УДК 517. 9

С. В. Переверзев, С. Г. Солодкий (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ОБ ОПТИМИЗАЦИИ ПРОЕКЦИОННО-ИТЕРАТИВНЫХ МЕТОДОВ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННЫХ ЗАДАЧ

We consider a new version of the projection-iterative method for the solution of operator equations of the first kind. We show that it is more economical in the sense of amount of used discrete information.

Розглянуто нову схему застосування проекційно–ітеративного методу до розв'язання операторних рівнянь I-го роду. Встановлено, що ця схема є більш економічною з точки зору обсягу дискретної інформації, яка використовується.

1. Проекционно-итеративные методы являются эффективным средством приближенного решения различных типов операторных уравнений. Они возникли на базе метода осреднения функциональных поправок, предложенного Ю. Д. Соколовым в 1957 г. [1], и развивались в дальнейшем его учениками и последователями — А. Ю. Лучкой [2], Н. С. Курпелем [3] и др.

Идея проекционно-итеративных методов состоит в сочетании метода последовательных приближений с тем или иным проекционным методом. Применительно к некорректно поставленным задачам, описываемым линейными операторными уравнениями I рода с компактными операторами, в качестве реализации этой идеи может быть рассмотрена комбинация проекционных методов с так называемой неявной итерационной схемой (см., например, [4, с. 24; 5]). Остановимся на этой комбинации подробнее.

В гильбертовом пространстве X со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и порождаемой им нормой $\|\cdot\|$ рассмотрим линейное операторное уравнение I рода

$$Ax = f, \tag{1}$$

где A — компактный оператор из X в X, а $f \in \mathrm{Range}(A)$, т. е. задача (1) разрешима.

Как правило, в приложениях вместо $f \in \mathrm{Range}(A)$ имеется некоторое его приближение $f_\delta \in X$, $\|f - f_\delta\| \leq \delta$, где δ — известное достаточно малое число. Поэтому наряду с исходным уравнением (1) мы вынуждены рассматривать „приближенное" уравнение

$$Ax = f_\delta. \tag{2}$$

При этом f_δ может уже не принадлежать $\mathrm{Range}(A)$ и задача (2) может, таким образом, быть неразрешимой. Но даже если $f_\delta \in \mathrm{Range}(A)$, то все равно решение „приближенного" уравнения (2) нельзя брать в качестве приближенного решения исходного уравнения (1) — это связано с отсутствием, в силу компактности A, непрерывной зависимости решений уравнений (1), (2) от правых частей. В таких условиях возможность восстановления решения уравнения (1) связана с применением к уравнению (2) некоторого регуляризатора. Одним из таких регуляризаторов и является неявная итерационная схема, при которой на ν-м шаге итерации приближенное решение x_ν уравнения (1) определяется из уравнения

$$\alpha x_\nu + A^* A x_\nu = \alpha x_{\nu-1} + A^* f_\delta, \quad \nu = 1, 2, \ldots, \quad x_0 = 0, \tag{3}$$

где A^* — оператор, сопряженный к A (т. е. $(Af, g) = (f, A^* g)$ для любых f, $g \in X$). Заметим, что в уравнении (3) постоянная α не обязательно мала и легко может быть выбрана так, чтобы решение этого уравнения являлось корректно поставленной задачей. При этом регуляризация достигается за счет многократного итерирования.

Из (3) следует

$$x_\nu = \sum_{j=0}^{\nu-1} [\alpha(\alpha I + A^*A)^{-1}]^j (\alpha I + A^*A)^{-1} A^* f_\delta, \tag{4}$$

где I — тождественный оператор. Если теперь, следуя [4, с. 25], мы рассмотрим функцию

$$g_\nu(\lambda) = g_{\nu,\alpha}(\lambda) = \sum_{j=0}^{\nu-1} [\alpha(\alpha+\lambda)^{-1}]^{j+1} = \frac{1}{\lambda}\left[1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha+\lambda}\right)^\nu\right],$$

то оператор под знаком суммы в (4) может быть записан в форме $g_\nu(A^*A)$, а для элемента x_ν мы получаем представление

$$x_\nu = g_\nu(A^*A)A^*f_\delta. \tag{5}$$

В дальнейшем нам потребуется следующая лемма.

