограниченное и отличное от точки $O$ множество частичных пределов, а также исследуется частота посещения окрестностей частичных пределов для $\{x_n / c_n; n \geq 0\}$. Отметим, что поведение последовательности (1) исследовалось многими авторами. Так, в работах [1, 2] рассматривался вопрос о существовании стационарных решений (1). В [3, 4] уравнение (1) трактовалось как последовательность итераций, возмущенная шумом $\{\xi_n; n \geq 0\}$. Для соответствующих ошибок получены закон больших чисел, центральная предельная теорема и аналог закона повторного логарифма. В [5, 6] для решений (1) и более общих последовательностей изучались множество частичных пределов и частота посещения окрестностей его точек. Однако, в случае, когда последовательность $\{x_n; n \geq 0\}$ не является ограниченной с вероятностью 1, утверждения из [5, 6] не дают полной информации о ее поведении.

Данная работа состоит из двух частей. В первой части вводятся характеристики детерминированной последовательности, а во второй исследуется собственно $\{x_n; n \geq 0\}$.

**2. Возрастающие последовательности мер.** Пусть $\mathbb{R}^d$ — как обычно, $d$-мерное евклидово пространство, $\mathcal{B}$ — $\sigma$-алгебра его борелевых подмножеств.

**Определение 1.** *Последовательность конечных мер на* $\{\lambda_n; n \geq 1\}$ *называется возрастающей, если*

$$\forall A \in \mathcal{B}: \forall n \geq 1: \lambda_{n+1}(A) \geq \lambda_n(A), \ \lim_{n \to \infty} \lambda_n(\mathbb{R}^d) = +\infty.$$

Для возрастающей последовательности мер $\{\lambda_n; n \geq 1\}$ рассмотрим множество

$$\mathfrak{M}_\lambda := \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \forall \varepsilon > 0: \lim_{n \to \infty} \lambda_n(B(x, \varepsilon)) = +\infty \right\}.$$

Здесь $B(x, \varepsilon)$ — открытый шар радиуса $\varepsilon$ с центром в $x$. Отметим, что множество $\mathfrak{M}_\lambda$ может оказаться пустым. Если же $\mathfrak{M}_\lambda \neq \varnothing$, то $\mathfrak{M}_\lambda$ — замкнутое множество.

**Определение 2.** $\mathfrak{M}_\lambda$ *называется предельным множеством последовательности* $\{\lambda_n; n \geq 1\}$.

Рассмотрим примеры возрастающих последовательностей мер и их предельных множеств.

***Пример* 1.** Пусть $\{u_n; n \geq 1\}$ — последовательность элементов $\mathbb{R}^d$. Определим

$$\forall\, n \geq 1: \lambda_n = \sum_{k=1}^{n} \delta_{u_k}.$$

Тогда $\{\lambda_n; n \geq 1\}$ — возрастающая последовательность мер. Предельное множество $\mathfrak{M}_\lambda$ сейчас совпадает с множеством частичных пределов последовательности $\{u_n; n \geq 1\}$, которое в дальнейшем обозначается $\mathcal{M}_u$.

***Пример* 2.** Пусть $\{h_n; n \geq 1\}$ — последовательность борелевых неотрицательных функций на $\mathbb{R}^d$ таких, что

$$\forall\, n \geq 1: \int_{\mathbb{R}^d} h_n(x)\,dx = 1.$$

Определим

$$\forall\, n \geq 1 \;\; \forall\, A \in \mathcal{B}: \lambda_n(A) = \int_A \sum_{k=1}^{n} h_k(x)\,dx.$$

Тогда $\{\lambda_n; n \geq 1\}$ — возрастающая последовательность мер. Для описания множества $\mathfrak{M}_\lambda$ рассмотрим функцию, возможно принимающую бесконечные значения:

$$h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k(x), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Тогда из теоремы о монотонной сходимости следует, что предельное множество

$$\mathfrak{M}_\lambda = \left\{ x: \forall\, \varepsilon > 0: \int_{B(x,\,\varepsilon)} h(x)\,dx = +\infty \right\}.$$

В некоторых случаях последовательность из примера 2 проще, чем последовательность из примера 1. Поэтому цель данной работы и состоит в том, чтобы для случайной последовательности $\{x_n; n \geq 1\}$ после соответствующей нормировки построить детерминированную возрастающую последовательность мер, характеризующую ее поведение. Для этого нам понадобится следующее определение.

**Определение 3.** *Две возрастающие последовательности мер* $\{\lambda_n; n \geq 1\}$ *и* $\{\mu_n; n \geq 1\}$ *называются равносходящимися, если*

1) $\mathfrak{M}_\lambda = \mathfrak{M}_\mu = \mathfrak{M} \neq \varnothing$;

2) *для любых открытых множеств* $U_1$, $U_2$ *таких, что* $\overline{U_1} \subset U_2$, $\mathfrak{M} \cap \cap\, U_1 \neq \varnothing$, $\overline{U_1}$ — *компакт, справедливы соотношения*

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{\lambda_n(U_2)}{\mu_n(U_1)} \geq 1, \quad \varliminf_{n\to\infty} \frac{\mu_n(U_2)}{\lambda_n(U_1)} \geq 1.$$

*Обозначение* $\lambda_n \sim \mu_n$, $n \to \infty$.

Из определения следует, что знак „$\sim$" является отношением эквивалентности на множестве возрастающих последовательностей мер. Рассмотрим примеры.

***Пример* 3.** Пусть $d = 1$, возрастающая последовательность мер $\{\lambda_n; n \geq 1\}$ построена, как и в примере 1, по последовательности $\{x_n; n \geq 1\}$, лежащей в отрезке $[0; 1]$ и являющейся равномерно распределенной на этом отрезке [7]. Обозначим при $n \geq 1$ $\mu_n = n\mu$, где $\mu$ — мера Лебега на $[0; 1]$. Тогда $\lambda_n \sim \mu_n$, $n \to \infty$. Действительно,

$$\mathfrak{M}_\lambda = \mathfrak{M}_\mu = [0; 1].$$

Рассмотрим открытые множества $U_1$, $U_2$, удовлетворяющие условию 2 определения 3. Поскольку $\overline{U_1}$ компактно, то существует открытое множество $G$ такое, что

$$\overline{U_1} \subset G \subset U_2, \quad \mu(\partial G) = 0.$$

Из-за равномерной распределенности последовательности $\{x_n; n \geq 1\}$ меры $\lambda_n / n$ слабо сходятся к $\mu$ при $n \to \infty$ на $\mathbb{R}$. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n(G)}{\mu_n(G)} = 1.$$

Отсюда следует выполнение требований определения 3 для множеств $U_1$ и $U_2$.

