УДК 531.36; 531.011

С. П. Сосницький (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО НЕСТІЙКІСТЬ ЛАГРАНЖЕВИХ РОЗВ'ЯЗКІВ У ЗАДАЧІ ТРЬОХ ТІЛ

We consider the relation between the Lyapunov instability of Lagrang equilateral triangle solutions and their orbital instability. We present a theorem on the orbital instability of Langrang solutions. This theorem is extended to the planar n-body problem.

Розглядається зв'язок між нестійкістю за Ляпуновим лагранжевих розв'язків, що відповідають утвореному тілами рівносторонньому трикутнику, і їх орбітальною нестійкістю. Наводиться теорема про орбітальну нестійкість лагранжевих розв'язків, яка поширюється на плоску задачу n-тіл.

Як відомо [1], задача трьох тіл полягає в тому, що 3 частки (матеріальні точки) відповідно з масами m_1, m_2, m_3 рухаються в 3-мірному просторі R^3 під дією сил взаємного притягання. Потрібно визначити їх координати і швидкості в будь-який момент часу t, виходячи зі значень цих велечин у початковий момент часу $t = t_0$. У такому вигляді задача залишається не розв'язаною і до цього часу. Разом з тим Ейлер і Лагранж знайшли її частинні розв'язки, що деякою мірою можуть бути вихідним моментом при якісному дослідженні руху 3 точок. Далі зосередимо увагу на дослідженні стійкості розв'язків Лагранжа, яким відповідає розташування 3 точок у вершинах рівностороннього трикутника.

1. Введемо інерціальну систему відліку, початок якої виберемо в центрі мас m_1, m_2, m_3. Нехай r_i, $i = 1, 2, 3,$ — радіус-вектори часток у даній системі відліку. Тоді відповідний лагранжіан набуває вигляду

$$L = T + U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} m_i \dot{r}_i^2 + G\left(\frac{m_1 m_2}{|r_{12}|} + \frac{m_1 m_3}{|r_{13}|} + \frac{m_2 m_3}{|r_{23}|}\right), \tag{1}$$

$$r_{ij} = r_j - r_i, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

де G — гравітаційна стала.

Обмежимося випадком розв'язків Лагранжа, коли виконуються умови

$$|r_{12}(t)| = |r_{13}(t)| = |r_{23}(t)| = r_0 = \text{const}. \tag{2}$$

Оскільки далі розглядається нестійкість лагранжевих розв'язків (2), без обмеження загальності міркувань зупинимося на плоскій задачі 3 тіл. У цьому випадку, використовуючи, зокрема, систему осей координат, що обертаються з постійною кутовою швидкістю ω, лагранжіану L можна надати вигляду [1, с. 598]

$$L = T_2 + T_1 + T_0 + U, \tag{3}$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \frac{1}{2}\mu(\dot{q}_3^2 + \dot{q}_4^2),$$

$$T_1 = m\omega(-\dot{q}_1 q_2 + q_1 \dot{q}_2) + \mu\omega(-\dot{q}_3 q_4 + q_3 \dot{q}_4),$$

$$T_0 = \frac{1}{2} m\omega^2(q_1^2 + q_2^2) + \frac{1}{2}\mu\omega^2(q_3^2 + q_4^2),$$

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad \mu = \frac{(m_1 + m_2) m_3}{M}, \quad M = m_1 + m_2 + m_3.$$

Відстані $|r_{ij}|$, $i, j = 1, 2, 3$, які входять у вираз для U, пов'язані з узагальненими координатами q_k, $k = \overline{1, 4}$, співвідношеннями

$$r_{12}^2 = q_1^2 + q_2^2, \quad r_{13}^2 = (\alpha_2 q_1 + q_3)^2 + (\alpha_2 q_2 + q_4)^2, \tag{4}$$
$$r_{23}^2 = (-\alpha_1 q_1 + q_3)^2 + (-\alpha_1 q_2 + q_4)^2,$$
$$\alpha_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}, \quad \alpha_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}.$$

Сенс використання системи координат, яка обертається, полягає в тому, що розв'язок (2) стає критичною точкою лагранжіана L у вигляді (3). Тим самим дослідження стійкості розв'язку (2) системи (1) зводиться до дослідження стійкості положення рівноваги системи (3).