Лемма 1 [4, с. 27]. *Для функции* $g_{\nu,\alpha}$ *справедливы неравенства*

$$g_{\nu,\alpha}(\lambda) \ge 0, \quad 0 \le 1 - \lambda g_{\nu,\alpha}(\lambda) \le (\alpha/\nu) g_{\nu,\alpha}(\lambda), \quad \lambda \in [0, \infty), \ \nu = 1, 2, \dots,$$

$$\sup_{0 \le \lambda < \infty} g_{\nu,\alpha}(\lambda) \le \nu/\alpha, \qquad \sup_{0 \le \lambda < \infty} \lambda^{1/2} g_{\nu,\alpha}(\lambda) \le (\nu/\alpha)^{1/2},$$

$$\sup_{0 \le \lambda < \infty} \lambda^p (1 - \lambda g_{\nu,\alpha}(\lambda)) \le (\alpha p)^p \nu^{-p}.$$

Заметим, что при использовании неявной итерационной схемы (3)–(5) приближенное решение некорректно поставленной задачи (1), (2) сводится к серии корректно поставленных задач (3). Однако найти решение каждой из этих задач возможно, вообще говоря, лишь приближенно, а это, в свою очередь, предполагает ту или иную дискретизацию уравнений (3). Традиционный подход к такой дискретизации связан с комбинированием (3) и проекционного метода Ритца – Галеркина.

Пусть $e_1, e_2, \dots, e_m, \dots$ — некоторый ортонормированный базис гильбертова пространства X, а

$$P_m g = \sum_{i=1}^{m} (g, e_i) e_i$$

— ортопроектор на линейную оболочку $\operatorname{span}\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ первых m элементов базиса. Обозначим через X^r, $r = 1, 2, \dots$, линейное подпространство гильбертова пространства X, снабженное нормой

$$\|g\|_r = \|g\|_{X^r} := \|g\| + \sum_{j=1}^{r} \|D_j g\|,$$

где D_j — некоторые линейные операторы, действующие из X^r в X, и для любых $m = 1, 2, \dots$

$$\|I - P_m\|_{X^r \to X} \le c_r m^{-r},$$

при этом постоянная c_r не зависит от m.

Как и в [6], положим

$$\mathcal{H}_\gamma^r := \{A: \|A\|_{X\to X^r} \le \gamma_1, \ \|A^*\|_{X\to X^r} \le \gamma_2, \ \|(D_j A^*)\|_{X\to X^r} \le \gamma_{j+2}\},$$
$$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{r+2}).$$

В [6] отмечается, что пространство X^r и класс $\mathcal{H}_\gamma^r$ являются обобщениями пространства r-раз дифференцируемых функций и класса интегральных операторов, ядра которых имеют суммируемые в квадрате смешанные частные производные до порядка r по каждой переменной.

Реализация идеи проекционно-итеративного метода применительно к уравнениям I рода (1), (2) состоит в том, что неявная итерационная схема применяется к уравнению $P_m A P_l x = P_m f_\delta$, т.е. на ν-м шаге итерации приближенное решение $x_{\nu,m,l}$ уравнения (1) определяется из уравнения с конечномерным оператором

$$\alpha x_{\nu,m,l} + P_l A^* P_m A P_l x_{\nu,m,l} = P_l A^* P_m f_\delta + \alpha x_{\nu-1,m,l}, \quad \nu = 1, 2, \ldots . \tag{6}$$

Используя введенную выше функцию $g_\nu(\lambda)$, мы можем представить $x_{\nu,m,l}$ в форме

$$x_{\nu,m,l} = g_\nu(P_l A^* P_m A P_l) P_l A^* P_m f_\delta. \tag{7}$$

Вопросы, связанные с точностью приближенного решения (1), числом итераций неявной итерационной схемы (6) и количеством используемых при этом значений скалярных произведений вида

$$(e_i, Ae_j) \quad (e_i, f_\delta) \tag{8}$$

традиционно рассматриваются для классов уравнений (1) с истокопредставимыми решениями.