В приведенном примере вид мер $\{\mu_n; n \geq 1\}$ свидетельствует о том, что окрестности различных точек из множества частичных пределов $\{x_n; n \geq 1\}$ посещаются одинаково часто (пропорционально их мере Лебега). Определение 3 позволяет учесть и более сложную ситуацию.

***Пример* 4.** Пусть $\{x_n; n \geq 1\}$ — последовательность из предыдущего примера. Построим новую последовательность $\{y_n; n \geq 1\}$ так:

$$y_n = x_n, \text{ если } n \notin \{2^l; l \in \mathcal{N}\},$$

$$y_n = 2 - \frac{1}{n}, \text{ если } n \in \{2^l; l \in \mathcal{N}\}.$$

Построенная по $\{y_n; n \geq 1\}$ возрастающая последовательность мер

$$\lambda'_n = \sum_{k=1}^{n} \delta_{y_n}$$

уже не будет равносходящейся с последовательностью $\{\mu_n; n \geq 1\}$, построенной в предыдущем примере. Последовательность $\{\mu_n; n \geq 1\}$ можно подправить, определив

$$\mu'_n = \log_2 n \delta_2 + (n - \log_2 n)\mu, \quad n \geq 1.$$

Тогда $\lambda'_n \sim \mu'_n$, $n \geq 1$.

Приведенные примеры показывают, что в некоторых случаях частоту посещения последовательностью окрестностей ее частичных пределов можно охарактеризовать с помощью достаточно простой последовательности мер.

**Определение 4.** *Любая возрастающая последовательность мер* $\{\mu_n; n \geq 1\}$, *эквивалентная последовательности мер*

$$\lambda_n = \sum_{k=1}^{n} \delta_{x_k}, \quad n \geq 1,$$

*называется последовательностью мер посещения последовательности* $\{x_n; n \geq 1\}$ *элементов* $\mathbb{R}^d$.

Оказывается, что последовательности, удовлетворяющие (1), имеют с вероятностью 1 одинаковую последовательность мер посещения.

**3. Последовательности мер посещения для случайных последовательностей.**

**Теорема 1.** *Пусть* $\{\xi_n; n \geq 1\}$ *— последовательность независимых случайных элементов в* $\mathbb{R}^d$ *такая, что*

$$\exists\, c \in \mathbb{R}: \sum_{k=1}^{n} P\{\|\xi_k\| > c\} < +\infty.$$

*Тогда с вероятностью* 1 *неслучайная последовательность мер*

$$\mu_n = \sum_{k=1}^{n} P\xi_k^{-1}, \quad n \geq 1$$

*является последовательностью мер посещения для* $\{\xi_n; n \geq 1\}$.

***Доказательство.*** Рассмотрим семейство $\mathscr{E}$ конечных объединений шаров с рациональными радиусами и центрами, имеющими рациональные координаты. Для каждого $\Delta \in \mathscr{E}$ построим множество полной вероятности $\Omega_\Delta$ следующим образом. Если $\lim_{n\to\infty} \mu_n(\Delta) < +\infty$, то согласно лемме Бореля – Кантелли $\{\xi_n; n \geq 1\}$ попадает в $\Delta$ лишь конечное число раз с вероятностью 1. Положим

$$\Omega_\Delta = \{\omega: \exists\, n = n(\omega): \forall\, n \geq n(\omega): \xi_n(\omega) \notin \Delta\}.$$

В случае, когда $\lim_{n\to\infty} \mu_n(\Delta) = +\infty$, выполняется соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n(\omega, \Delta)}{\mu_n(\Delta)} = 1 \quad (\operatorname{mod} P). \tag{2}$$

Здесь

$$\lambda_n(\omega, \cdot) = \sum_{k=1}^{n} \delta_{\xi_k(\omega)}.$$

Чтобы убедиться в справедливости (2), рассмотрим новую последовательность случайных величин

$$\eta_n = \chi_\Delta(\xi_n) - P\xi_n^{-1}(\Delta), \quad n \geq 1.$$

$\{\eta_n; n \geq 1\}$ — независимые ограниченные случайные величины. При каждом $n \geq 1$

$$M\eta_n = 0, \quad \mathfrak{D}\eta_n = P\xi_n^{-1}(\Delta)\big(1 - P\xi_n^{-1}(\Delta)\big).$$

Если

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}\xi_n < +\infty,$$

то по теореме Колмогорова о двух рядах ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \eta_n$ сходится с вероятностью 1. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \eta_k}{\mu_n(\Delta)} = 0 \pmod P.$$

Т.е.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n(\omega, \Delta) - \mu_n(\Delta)}{\mu_n(\Delta)} = 0 \pmod P$$

и (2) выполняется. Если

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}\xi_n = +\infty,$$

то согласно закону больших чисел для разнораспределенных случайных величин [8]

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \eta_k}{\sum_{k=1}^{n} \mathcal{D}\eta_k} = 0 \pmod P.$$

Поскольку

$$\forall\, n \geq 1 : \mathcal{D}\eta_n \leq P\xi_n^{-1}(\Delta),$$

то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \eta_k}{\mu_n(\Delta)} = 0 \pmod P$$

и, следовательно, (2) выполняется. Положим

$$\Omega_\Delta = \left\{\omega\colon \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n(\omega, \Delta)}{\mu_n(\Delta)} = 1\right\}.$$

Определим теперь

$$\Omega_0 = \bigcap_{\Delta\in\mathcal{E}} \Omega_\Delta.$$

По построению $P(\Omega_0) = 0$. Проверим, что

$$\forall\, \omega \in \Omega_0 : \lambda_n(\omega, \cdot) \sim \mu_n, \quad n \to \infty. \tag{3}$$