Щоб переконатися, що розв'язок (2) дійсно відповідає положенню рівноваги системи (3), виразимо функцію T_0 через відстані $|r_{ij}|$. Для цього в (4) першу рівність помножимо на $(-\alpha_1\alpha_2)$, другу — на α_1, третю — на α_2. Склавши їх, одержимо

$$\alpha_1 r_{13}^2 + \alpha_2 r_{23}^2 - \alpha_1\alpha_2 r_{12}^2 = q_3^2 + q_4^2. \tag{5}$$

Отже, на підставі (4), (5) маємо

$$T_0 = \frac{1}{2} m\omega^2 r_{12}^2 + \frac{1}{2}\mu\omega^2(\alpha_1 r_{13}^2 + \alpha_2 r_{23}^2 - \alpha_1\alpha_2 r_{12}^2).$$

Виходячи з того, що система (1) має розв'язок (2), зобразимо величини $|r_{ij}|$ у вигляді

$$|r_{12}| = r_0 + x, \quad |r_{13}| = r_0 + y, \quad |r_{23}| = r_0 + z, \tag{6}$$

де x, y, z відповідають малим збуренням розв'язку (2). Тоді в околі точки $|r_{ij}| = r_0$ функцію $T_0 + U$ можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} T_0 + U = {} & \frac{1}{2}\omega^2 r_0^2[m + (1 - \alpha_1\alpha_2)\mu] + G r_0^{-1}(m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3) + \\ & + r_0\left(\frac{\omega^2}{M} - \frac{G}{r_0^3}\right)(m_1 m_2 x + m_1 m_3 y + m_2 m_3 z) + \frac{1}{2}\omega^2 \frac{m_1 m_2}{M} x^2 + \\ & + \frac{1}{2}\mu\omega^2(\alpha_1 y^2 + \alpha_2 z^2) + G r_0^{-3}(m_1 m_2 x^2 + m_1 m_3 y^2 + m_2 m_3 z^2) + \\ & + O(\|x \oplus y \oplus z\|^3). \end{aligned} \tag{7}$$

З умови, що $|r_{ij}| = r_0$ — критична точка функції $T_0 + U$, маємо рівність

$$\omega^2 = G M r_0^{-3}. \tag{8}$$

Отже, якщо кутова швидкість ω обертання рухомої системи координат вибирається згідно з рівністю (8), то лагранжевий розв'язок (2) системи (1) переходить у критичну точку функції $T_0 + U$.

Оскільки на підставі (4) відстані $|r_{ij}|$ виражаються через координати q_1, q_2, q_3, q_4, величина $T_0 + U$ як функція $q = (q_1, q_2, q_3, q_4)^T$, звичайно, також має критичні точки $q = q_0 = (q_{10}, q_{20}, q_{30}, q_{40})^T$. Причому їх буде безліч, що є відображенням довільності як орієнтації трикутників, так і довжини їх сторін. Це, зокрема, видно із співвідношень

$$r_0^2 = q_{10}^2 + q_{20}^2, \quad (1 - \alpha_1\alpha_2) r_0^2 = q_{30}^2 + q_{40}^2, \tag{9}$$

що випливають з (4), (5).

Надалі, виходячи з форми задання (3) лагранжіана L, розглядатимемо його критичні точки у вигляді $\dot{q} = 0$, $q = q_0$. Останні відповідають положенню рівноваги системи

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0. \tag{10}$$

При цьому конкретизація одного з багатьох положень равноваги, що задовольняє умови (9), не має істотного значення.

Лема. *Положення рівноваги системи* (3), (10) *нестійкі за Ляпуновим.*

Доведення леми грунтується на застосуванні канонічного перетворення [1, с. 598], в результаті якого одна з координат стає циклічною.

2. Виходячи з того, що q_0 — положення рівноваги системи (3), (10), подамо величини q_k, $k = \overline{1,4}$, у формі

$$q_k = q_{k0} + \xi_k, \tag{11}$$

де $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_4)^T$ відповідає малому збуренню вектора $q = q_0$.