Положим

$$M_{p,\rho}(A) = \{u: u = |A|^p v, \ \|v\| \le \rho\},$$

где $|A| = (A^*A)^{1/2}$. Известно, что если

$$f \in AM_{p,\rho}(A) = \{g: g = Au, \ u \in M_{p,\rho}(A)\},$$

то существует единственное решение уравнения (1), принадлежащее классу истокопредставимых элементов $M_{p,\rho}(A)$. Это решение допускает представление $A^\dagger f$, где $A^\dagger$ — обратный оператор в смысле Мура – Пенроуза по отношению к оператору A [7]. В дальнейшем мы будем рассматривать уравнения (1) с операторами $A \in \mathcal{H}_\gamma^r$ и свободными членами $f \in AM_{p,\rho}(A)$. При фиксированных r, p, γ, ρ класс таких уравнений будем обозначать через $\Psi_{\rho,\gamma}^{r,p}$.

2. Известно [7], что при фиксированных p и δ, располагая лишь уравнением (2), мы не можем гарантировать на классе $\Psi_{\rho,\gamma}^{r,p}$ восстановление решения $A^\dagger f$ с точностью выше чем $O(\delta^{p/(p+1)})$ по порядку. При этом указанный оптимальный порядок может быть достигнут в рамках неявной итерационной схемы (3) после $\nu = O(\delta^{-2/(p+1)})$ итераций. Однако если точное значение p не известно, то для достижения оптимального порядка точности $\delta^{p/(p+1)}$ момент остановки вычислительного процесса выбирается по принципу невязки [8]. Следуя [5], мы опишем этот принцип применительно к дискретизированному оператору $A_{\text{disc}} = P_m A P_l$. Пусть $d > 1$ и $0 < \theta < 1$. Если $\|P_m f_\delta\| \le d\delta$, то полагаем $\nu = 0$, т. е. в качестве приближенного решения уравнения (1) берем

$x_0 = 0$. В противном случае выбираем $\nu \le \nu_{\max} = (\gamma_2 c_r l^{-r})^{-2}$ так, чтобы для некоторого $\mu \in [\theta\nu, \nu]$ выполнялись условия

$$\| P_m f_\delta - A_{\text{disc}} x_{\nu m, l} \| \le d\delta, \tag{9}$$

$$\| P_m f_\delta - A_{\text{disc}} x_{\mu, m, l} \| \ge d\delta. \tag{10}$$

Таким образом, если итерационный процесс (6) остановить на первом $\nu = n$, для которого справедливо (9), то (10) автоматически выполняется для $\mu = n - 1$. Если же не найдется $\nu \le \nu_{\max}$, удовлетворяющего (10), то полагаем $\nu = \nu_{\max}$ или $\nu = [\nu_{\max}] + 1$, где $[s]$ означает целую часть s.

Следующая теорема позволяет оценить эффективность традиционной схемы реализации идеи проекционно-итеративного метода (6), (7) в случае неточного параметра p. Предположим, что о величине p нам известно лишь, что p может быть любым числом из интервала $(0, 1]$.

Теорема 1 [5]. *Пусть параметр* ν *выбран согласно принципу невязки* (9), (10). *Если уравнение* (1) *принадлежит некоторому классу* $\Psi^{r,p}_{\rho,\gamma}$, $0 < p \le 1$, *то*

$$\| A_f^{\uparrow} - x_{\nu, m, l} \| \le \kappa_p (\delta^{p/(p+1)} + m^{-pr} + l^{-pr}),$$

где κ_p *не зависит от* δ, ν, m, l.

Из теоремы 1 следует, что в рассматриваемой ситуации оптимальный порядок точности $\delta^{p/(p+1)}$ будет гарантирован, если для всех $p \in (0, 1]$ выполняется соотношение $l,\ m \ge c\delta^{-1/(r(p+1))}$. Это означает, что минимальные l и m, удовлетворяющие такому условию, имеют порядок $O(\delta^{-1/r})$.

Обозначим через $\operatorname{Card}(IP)$ число скалярных произведений вида (8), необходимых для построения оптимального по порядку точности приближенного решения. Тогда в силу изложенного выше для традиционной схемы (6), (7), при которой $A_{\text{disc}} = P_m A P_l$, имеем

$$\operatorname{Card}(IP) = ml + m \asymp \delta^{-2/r}. \tag{11}$$

3. Целью настоящей статьи является построение итерационной процедуры (3), использующей новую схему дискретизации, при которой в рассматриваемых условиях для достижения того же порядка точности требуется существенно меньший объем галеркинской информации (8).