Отметим, что в силу условия теоремы $\mathfrak{M}_\mu \neq \varnothing$. Рассмотрим $x \in \mathfrak{M}_\mu$. Для любого $\Delta \in \mathcal{E}$, содержащего $x$,

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(\Delta) = +\infty.$$

Следовательно, согласно (2),

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \forall\, \omega \in \Omega_0 : \lim_{n\to\infty} \lambda_n(\omega, B(x, \varepsilon)) = +\infty,$$

т.е. $x \in \mathfrak{M}_{\lambda(\omega)}$. Пусть $x \notin \mathfrak{M}_\mu$. Поскольку $\mathfrak{M}_\mu$ замкнуто, то существует множество $\Delta_0 \in \mathscr{E}$, содержащее $x$ и такое, что

$$\overline{\Delta}_0 \cap \mathfrak{M}_\mu = \varnothing.$$

Докажем, что $\lim_{n\to\infty} \mu_n(\Delta_0) < +\infty$. Предположим противное, тогда из условия теоремы следует

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(\overline{\Delta}_0 \cap \overline{B(0,c)}) = +\infty. \tag{4}$$

Так как $\overline{\Delta}_0 \cap \overline{B(0,c)}$ — компакт, то путем стандартных рассуждений можно проверить, что из (4) следует существование такой точки $y \in \overline{\Delta}_0 \cap \overline{B(0,c)}$, что

$$\forall\, \varepsilon > 0: \lim_{n\to\infty} \mu_n(B(y,\varepsilon)) = +\infty,$$

т.е. $y \in \mathfrak{M}_\mu$. Следовательно, выполнение (4) приводит к противоречию. Поэтому $\lim_{n\to\infty} \mu_n(\Delta_0) < +\infty$. Отсюда

$$\forall\, \omega \in \Omega_0: \lim_{n\to\infty} \lambda_n(\omega, \Delta_0) < +\infty.$$

Следовательно,

$$\forall\, \omega \in \Omega_0: x \notin \mathfrak{M}_{\lambda(\omega)}.$$

Окончательно

$$\forall\, \omega \in \Omega_0: \mathfrak{M}_{\lambda(\omega)} = \mathfrak{M}_\mu.$$

Проверим теперь выполнение условия 2 из определения 3. Пусть $U_1 \subset U_2$ — открытые множества из определения 3. Поскольку $\overline{U_1}$ — компакт, то существует $\Delta \in \mathscr{E}$ такое, что $\overline{U_1} \subset \Delta \subset U_2$. По построению

$$\forall\, \omega \in \Omega_0: \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n(\omega,\Delta)}{\mu_n(\Delta)} = 1.$$

Следовательно,

$$\forall\, \omega \in \Omega_0: \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\lambda_n(\omega,U_2)}{\mu_n(U_1)} \ge \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\lambda_n(\omega,\Delta)}{\mu_n(\Delta)} = 1,$$

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\mu_n(U_2)}{\lambda_n(\omega,U_1)} \ge \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\mu_n(\Delta)}{\lambda_n(\omega,\Delta)} = 1.$$

Итак, (3) выполнено. Теорема доказана.

***Замечание.*** Из доказательства теоремы следует, что для возрастающей последовательности мер $\{\nu_n; n \ge 1\}$ такой, что

$$\exists\, c \in 0: \lim_{n\to\infty} \nu_n(\mathbb{R}^d \setminus B(0,c)) < +\infty,$$

выполняются соотношения:

1) $\mathfrak{M}_\nu \ne \varnothing$, $\mathfrak{M}_\nu \subset \overline{B(0,c)}$;

2) для любого открытого $U$ такого, что $\overline{U} \cap \mathfrak{M}_\nu = \varnothing$:

$$\lim_{n\to\infty} \nu_n(U) < +\infty.$$

Рассмотрим примеры использования теоремы 1.

***Пример* 5.** Пусть $\{\xi_n; n \geq 1\}$ — последовательность независимых, одинаково распределенных случайных элементов в $\mathbb{R}^d$, такая, что

$$\exists\, c > 0 : P\{\|\xi_1\| > c\} = 0. \tag{5}$$

Обозначим через $\mu$ распределение $\xi_1$. Тогда согласно теореме 1 на множестве $\Omega_0$ вероятности 1 последовательность $\{n\mu; n \geq 1\}$ является последовательностью мер посещения для $\{\xi_n(\omega); n \geq 1\}$. Рассмотрим произвольное открытое множество $U$ такое, что $\mu(\partial U) = 0$. Докажем, что

$$\forall\, \omega \in \Omega_0 : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\lambda_n(\omega, U) = \mu(U), \tag{6}$$

откуда будет следовать слабая сходимость последовательности мер $\{\lambda_n(\omega, \cdot)/n; n \geq 1\}$ к $\mu$ [9]. Рассмотрим случай, когда $\mu(U) = 0$. В силу условия (5) считаем, что $\overline{U}$ — компакт. Если $\overline{U} \cap \mathfrak{M}_\mu = \varnothing$, то согласно замечанию к теореме 1

$$\forall\, \omega \in \Omega_0 : \lim_{n\to\infty} \lambda_n(\omega, U) < +\infty.$$

Следовательно,

$$\forall\, \omega \in \Omega_0 : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\lambda_n(\omega, U) = 0 = \mu(U).$$

Пусть теперь $\overline{U} \cap \mathfrak{M}_\mu \neq \varnothing$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем открытые множества $\overline{U_1}$ и $U_2$ так, чтобы

$$\overline{U_1} \subset U_1 \subset U_2, \quad \overline{U_1} \subset U_2, \quad \overline{U_1} \text{ — компакт}, \; \mu(U_2) < \varepsilon.$$

Тогда $U_1 \cap \mathfrak{M}_\mu \neq \varnothing$ и, следовательно,

$$\forall\, \omega \in \Omega_0 : \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{n\mu(U_2)}{\lambda_n(\omega, U_1)} \geq 1,$$

т.е.