Відповідні рівняння збуренного руху мають вигляд

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{\xi}} - \frac{\partial L^*}{\partial \xi} = 0, \tag{12}$$

$$L^* = T_2^* + T_1^* + T_0^* + U^*, \quad T_2^* = T_2(\dot{\xi}), \tag{13}$$

$$T_1^* = \xi^T \frac{\partial^2 T_1}{\partial q \partial \dot{q}}\bigg|_{q=q_0} \dot{\xi}, \quad T_0^* = T_0(\xi), \quad U^* = \frac{1}{2}\xi^T \frac{\partial^2 U}{\partial q^2}\bigg|_{q=q_0} \xi + O(\|\xi\|^3),$$

або у гамільтоновій формі

$$\dot{\xi} = \frac{\partial H^*}{\partial \eta}, \quad \dot{\eta} = -\frac{\partial H^*}{\partial \xi}, \tag{14}$$

$$H^* = \frac{1}{2m}(\eta_1^2 + \eta_2^2) + \frac{1}{2\mu}(\eta_3^2 + \eta_4^2) - \omega(\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1 + \xi_3\eta_4 - \xi_4\eta_3) - U^*. \tag{15}$$

На підставі співвідношень (4), (6), (11) збурення x, y, z сторін лагранжевого трикутника можна завжди виразити як функції збурень вектора $q = q_0$. А це дозволяє поставити питання: при яких умовах нестійкість за Ляпуновим розв'язку (2) зумовлює його орбітальну нестійкість ?

Теорема 1. *Якщо існує розв'язок рівнянь збуренного руху* (14), *що асимптотично прямує до положення рівноваги* $\xi = \eta = 0$ *при* $t \to \infty$ $(t \to -\infty)$, *то лагранжева конфігурація* (2) *орбітально нестійка.*

Доведення. Згідно з рівностями (7), (8), (11), (13) маємо

$$\frac{1}{2}\omega^2 r_0^2[m + (1 - \alpha_1\alpha_2)\mu] + G r_0^{-1}(m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3) +$$
$$+ \frac{3}{2} G r_0^{-3}(m_1 m_2 x^2 + m_1 m_3 y^2 + m_2 m_3 z^2) + O(\|x \oplus y \oplus z\|^3) =$$
$$= (T_0 + U)\big|_{q=q_0} + T_0^*(\xi) + U^*(\xi). \tag{16}$$

Оскільки на підставі (1), (3), (9)

$$(T_0 + U)\big|_{q=q_0} = \frac{1}{2}\omega^2 r_0^2[m + (1 - \alpha_1\alpha_2)\mu] + G r_0^{-1}(m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3),$$

з (16) випливає

$$\frac{3}{2}Gr_0^{-3}(m_1m_2x^2+m_1m_3y^2+m_2m_3z^2)+$$
$$+\ O(\|x\oplus y\oplus z\|^3) = T_0^*(\xi)+U^*(\xi). \tag{17}$$

Асимптотичний розв'язок, що існує згідно з умовою теореми, належить множині нульового рівня гамільтоніана $H^*(\xi,\eta)$, оскільки $H^*(0,0)=0$. Наявність асимптотичного розв'язку з урахуванням структури лагранжіана (13) досліджуваної системи (див. лему 1 і її наслідок у [2]) завжди породжує існування траєкторії γ, що виходить з точки $\xi=\eta=0$ при зростанні t. Таким чином, на підставі рівності

$$T_2^*-T_0^*-U^* = h^* = 0 \tag{18}$$

існує така послідовність $\{t_s\}\subset J^+=[\,0,a\,[$ (J^+ — максимальний правий інтервал)

$$\lim_{s\to\infty} t_s = a,\quad s=0,1,2,\ldots,$$

що функція $T_2^*(\gamma(t_s))$ строго зростає, якщо тільки $s\to\infty$, $\gamma(t_s)\in s_\varepsilon=\{(\xi,\eta)\in R^4\times R^4, \|\xi\oplus\eta\|<\varepsilon\}$.

Згідно з рівністю (18) зростання $T_2^*(\gamma(t_s))$ обумовлює аналогічну поведінку функції $T_0^*(\gamma(t_s))+U^*(\gamma(t_s))$. Отже, на підставі рівності (17) її ліва частина також зростає на $\gamma(t_s)$, $t_s\in\{t_s\}\subset J^+$. Враховуючи співвідношення

$$x=|r_{12}|-r_0,\quad y=|r_{13}|-r_0,\quad z=|r_{23}|-r_0,$$

робимо висновок, що зростання лівої частини рівності (17) у деякому околі s_δ $(\delta=\delta(\varepsilon))$ стаціонарної конфігурації (2) еквівалентне виходу збуреного руху з околу s_δ, незалежно від того, наскільки близько даний збурений рух знаходився від конфігурації (2) у початковий момент часу. Одержана властивість збуреного руху не задовольняє визначення орбітальної стійкості (див., наприклад, [1, с. 478]) стаціонарного руху (2). Теорему 1 доведено.