Каждому оператору $A \in \mathcal{H}^r_\gamma$ поставим в соответствие оператор вида

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} (P_{2^k} - P_{2^{k-1}}) A P_{2^{n-3k/4}} + P_1 A P_{2^n}, \tag{12}$$

где под $P_{2^{n-3k/4}}$ будем понимать $P_{[2^{n-3k/4}]}$. В рамках предлагаемой схемы дискретизации в качестве приближенного решения уравнения (1) будем рассматривать элемент

$$x_{\nu, n} = g_\nu(A_n^* A_n) A_n^* f_\delta. \tag{13}$$

Заметим, что для схемы (12), (13) справедлива оценка

$$\operatorname{Card}(IP) \asymp 2^{5n/4}. \tag{14}$$

Далее через c будем обозначать, вообще говоря, различные положительные константы, зависящие только от параметров, входящих в определения класса $\Psi^{r,p}_{\rho,\gamma}$ и пространства X^r.

Приведем теперь вспомогательные результаты, необходимые в дальнейшем. Пусть $A, B \in \mathcal{H}_\gamma^r$. При любых $m = 1, 2, \ldots$ и $0 < p \leq 1$ справедливы оценки [5; 4, с. 93, 95]:

$$\| (I - P_m) | A |^p \|_{X \to X} \leq c \| A(I - P_m) \|_{X \to X}^p, \tag{15}$$

$$\| | A |^p - | B |^p \|_{X \to X} \leq c \sigma_p \| A - B \|_{X \to X}^p,$$

$$\sigma_p = \begin{cases} | \ln \| A - B \|_{X \to X} |, & p = 1, \\ 1, & p \neq 1. \end{cases} \tag{16}$$

Лемма 2. *Пусть* $A \in \mathcal{H}_\gamma^r$. *Тогда для* $0 < p \leq 1$ *имеем*

$$\| (P_{2^n} A - A_n) | A |^p \|_{X \to X} \leq c 2^{-rn(2p+1)/(p+1)}.$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что для $A \in \mathcal{H}_\gamma^r$ и $m = 1, 2, \ldots$ справедливы соотношения

$$\| (I - P_m) A \|_{X \to X} \leq \| I - P_m \|_{X^r \to X} \| A \|_{X \to X^r} \leq c_r \gamma_1 m^{-r},$$

$$\| A (I - P_m) \|_{X \to X^r} = \| (I - P_m) A^* \|_{X \to X} \leq c_r \gamma_2 m^{-r},$$

$$\| A (I - P_m) \|_{X \to X^r} \leq \| A (I - P_m) \|_{X \to X} + \sum_{i=1}^{r} \| D_j A (I - P_m) \|_{X \to X} \leq c_r \sum_{i=0}^{r} \gamma_{i+2} m^{-r}.$$

Откуда получаем

$$\| (I - P_k) A (I - P_m) \|_{X \to X} \leq \| I - P_k \|_{X^r \to X} \| A (I - P_m) \|_{X \to X^r} \leq$$

$$\leq c_r^2 \sum_{i=0}^{r} \gamma_{i+2} (km)^{-r}. \tag{17}$$

Поскольку в силу определения A_n (12) имеет место представление

$$P_{2^n} A - A_n = \sum_{k=1}^{n} (P_{2^k} - P_{2^{k-1}}) A (I - P_{2^{n-3k/4}}) + P_1 A (I - P_{2^n}), \tag{18}$$

при помощи (15) и (17) находим

$$\| (P_{2^n} A - A_n) | A |^p \|_{X \to X} \leq \sum_{k=1}^{n} \| (P_{2^k} - P_{2^{k-1}}) A (I - P_{2^{n-3k/4}}) \|_{X \to X} \times$$

$$\times \| A (I - P_{2^{n-3k/4}}) \|_{X \to X}^p + \| P_1 A (I - P_{2^n}) \|_{X \to X} \| A (I - P_{2^n}) \|_{X \to X}^p \leq$$

$$\leq c 2^{-(p+1)rn} \sum_{k=0}^{n} 2^{(3p-1)kr/4}.$$

Отсюда следует утверждение леммы.