$$\forall\, \omega \in \Omega_0 : \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\lambda_n(\omega, U_1)}{n} \leq \mu(U_2) < \varepsilon.$$

Поэтому

$$\forall\, \omega \in \Omega_0 : \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\lambda_n(\omega, U)}{n} < \varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$

$$\forall\, \omega \in \Omega_0 : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\lambda_n(\omega, U) = 0.$$

Теперь рассмотрим случай $\mu(U) > 0$. Тогда $\overline{U} \cap \mathfrak{M}_\mu \neq \varnothing$. Рассмотрим множества $U_1$ и $U_2$ такие же, как и раньше, с новым неравенством

$$\mu(U_2) < \mu(U) + \varepsilon.$$

Тогда по определению 3

$$\forall\, \omega \in \Omega_0 : \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{n\mu(U_2)}{\lambda_n(\omega, U_1)} \geq 1.$$

Следовательно,

$$\forall\, \omega \in \Omega_0 :\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\ \frac{1}{n}\lambda_n(\omega, \overline{U}) \le \mu(U) + \varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$

$$\forall\, \omega \in \Omega_0 :\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\ \frac{1}{n}\lambda_n(\omega, \overline{U}) \le \mu(U).$$

Рассмотрим множество $G = B(0, c+1) \setminus \overline{U}$. Поскольку $\mu(\partial G) = 0$, то для него также справедливо неравенство

$$\forall\, \omega \in \Omega_0 :\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\ \frac{1}{n}\lambda_n(\omega, G) \le \overline{\lim_{n\to\infty}}\ \frac{1}{n}\lambda_n(\omega, \overline{G}) \le \mu(G).$$

По построению

$$\forall\, \omega \in \Omega_0 :\ \forall\, n \ge 1 :\ \frac{1}{n}\lambda_n(\omega, \overline{U}) + \frac{1}{n}\lambda_n(\omega, G) = \mu(U) + \mu(G).$$

Следовательно,

$$\forall\, \omega \in \Omega_0 :\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\lambda_n(\omega, G) = \mu(G).$$

Аналогично

$$\forall\, \omega \in \Omega_0 :\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\lambda_n(\omega, U) = \mu(U).$$

Утверждение (6) доказано. Таким образом, в рассматриваемом случае из теоремы 1 следует, что с вероятностью 1 последовательность $\{\xi_n; n \ge 1\}$ имеет множество частичных пределов $\mathfrak{M}_\mu = \operatorname{supp} \mu$ (см. [5]), а также известная теорема [7] о том, что $\{\xi_n; n \ge 1\}$ является с вероятностью 1 $\mu$-равномерно распределенной.

Отметим также, что попутно установлен следующий факт, относящийся к детерминированным возрастающим последовательностям мер.

**Теорема 2.** *Пусть* $\{\lambda_n; n \ge 1\}$ *— возрастающая последовательность мер, а* $\mu$ *— вероятностная мера в* $\mathbb{R}^d$, *удовлетворяющие условиям*

1) $\exists\, c > 0 :\ \forall\, n \ge 1 :\ \lambda_n(\mathbb{R}^d \setminus B(0, c)) = 0,\ \mu(\mathbb{R}^d \setminus B(0, c)) = 0;$

2) $\lambda_n \sim \lambda_n(\mathbb{R}^d)\mu,\ n \to \infty.$

*Тогда нормированная последовательность* $\left\{\dfrac{\lambda_n}{\lambda_n(\mathbb{R}^d)}; n \ge 1\right\}$ *слабо сходится к* $\mu$.

Рассмотрим теперь примеры последовательностей разнораспределенных случайных элементов. Начнем с модельного.

***Пример* 6.** Пусть $\{\xi_n; n \ge 1\}$ — последовательность независимых случайных величин, имеющих следующее распределение:

$$\forall\, n \ge 1 :\ P\{\xi_n = 0\} = 1 - \frac{1}{n}, \quad P\{\xi_n = 1\} = \frac{1}{n}.$$

Согласно теореме 1 $\{\xi_n; n \ge 1\}$ имеет с вероятностью 1 своей последовательностью мер посещения следующую последовательность:

$$\mu_n = \left(n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)\delta_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\delta_1, \quad n \ge 1.$$

Очевидно, что последовательность $\{\mu_n; n \geq 1\}$ является равносходящейся с более простой последовательностью

$$\mu'_n = (n - \ln n)\delta_0 + \ln n \delta_1, \quad n \geq 1.$$

Таким образом, с вероятностью 1

$$\mathcal{M}_{\xi(\omega)} = \{0; 1\}$$

и из первых $n$ членов $\{\xi_n; n \geq 1\}$ примерно $n - \ln n$ равны 0 и $\ln n$ равны 1.

***Пример* 7.** Пусть $\{\xi_n; n \geq 1\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных гауссовских случайных величин, имеющих среднее 0 и дисперсию 1. Известно [8], что для последовательности

$$\eta_n = \frac{\xi_n}{\sqrt{2 \ln n}}, \quad n \geq 2,$$

отрезок $[-1; 1]$ с вероятностью 1 является множеством частичных пределов. Теорема 1 дает возможность видеть, как часто последовательность $\{\eta_n; n \geq 2\}$ посещает окрестности точек из $[-1; 1]$. Меры $\{\mu_n; n \geq 1\}$, построенные в теореме 1, сейчас имеют плотность относительно меры Лебега

$$p_n(x) = \sum_{k=2}^{n} \frac{\sqrt{2 \ln k}}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{k^{x^2}}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \geq 2.$$

Поэтому для произвольного отрезка $[a; b]$

$$\mu_n([a; b]) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \sum_{k=2}^{n} \frac{\sqrt{2 \ln k}}{k^{x^2}} dx, \quad n \geq 2. \tag{7}$$

Используя интегральные оценки, с помощью (7) можно заключить, что с вероятностью 1 последовательность $\{\eta_n; n \geq 2\}$ имеет следующие свойства:

1) любой отрезок $[a; b]$, не пересекающийся с $[-1; 1]$, посещается лишь конечное число раз;

2) если отрезок $[a; b] \subset (0; 1)$, то для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\lambda_n(\omega, [a; b])}{n^{1 - a^2 + \varepsilon}} = 0,$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\lambda_n(\omega, [a; b])}{n^{1 - a^2 - \varepsilon}} = +\infty;$$

в частности, для любых чисел $0 < a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < 1$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\lambda_n(\omega, [a_2; b_2])}{\lambda_n(\omega, [a_1; b_1])} = 0.$$

Аналогичные соотношения справедливы для отрезков, расположенных на $(-1; 0)$.