Зауважимо, що $T_0^*+U^*$ як функція ξ є виродженою, і отже, з нестійкості положення рівноваги $\xi=\eta=0$ за Ляпуновим ще не випливає існування розв'язку $(\xi^*(t_s),\eta^*(t_s))$, що залишає s_ε, на якому функція $T_0^*+U^*$ строго зростає при $s\to\infty$, $\xi^*(t_s)\in s_\varepsilon$. Таким чином, лише при додаткових обмеженнях, у даному випадку — при наявності асимптотичного розв'язку, рівність (17) дозволяє встановити еквівалентність між нестійкістю за Ляпуновим конфігурації (2) та її орбітальною нестійкістю.

Наслідок. *Лагранжева конфігурація* (2) *орбітально нестійка при виконанні нерівності*

$$27(m_1m_2+m_1m_3+m_2m_3) > (m_1+m_2+m_3)^2. \tag{19}$$

Доведення. Характеристичне рівняння, що відповідає рівнянням у варіаціях системи (14), можна звести до форми [1]

$$\lambda^2(\lambda^2+\omega^2)(\lambda^4+\omega^2\lambda^2+k\omega^4) = 0,$$
$$k = \frac{27}{4}(m_1m_2+m_1m_3+m_2m_3)(m_1+m_2+m_3)^{-2}.$$

Отже, якщо виконується умова (19), то характеристичне рівняння має корені з дійсними частинами, що не дорівнюють нулю. Остання обставина зумовлює існування розв'язків системи (14), що асимптотично притягуються до точки

$\xi = \eta = 0$ при $t \to \infty$ і $t \to -\infty$ (див. [3, с. 104]). Таким чином, умови теореми 1 виконуються.

3. Аналогічний підхід можна застосувати і до плоскої задачі n тіл, коли відповідні стаціонарні розв'язки мають вигляд [4–6]

$$r_{ij} = r_{0\,ij} = \text{const}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n. \tag{20}$$

Вважаючи, без обмеження загальності міркувань, що точки розташовані в площині (xy), а початок системи відліку збігається з центром мас m_i, використаємо аналогічно [6, с. 439] систему координат, що обертається навколо осі (Oz) з постійною кутовою швидкістю ω. В результаті відповідний лагранжіан набуває форми

$$L = T_2 + T_1 + T_0 + U, \tag{21}$$

$$T_2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i \dot{r}_i^2, \quad T_1 = \omega \sum_i m_i (x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i),$$

$$T_0 = \frac{1}{2}\omega^2 \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2), \quad U = G \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{|r_{ij}|},$$

Надалі у відповідності з вибором системи відліку, без обмеження загальності міркувань, можна вважати [7, 8], що

$$\sum_i m_i r_i^2 = M^{-1} \sum_{i<j} m_i m_j |r_{ij}|^2, \quad M = \sum_i m_i$$

і, як наслідок,

$$T_0 = \frac{1}{2}\omega^2 \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) = \frac{1}{2}\omega^2 \sum_i m_i r_i^2 = \frac{1}{2}\omega^2 M^{-1} \sum_{i<j} m_i m_j |r_{ij}|^2.$$

У зв'язку з застосуванням системи координат, що обертається, стаціонарні конфігурації (20) (періодичні розв'язки системи) переходять у множину критичних точок

$$\dot{r}_i = 0, \quad r_i = r_{0\,i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{22}$$

лагранжіана (21). Величини r_i в околі критичних точок (22) можна зобразити у вигляді

$$r_i = r_{0\,i} + u_i, \tag{23}$$

де $u_i = (\xi_i, \eta_i)^T$ — мале збурення вектора $r_{0\,i}$.

На підставі розв'язків (20) зобразимо величини $|r_{ij}|$ у формі $|r_{ij}| = r_{0\,ij} + x_{ij}$, $i < j$, де x_{ij} відповідають малим збуренням розв'язку (20). Тоді в околі точки $|r_{ij}| = r_{0\,ij}$ для функції $T_0 + U$ одержуємо вираз

$$T_0 + U = \frac{1}{2}\omega^2 M^{-1} \sum_{i<j} m_i m_j (r_{0ij} + x_{ij})^2 + G \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{(r_{0ij} + x_{ij})} =$$

$$= \sum_{i<j} \left(\frac{1}{2}\omega^2 M^{-1} r_{0ij}^2 + G r_{0ij}^{-1}\right) m_i m_j + \sum_{i<j} (\omega^2 M^{-1} r_{0ij} - G r_{0ij}^{-2}) m_i m_j x_{ij} +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{i<j} (\omega^2 M^{-1} + 2G r_{0ij}^{-3}) m_i m_j x_{ij}^2 + O\left(\sum_{i<j} \|x_{ij}\|^3\right). \tag{24}$$