***Следствие* 1.** *Пусть* $x_0 \in M_{p,\rho}(A)$ — *точное решение уравнения* (1) *из* $\Psi_{\rho,\gamma}^{r,p}$, $0 < p \leq 1$. *Тогда*

$$\| A_n x_0 - P_{2^n} f_\delta \| \leq \delta + c 2^{-rn(2p+1)/(p+1)}.$$

В самом деле, для $x_0 \in M_{p,\rho}(A)$ имеем $x_0 = | A |^p z$, $\| z \| \leq \rho$. Значит,

$$\| A_n x_0 - P_{2^n} f_\delta \| \leq \| A_n x_0 - P_{2^n} A x_0 \| + \| P_{2^n} (f - f_\delta) \| \leq$$

$$\leq \delta + \rho \| (P_{2^n} A - A_n) | A |^p \|_{X \to X} \leq \delta + c 2^{-rn(2p+1)/(p+1)}.$$

Лемма 3. *В условиях леммы 2 выполняется соотношение*

$$\| |A|^p - |A_n|^p \|_{X\to X} \le c\sigma_{p,n} 2^{-prn},$$

$$\sigma_{p,n} = \begin{cases} n, & p = 1, \\ 1, & p \ne 1. \end{cases}$$

Доказательство. Легко видеть, что

$$\|A - A_n\|_{X\to X} \le \|(I - P_{2^n})A\|_{X\to X} + \|P_{2^n}A - A_n\|_{X\to X} \le$$

$$\le c2^{-rn} + \|P_{2^n}A - A_n\|_{X\to X}. \tag{19}$$

Используя (17) и представление (18), находим

$$\|P_{2^n}A - A_n\|_{X\to X} \le c2^{-rn}. \tag{20}$$

Объединяя (19) и (20), имеем

$$\|A - A_n\|_{X\to X} \le c2^{-rn}.$$

Таким образом, с учетом оценки (16) получаем искомое неравенство.

Теорема 2. *Пусть* $2^{-rn} \asymp \delta$, $\nu_{\max} \asymp \delta^{-2}$, *а параметр* ν *выбран согласно принципу невязки. Тогда в рамках схемы* (12), (13) *на классе* $\Psi^{r,p}_{\rho,\gamma}$, $0 < p \le 1$, *реализуется оптимальный порядок точности* $\delta^{p/(p+1)}$.

Доказательство. Положим

$$R_{\nu,n} = g_\nu(A_n^* A_n)A_n^*, \qquad S_{\nu,n} = I - R_{\nu,n}A_n.$$

Тогда в силу леммы 1 справедливы оценки

$$\|R_{\nu,n}\|_{X\to X} \le c\nu^{1/2}, \qquad \|S_{\nu,n}\|_{X\to X} \le c, \tag{21}$$

$$\|I - A_n R_{\nu,n}\|_{X\to X} \le 1, \tag{22}$$

$$\|A_n S_{\nu,n}|A_n|^p\|_{X\to X} \le c\nu^{-(p+1)/2}, \quad p \in [0, 1]. \tag{23}$$

В силу (1) и (13) справедливо разложение

$$x_0 - x_{\nu,n} = R_{\nu,n}(A_n x_0 - P_{2^n} f_\delta) + S_{\nu,n}x_0,$$

где $x_0 \in M_{p,\rho}(A)$ — точное решение (1). Учитывая (21), следствие 1 и условия теоремы, получаем

$$\|x_0 - x_{\nu,n}\| \le \|S_{\nu,n}x_0\| + c\nu^{1/2}(\delta + c2^{-rn(2p+1)/(p+1)}) \le$$

$$\le c\nu^{1/2}\delta + c\delta^{p/(p+1)} + \|S_{\nu,n}x_0\|. \tag{24}$$

Следуя [5], рассмотрим элемент

$$A_n S_{\mu,n} x_0 = (P_{2^n} f_\delta - A_n x_{\mu,n}) + (I - A_n R_{\mu,n})(A_n x_0 - P_{2^n} f_\delta).$$

Учитывая тот факт, что функция $1 - \lambda g_\nu(\lambda) = (\alpha/(\alpha+\lambda))^\nu$ является не возрастающей по ν, а также, используя (10), (22) и следствие 1 для $\mu \in [\theta\nu, \nu]$, находим

$$\nu^{1/2}\delta \le (d-1)^{-1}(\nu^{1/2}\|A_n S_{\mu,n}x_0\| + c\delta^{p/(p+1)}). \tag{25}$$