***Пример* 8.** Пусть $\{\xi_n; n \geq 2\}$ — последовательность независимых случайных величин, имеющих показательное распределение с единичной интенсивностью. Тогда последовательность

$$\eta_n = \frac{\xi_n}{\ln n}, \quad n \geq 2,$$

удовлетворяет условиям теоремы 1. Поэтому последовательность $\{\eta_n; n \geq 2\}$

с вероятностью 1 имеет в качестве последовательности мер посещения меры $\{\mu_n; n \geq 2\}$ с плотностями

$$p_n(x) = \sum_{k=2}^{n} \ln k \frac{1}{k^x} \eta(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \geq 2.$$

Здесь $\eta = \chi_{[0;+\infty)}$. Для произвольного отрезка $[a; b] \subset [0; +\infty)$

$$\mu_n([a; b]) = \sum_{k=2}^{n} \left( \frac{1}{k^a} - \frac{1}{k^b} \right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^a} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^b}, \quad n \geq 1.$$

Поэтому с вероятностью 1 последовательность $\{\eta_n; n \geq 2\}$ имеет следующие свойства:

1) $\mu_n = [0; 1]$;

2) если $[a; b] \subset (0; 1)$, то для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\lambda_n(\omega, [a; b])}{n^{1-a+\varepsilon}} = 0,$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\lambda_n(\omega, [a; b])}{n^{1-a-\varepsilon}} = +\infty;$$

в частности, как и в гауссовском случае,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\lambda_n(\omega, [a_2; b_2])}{\lambda_n(\omega, [a_1; b_1])} = 0$$

для произвольных $0 < a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < 1$.

Для изучения поведения последовательностей типа (1) необходимо знание мер посещения для последовательностей более общего вида, чем последовательности независимых случайных элементов.

**Теорема 3.** *Пусть* $\{\xi_n; n \geq 1\}$ — *последовательность независимых случайных элементов в* $\mathbb{R}^d$, *удовлетворяющая условию теоремы* 1. *Тогда с вероятностью* 1 *неслучайная последовательность мер*

$$\mu_n = \sum_{k=1}^{n} P(\xi_k, \xi_{k+1}, \ldots, \xi_{k+m})^{-1}, \quad n \geq 1,$$

*является последовательностью мер посещения для* $\{(\xi_n, \xi_{n+1}, \ldots, \xi_{n+m}); n \geq 1\}$ *при любом фиксированном* $m \geq 1$.

***Доказательство.*** Пусть семейство $\mathscr{C}$ подмножеств $\mathbb{R}^{dx(m+1)}$ такое же, как в теореме 1. Для того чтобы воспроизвести схему доказательства теоремы 1, достаточно установить следующий факт. Если для $\Delta \in \mathscr{C}$ $\lim_{n\to\infty} \mu_n(\Delta) = +\infty$, то с вероятностью 1 последовательность $\{(\xi_n, \ldots, \xi_{n+m}); n \geq 1\}$ посещает $\Delta$ конечное число раз; а если $\lim_{n\to\infty} \mu_n(\Delta) = +\infty$, то

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\lambda_n(\omega, \Delta)}{\mu_n(\Delta)} = 1 \pmod{P}.$$

Здесь $\{\lambda_n(\omega, \cdot); n \geq 1\}$ — последовательность мер, построенная по $\{(\xi_n, \ldots, \xi_{n+m}); n \geq 1\}$, как в примере 1. Рассмотрим вначале $\Delta \in \mathscr{C}$ такое, что $\lim_{n\to\infty} \mu_n(\Delta) < +\infty$. Тогда по лемме Бореля – Кантелли $\{(\xi_n, \ldots, \xi_{n+m}); n \geq 1\}$ посещает $\Delta$ конечное число раз с вероятностью 1. Пусть теперь $\lim_{n\to\infty} \mu_n(\Delta) = +\infty$. Обозначим для удобства при каждом $n \geq 1$

$$\eta_n = \chi_\Delta(\xi_n, \ldots, \xi_{n+m}).$$

Тогда, как и ранее, для $n \ge 1$

$$\sum_{k=1}^{n} M\eta_k = \mu_n(\Delta), \quad \mathfrak{D}\eta_n = M\eta_n(1 - M\eta_n),$$

$$\lambda_n(\omega, \Delta) \sum_{k=1}^{n} \eta_k.$$

Запишем

$$\lambda_n(\omega, \Delta) = S_{n0} + S_{n1} + \ldots + S_{nm-1},$$

$$\mu_n(\Delta) = \mu_{n0}(\Delta) + \mu_{n1}(\Delta) + \ldots + \mu_{nm-1}(\Delta),$$

$$\sum_{k=1}^{n} \mathfrak{D}\eta_k = B_{n0}(\Delta) + B_{n1}(\Delta) + \ldots + B_{nm-1}(\Delta),$$

где в каждой из сумм в слагаемое со вторым индексом $i = 0, \ldots, m-1$ собраны все слагаемые первоначальной суммы, индексы которых при делении на $m$ дают остаток $i$. Отдельные слагаемые в каждой из сумм $S_{ni}$, $i = 0, \ldots, m-1$, независимы между собой. Если

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{D}\eta_k < +\infty,$$

то, применяя теорему Колмогорова о двух рядах, получаем, что для любого $i = 0, \ldots, m-1$ существует с вероятностью 1 конечный предел последовательности $\{S_{ni} - \mu_{ni}(\Delta); n \ge 1\}$. Следовательно, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\eta_k - M\eta_k)$$

сходится с вероятностью 1. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n(\omega, \Delta) - \mu_n(\Delta)}{\mu_n(\Delta)} = 0 \pmod P.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n(\omega, \Delta)}{\mu_n(\Delta)} = 1 \pmod P.$$