Зокрема, як видно з (24), у випадку $n = 3$, коли $r_{0\,ij} = r_0 = \text{const}$, вибір ω^2 згідно з (8) забезпечує відсутність лінійних членів відносно x_{ij} у правій частині рівності (24). Це зумовлено специфікою задачі 3 тіл, для якої розмірність конфігураційного простору після відповідного перетворення може збігатися з розмірністю простору відстаней $|r_{ij}|$ [1].

Оскільки $r_i = r_{0i}$ — критична точка функції $T_0 + U$, з урахуванням (23) маємо

$$T_0 + U = (T_0 + U)|_{r=r_0} + T_0^* + U^*,$$

$$r = (r_1, \dots, r_n)^T, \qquad T_0^* = \frac{1}{2}\omega^2 \sum_i m_i(\xi_i^2 + \eta_i^2),$$

$$U^* = \frac{1}{2}\sum_{i,j} \frac{\partial^2 U}{\partial r_i \partial r_j}\Bigg|_{r=r_0} u_i u_j + O(\|u\|^3), \quad u = (u_1, \dots, u_n)^T,$$

і відповідні рівняння збуренного руху набувають вигляду

$$m_i \ddot{\xi}_i = \frac{\partial(T_0^* + U^*)}{\partial \xi_i} + 2\omega m_i \dot{\eta}_i, \tag{25}$$

$$m_i \ddot{\eta}_i = \frac{\partial(T_0^* + U^*)}{\partial \eta_i} - 2\omega m_i \dot{\xi}_i.$$

Теорема 2. *Якщо існує розв'язок рівнянь збуреного руху* (25), *що асимптотично прямує до точки* $\xi = \eta = 0$ *при* $t \to \infty$ $(t \to -\infty)$, *то плоска стаціонарна конфігурація* (20) *орбітально нестійка.*

Для доведення теореми 2 достатньо скористатися попередньою схемою. Той факт, що в даному випадку ліва частина рівності

$$\sum_{i<j} (\omega^2 M^{-1} r_{0ij} - G r_{0ij}^{-2}) m_i m_j x_{ij} +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{i<j} (\omega^2 M^{-1} + 2G r_{0ij}^{-3}) m_i m_j x_{ij}^2 + O\left(\sum_{i<j} \|x_{ij}\|^3\right) = T_0^* + U^*,$$

що є аналогом (17), лінійно залежить від x_{ij}, принципового значення не має, оскільки ключовою обставиною, як і у випадку теореми 1, є існування траєкторії $\gamma(t_s)$, на якій функція $T_0^* + U^*$ строго зростає, коли $t_s \in \{t_s\} \subset J^+$.

Наслідок. *Якщо характеристичне рівняння, яке відповідає рівнянням в варіаціях системи* (25), *містить корені з дійсними частинами, що не дорівнюють нулю, то плоска стаціонарна конфігурація* (20) *орбітально нестійка.*

1. *Парс Л. А.* Аналитическая динамика. – М.: Наука, 1971. – 636 с.
2. *Сосницкий С. П.* О грубой неустойчивости равновесия систем с гироскопическими силами // Вопросы устойчивости и управления навигационных систем. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1988. – С. 86–100.
3. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. – М.–Л.: ОНТИ, 1935. – 386 с.
4. *Уинтнер А.* Аналитические основы небесной механики. – М.: Наука, 1967. – 524 с.
5. *Соколов Ю. Д.* Особые траектории системы свободных материальных точек. – Киев: Изд-во АН УССР, 1951. – 126 с.
6. *Дубошин Г. Н.* Небесная механика. Аналитические и качественные методы. – М.: Наука, 1964. – 560 с.
7. *Уиттекер Е. Т.* Аналитическая динамика. – М.–Л.: Госнаучтехиздат, 1937. – 500 с.
8. *Арнольд В.И., Козлов В. В., Нейштадт А. И.* Математические аспекты классической и небесной механики // Итоги науки и техники. Совр. пробл. математики. Фундамент. направления. – М.: ВИНИТИ, 1985. – Т. 3. – 304 с.

Получено 21.07.95