С помощью (23), леммы 3 и соотношения $\mu^{-1} \le \theta/\nu$ получаем оценку

$$\nu^{1/2}\| A_n S_{\mu,n} x_0 \| \le \nu^{1/2}(\| A_n S_{\mu,n} |A_n|^p z \| + \| A_n S_{\mu,n}(|A|^p - |A_n|^p) z \|) \le$$

$$\le c\nu^{1/2}(\mu^{-(p+1)/2} + \mu^{-1/2}\sigma_{\mu n} 2^{-prn}) \le c(\nu^{-p/2} + \delta^{p/(p+1)}). \tag{26}$$

Вновь применяя (23), лемму 3, а также (21), находим

$$\| S_{\nu,n} x_0 \| \le c(\nu^{-p/2} + \delta^{p/(p+1)}). \tag{27}$$

Если $\nu \ge \delta^{-2/(p+1)}$, то утверждение теоремы следует из (24)–(27).

Предположим теперь, что $\nu < \beta = \delta^{-2/(p+1)}$. Повторяя рассуждения, приведенные в [5], получаем

$$\| S_{\nu,n} x_0 \|^2 \le c(\| S_{\beta,n} x_0 \|^2 + \beta \| A_n S_{\nu,n} x_0 \|^2). \tag{28}$$

Для элемента

$$A_n S_{\nu,n} x_0 = (P_{2^n} f_\delta - A_n x_{\nu,n}) + (I - A_n R_{\nu,n})(A_n x_0 - P_{2^n} f_\delta)$$

в силу (9), (22) и следствия 1 справедливо соотношение

$$\beta \| A_n S_{\nu,n} x_0 \|^2 \le \beta((d+1)\delta + c 2^{-rn(2p+1)/(p+1)})^2 \le c\delta^{2p/(p+1)}. \tag{29}$$

Из (27) следует оценка

$$\| S_{\beta,n} x_0 \|^2 \le c\delta^{2p/(p+1)}. \tag{30}$$

Объединяя (24), (28)–(30), для $\nu < \delta^{-2/(p+1)}$ имеем

$$\| x_0 - x_{\nu,n} \| \le c\delta\nu^{1/2} + c\delta^{p/(p+1)} \le c\delta^{p/(p+1)}.$$

Теорема доказана.

Следствие 2. *Для обеспечения при любом* $\rho \in (0, 1]$ *оптимального порядка точности на классе уравнений* $\Psi_{\rho,\gamma}^{r,p}$ *в рамках проекционно-итеративной схемы* (12, (13) *достаточно использовать значения скалярных произведений вида* (8), *общее число которых имеет порядок*

$$\mathrm{Card}\,(IP) \asymp \delta^{-5/(4r)}. \tag{31}$$

Приведенная в следствии 2 оценка непосредственно вытекает из (14) и теоремы 2.

Сравнение величин (11) и (31) показывает эффективность предлагаемого подхода к дискретизации неявной итерационной процедуры (3) решения уравнений (1). Так, в случае $r = 1$ и $\delta = 10^{-4}$ применение проекционно-итеративной схемы (12), (13) позволяет в $O(10^3)$ раз сэкономить количество используемой дискретной информации по сравнению с традиционным подходом.

1. *Соколов Ю. Д.* Метод осреднения функциональных поправок. – Киев: Наук. думка, 1968. – 336 с.
2. *Лучка А. Ю.* Проекционно-итеративные методы. – Киев: Наук. думка, 1993. – 287 с.
3. *Курпель Н. С.* Проекционно-итеративные методы решения операторных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1968. – 244 с.
4. *Вайникко Г. М., Веретенников А. Ю.* Итерационные процедуры в некоторых задачах. – М.: Наука, 1986. – 179 с.
5. *Plato R., Vainikko G.* On the regularization of projection methods for solving *Ill*-posed problems // Numer. Math. – 1990. – **57**. – P. 63–70.
6. *Pereverzev S. V.* Optimization of projection methods for solving *Ill*-posed problems // Computing. – 1995. – **55**, № 2 – P. 113–124.
7. *Nashed M. Z.* General inverses and applications. – New York: Acad. Press, 1976. – 316 p.
8. *Морозов В. А.* О выборе параметра при решении функциональных уравнений методом регуляризации // Докл. АН СССР. – 1967. – **175**, № 6. – С. 1225–1228.

Получено 29.04.96