Пусть теперь

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{D}\eta_k = +\infty.$$

Обозначим через $\mathcal{J}$ множество всех индексов $i$, для которых $\lim_{n\to\infty} \mu_{ni}(\Delta) = +\infty$. Согласно доказанному ранее

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i \notin \mathcal{J}} S_{ni}}{\mu_n(\Delta)} = 0 \pmod P.$$

Кроме того,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i\in\mathcal{J}} \mu_{ni}(\Delta)}{\mu_n(\Delta)} = 1.$$

Поэтому далее рассматриваем поведение отношения

$$R_n = \frac{\sum_{i\in\mathcal{J}} S_{ni}}{\sum_{i\in\mathcal{J}} \mu_{ni}(\Delta)}, \quad n \ge 1.$$

Имеем

$$R_n = \sum_{i\in\mathcal{J}} \frac{S_{ni}}{\mu_{ni}(\Delta)} \frac{\mu_{ni}(\Delta)}{\sum_{j\in\mathcal{J}} \mu_{nj}(\Delta)}.$$

Согласно доказательству теоремы 1

$$\forall\, i \in \mathcal{J}: \lim_{n\to\infty} \frac{S_{ni}}{\mu_{ni}(\Delta)} = 1 \pmod P.$$

Поэтому

$$\varlimsup_{n\to\infty} |R_n - 1| \le \varlimsup_{n\to\infty} \sum_{i\in\mathcal{J}} \left| \frac{S_{ni}}{\mu_{ni}(\Delta)} - 1 \right| \frac{\mu_{ni}(\Delta)}{\sum_{j\in\mathcal{J}} \mu_{nj}(\Delta)} \le$$

$$\le \varlimsup_{n\to\infty} \sum_{i\in\mathcal{J}} \left| \frac{S_{ni}}{\mu_{ni}(\Delta)} - 1 \right| = 0 \pmod P.$$

Теорема доказана.

Аналогично доказывается следующая теорема.

**Теорема 4.** *Пусть $\{\xi_n; n \ge 1\}$ — последовательность независимых случайных элементов в $\mathbb{R}^d$, удовлетворяющая условию теоремы 1, $m \ge 1$ фиксировано, $F: \mathbb{R}^{d(m+1)} \to \mathbb{R}^l$ — борелева функция, переводящая ограниченные множества в ограниченные. Тогда последовательность случайных элементов в $\mathbb{R}^l$*

$$\eta_n = F(\xi_n, \xi_{n+1}, \ldots, \xi_{n+m}), \quad n \ge 1,$$

*с вероятностью 1 имеет в качестве последовательности мер посещения последовательность*

$$\mu_n = \sum_{k=1}^n P\eta_k^{-1}, \quad n \ge 1.$$

Приведем еще два вспомогательных утверждения.

**Лемма 1.** *Пусть последовательности элементов $\mathbb{R}^d$ $\{a_n'; n \ge 1\}$ и $\{a_n''; n \ge 1\}$ таковы, что*

$$\lim_{n\to\infty} \| a_n' - a_n'' \| = 0.$$

*Тогда семейства последовательностей мер посещения для $\{a_n'; n \ge 1\}$ и $\{a_n''; n \ge 1\}$ совпадают.*

***Доказательство.*** Пусть

$$\lambda_n' = \sum_{k=1}^n \delta_{a_k'}, \quad \lambda_n'' = \sum_{k=1}^n \delta_{a_k''}, \quad n \ge 1.$$

Достаточно доказать, что $\lambda'_n \sim \lambda''_n$, $n \to \infty$. Проверим выполнение условий определения 3. Условие 1 выполнено, поскольку

$$\mathfrak{M}_{\lambda'} = \mathcal{M}_{a'} = \mathcal{M}_{a''} = \mathfrak{M}_{\lambda''}.$$

Рассмотрим множества $U_1$ и $U_2$, удовлетворяющие условию 2 определения 3. Так как $\overline{U_1}$ — компакт, то существует номер $n_0$ такой, что для любого номера $k \geq n_0$ из условия $a'_k \in U_1$ следует, что $a''_k \in U_2$. Поэтому

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\lambda''_n(U_2)}{\lambda'_n(U_1)} \geq 1.$$

Аналогично проверяется, что

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\lambda'_n(U_2)}{\lambda''_n(U_1)} \geq 1.$$

Лемма доказана.

**Лемма 2.** *Пусть последовательности элементов* $\mathbb{R}^d$ $\{ a'_n ; n \geq 1 \}$ *и* $\{ a''_n ; n \geq 1 \}$ *таковы, что для некоторого* $c > 0$ *справедливо неравенство*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \| a'_n - a''_n \| < c.$$

*Пусть* $\{ \mu'_n ; n \geq 1 \}$, $\{ \mu'' ; n \geq 1 \}$ *— последовательности мер посещения для* $\{ a'_n ; n \geq 1 \}$ *и* $\{ a''_n ; n \geq 1 \}$ *соответственно. Тогда*

1) $\mathfrak{M}_{\mu'} = \mathcal{M}_{a'} \subset \mathfrak{M}_{\mu''} + c = \mathcal{M}_{a''} + c$;

2) *для открытых множеств* $U_1$, $U_2$, *удовлетворяющих требованиям* $U_1 \cap \mathfrak{M}_{\mu'} \neq \varnothing$, $\overline{U_1}$, $\overline{U_2}$ *— компакты,* $\overline{U_1} \subset \overline{U_2}$, *и произвольного* $\varepsilon > 0$ *справедливо неравенство*

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\mu''_n(U_2 + c + \varepsilon)}{\mu'_n(U_1)} \geq 1.$$

*Здесь для множества* $A$ *и числа* $\delta > 0$

$$A + \delta = \bigcup_{x \in A} B(x, \delta).$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 1.

Рассмотрим теперь случайную последовательность $\{ x_n ; n \geq 1 \}$, удовлетворяющую линейному уравнению (1):

$$x_{n+1} = A x_n + \xi_{n+1}, \ n \geq 0, \quad x_0 = u \in \mathbb{R}^d. \tag{8}$$

Здесь $A$ — линейный оператор в $\mathbb{R}^d$, $\{ \xi_n ; n \geq 1 \}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных элементов. Для исследования (8) нам понадобятся следующие условия и обозначения. Далее считаем, что

$$\| A \| = \alpha < 1, \quad M \| \xi_1 \| < +\infty,$$

$$\exists K_0 : \forall C, \ K > K_0 : P\{ K \| \xi_1 \| > C \} \leq \frac{1}{K} P\{ \| \xi_1 \| > C \}.$$

Тогда ряд

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} A^{k-1} \xi_k$$

сходится с вероятностью 1. Пусть $\{y_n; n \geq 1\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных элементов в $\mathbb{R}^d$, распределение которых совпадает с распределением $y$.

**Теорема 5.** *Пусть $\{c_n; n \geq 1\}$ — возрастающая последовательность положительных чисел такая, что*

1) $\lim_{n\to\infty} c_n = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = 1;$

2) $P\left\{ \overline{\lim_{n\to\infty}} \left\| \frac{\xi_n}{c_n} \right\| < +\infty \right\} = 1.$

*Тогда*

1) $P\left\{ \overline{\lim_{n\to\infty}} \left\| \frac{x_n}{c_n} \right\| < +\infty \right\} = 1, \ P\left\{ \overline{\lim_{n\to\infty}} \left\| \frac{y_n}{c_n} \right\| < +\infty \right\} = 1;$

2) *с вероятностью* 1 *последовательность* $\{x_n / c_n; n \geq 1\}$ *имеет в качестве последовательности мер посещения последовательность*

$$\mu_n = \sum_{k=1}^{n} P\left(\frac{y}{c_n}\right)^{-1}, \quad n \geq 1.$$

***Доказательство.*** Докажем первое утверждение. По закону 0 и 1

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left\| \frac{\xi_n}{c_n} \right\| = L \in \mathbb{R} \pmod P.$$

Поэтому

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left\| \frac{x_n}{c_n} \right\| = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left\| \frac{1}{c_n} \left( \sum_{k=1}^{n} A^{n-k} \xi_k + u \right) \right\| \leq$$

$$\leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{k=1}^{n} \left\| A^{n-k} \frac{\xi_k}{c_n} \right\| \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{k=1}^{n} \alpha^{n-k} \left\| \frac{\xi_k}{c_k} \right\| \frac{c_k}{c_n} \leq$$

$$\leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{k=1}^{n} \alpha^{n-k} \left\| \frac{\xi_k}{c_k} \right\| \leq \frac{1}{1-\alpha} L.$$

Пусть теперь $\{\eta_{nk}; n, k \geq 1\}$ — независимые одинаково распределенные случайные элементы в $\mathbb{R}^d$, имеющие то же распределение, что и $\xi_1$. Тогда последовательность

$$y'_n = \sum_{k=1}^{\infty} A^{k-1} \eta_{nk}, \quad n \geq 1,$$

равнораспределена с $\{y_n; n \geq 1\}$. Рассмотрим

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left\| \frac{y'_n}{c_n} \right\| = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left\| \frac{1}{c_n} \sum_{k=1}^{\infty} A^{k-1} \eta_{nk} \right\| \leq$$

$$\leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{k-1} \left\| \frac{\eta_{nk}}{c_n} \right\| \leq$$

$$\leq \varlimsup_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \alpha^{k-1} \left\| \frac{\eta_{nk}}{c_n} \right\| + \varlimsup_{n\to\infty} \sum_{k=m+1}^{\infty} \alpha^{k-1} \left\| \frac{\eta_{nk}}{c_n} \right\|$$

для произвольного $m \geq 1$. Поскольку

$$P\left\{ \varlimsup_{n\to\infty} \left\| \frac{\xi_n}{c_n} \right\| = L < +\infty \right\} = 1,$$

то для числа $L+1$ по лемме Бореля – Кантелли сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left\{ \left\| \frac{\xi_n}{c_n} \right\| > L+1 \right\}.$$

Поэтому из свойств распределения $\|\xi_1\|$ следует, что

$$\sum_{k,n=1}^{\infty} P\left\{ \alpha^{(k-1)/2} \left\| \frac{\eta_{nk}}{c_n} \right\| > L+1 \right\} < +\infty.$$

В свою очередь,

$$P\left\{ \sup_{k,n\geq 1} \alpha^{(k-1)/2} \left\| \frac{\eta_{nk}}{c_n} \right\| < +\infty \right\} = 1.$$

Следовательно, по закону 0 и 1 существует число $L_1$ такое, что

$$P\left\{ \lim_{N,m\to\infty} \sup_{\substack{n\geq N\\ k\geq m}} \alpha^{(k-1)/2} \left\| \frac{\eta_{nk}}{c_n} \right\| = L_1 \right\} = 1.$$

Отсюда

$$P\left\{ \lim_{m\to\infty} \varlimsup_{n\to\infty} \sum_{k=m+1}^{\infty} \alpha^{k-1} \left\| \frac{\eta_{nk}}{c_n} \right\| = 0 \right\} = 1. \tag{9}$$

Теперь с помощью стандартного приема получаем

$$P\left\{ \varlimsup_{n\to\infty} \left\| \frac{y_n'}{c_n} \right\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{k-1} L \right\} = 1.$$

Утверждение 1 теоремы доказано. Перейдем к доказательству второго утверждения. Расширяя, если нужно, вероятностное пространство, рассмотрим двойную последовательность $\{\eta'_{nk}; n, k \geq 1\}$ такую же, как $\{\eta_{nk}; n, k \geq 1\}$, и независимую с $\{\xi_n; n \geq 1\}$. При фиксированном $m \geq 1$ определим последовательности

$$x_{nm} = \sum_{k=n-m}^{n} A^{n-k} \xi_k, \quad n \geq m+1,$$

$$y''_{nm} = \sum_{k=n-m}^{n} A^{n-k} \xi_k + \sum_{k=m+1}^{\infty} A^k \eta'_{nk}, \quad n \geq m+1.$$

Тогда при фиксированном $m \geq 1$

$$\varlimsup_{n\to\infty} \left\| \frac{x_n - x_{nm}}{c_n} \right\| = \varlimsup_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{n-m-1} A^{n-k} \xi_k \frac{1}{c_n} \right\| =$$

$$= \varlimsup_{n\to\infty} \left\| A^{m+1} \frac{x_{n-m-1}}{c_n} \right\| \leq \varlimsup_{n\to\infty} \alpha^{m+1} \frac{c_{n-m-1}}{c_n} \left\| \frac{x_{n-m-1}}{c_{n-m-1}} \right\|.$$

Следовательно, согласно (9)

$$P\left\{ \lim_{m\to\infty} \varlimsup_{n\to\infty} \left\| \frac{x_n - y''_{nm}}{c_n} \right\| = 0 \right\} = 1. \tag{10}$$

Отметим теперь, что при фиксированном $m \geq 1$ случайные элементы $\{ y''_{nm} / c_n; n \geq m+1 \}$ ведут себя так же, как последовательность теоремы 3. Поэтому для $\{ y''_{nm} / c_n; n \geq m+1 \}$ с вероятностью 1 последовательность $\{ \mu_n; n \geq m+1 \}$ является последовательностью мер посещения. Обозначим через $\Omega_m$ соответствующее подмножество $\Omega$, а через $\Omega'$— подмножество вероятности 1, на котором выполняется равенство из (10). Пусть

$$\Omega_0 = \Omega' \cap \bigcap_{m=1}^{\infty} \Omega_m.$$

Для $\omega \in \Omega_0$ множество частичных пределов последовательности $\{ x_n(\omega) / c_n; n \geq 1 \}$ совпадает с $\mathfrak{M}_\mu$ в силу выполнения равенства из (10). Пусть теперь $U_1$, $U_2$ — открытые множества из определения 3. Тогда существует $\delta > 0$ такое, что $\overline{U_1 + \delta} \subset U_2$. Для данного $\omega \in \Omega_0$ выберем $m$ так, чтобы

$$\varlimsup_{n\to\infty} \left\| \frac{x_n(\omega) - y''_{nm}(\omega)}{c_n} \right\| < \frac{\delta}{2}.$$

Тогда согласно лемме 3

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{\lambda_n(\omega, U_2)}{\mu_n(U_1)} \geq \varliminf_{n\to\infty} \frac{\lambda_n(\omega, U_1 + \delta)}{\mu_n(U_1)} \geq 1.$$

Аналогично

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{\mu_n(U_2)}{\lambda_n(\omega, U_1)} \geq \varliminf_{n\to\infty} \frac{\lambda_{nm}(\omega, U_1 + \delta)}{\lambda_n(\omega, U_1)} \frac{\mu_n(U_2)}{\lambda_{nm}(\omega, U_1 + \delta)} \geq 1.$$

Здесь

$$\lambda_n(\omega, \cdot) = \sum_{k=1}^{n} \delta_{x_k(\omega)/c_k}, \quad n \geq 1,$$

$$\lambda_{nm}(\omega, \cdot) = \sum_{k=m+1}^{n} \delta_{y''_{km}(\omega)/c_k}, \quad n \geq m+1.$$

Теорема доказана.

***Пример 9.*** Пусть $\{ \xi_n; n \geq 1 \}$ — независимые одинаково распределенные гауссовские случайные величины, имеющие среднее 0 и дисперсию 1. Пусть

$$x_{n+1} = \alpha x_n + \xi_{n+1}, \quad n \geq 0,$$

$$x_0 = 0, \ |\alpha| < 1.$$

Тогда согласно теореме 4

1) $P\left\{ \varlimsup_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{\sqrt{2 \ln n}} < +\infty \right\} = 1,$

2) последовательность

$$\left\{\frac{x_n}{\sqrt{2\ln n}};\, n \geq 2\right\}$$

имеет с вероятностью 1 такую же неслучайную последовательность мер посещения, как и последовательность

$$\left\{\sqrt{1-\alpha^2}\,\frac{\xi_n}{\sqrt{2\ln n}};\, n \geq 2\right\},$$

описанная в примере 7.

***Замечание.*** Вопрос о существовании точной нормирующей последовательности $\{c_n;\, n \geq 1\}$ для (1) рассматривался в [10] в общей ситуации. В теореме 4 приведены достаточные условия, обеспечивающие совпадение нормировок для $\{\xi_n;\, n \geq 1\}$ и (1). Основная цель теоремы 4 — доказательство совпадения мер посещения для (1) и для последовательности независимых нормированных элементов $\{y_n / c_n;\, n \geq 1\}$.


1. *Morozan T.* Periodic solutions of stochastic discretine systems //Rev. roum. math. pures. et appl. – 1987. – **32,** № 4. – P. 351–363.
2. *Дороговцев А. Я.* Периодические и стационарные режимы бесконечномерных детерминированных и стохастических динамических систем. – Киев: Выща шк., 1992. – 319 с.
3. *Дороговцев А. Я., Денисьевский Н. А.* Сходимость приближений в моделях с ошибками // Математика сегодня, 93. – Киев: Выща шк., 1993. – С. 40–53.
4. *Dorogovtsev A. A.* On the convergence of iterations disturbed by strong Gaussian random operators // Stochastics and Stochast. Repts. – 1993. – **43.** – P. 117–126.
5. *Кулик А. М.* Потраекторное предельное поведение последовательностей случайных величин // Случайные процессы и бесконечномерный анализ. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1992. – С. 75–87.
6. *Дороговцев А. А., Денисьевский Н. А.* Последовательные приближения к решению задачи Коши при случайных помехах // Нелинейные краевые задачи мат. физики и их прил.: Тезисы. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1994. – С. 71.
7. *Кейперс Л., Нидеррейтер Г.* Равномерное распределение последовательностей. – М.: Наука, 1985. – 408 с.
8. *Петров В. В.* Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. – М.: Наука, 1987. – 320 с.
9. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер. – М.: Наука, 1977. – 352 с.
10. *Булдыгин В. В., Солнцев С. А.* Принцип сжатия и усиленный закон больших чисел для взвешенных сумм // Теория вероятностей и ее применения. – 1986. – **31,** № 3. – С. 516–529.


Получено 25.04.95