УДК 519.624

І. Л. Макаров (Ін-т механіки НАН України, Київ)

ВАРІАЦІЙНІ СХЕМИ ДЛЯ ВЕКТОРНИХ ЗАДАЧ НА ВЛАСНІ ЗНАЧЕННЯ

We construct and study exact and truncated self-adjoint three-point variational schemes of any degree of accuracy for self-adjoint eigenvalue problems for systems of second-order ordinary differential equations.

Побудовано та досліджено самоспряжені триточкові точні та зрізані варіаційні схеми довільного порядку точності для самоспряженої задачі на власні значення у випадку систем звичайних диференціальних рівнянь другого порядку.

Математичне моделювання ряду задач фізики, механіки призводить до необхідності розв'язувати задачі на власні значення для систем звичайних диференціальних рівнянь другого порядку. Тому значний теоретичний та практичний інтерес викликає проблема розробки та дослідження відповідних ефективних чисельних методів для розв'язку задач зазначеного класу. Зокрема, актуальним є розповсюдження варіаційного підходу до побудови варіаційних точних та зрізаних схем довільного порядку точності для задач на власні значення на випадок векторних систем звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, що був запропонований для скалярної задачі Штурма – Ліувілля в [1].

У згаданій роботі показано, що триточкова зрізана варіаційна схема m-го рангу має $(4m+2)$-й порядок точності за власними значеннями і $(2m+1)$-й порядок точності за власними функціями у нормі відповідного енергетичного простору. У той же час підхід О. А. Самарського та О. М. Тихонова до побудови триточкових зрізаних схем [2] при однаковому об'ємі обчислень приводив до зрізаних схем, що мали $(2m+2)$-й порядок точності за власними значеннями і за власними функціями у чебишевській нормі. Слід також відзначити, що метод побудови триточкових зрізаних схем з роботи [2] для самоспряженої векторної задачі на власні значення у загальному випадку приводив до відповідної несамоспряженої матричної задачі на власні значення [3].

У даній роботі проведено побудову та дослідження швидкості збіжності триточкових зрізаних самоспряжених варіаційних схем у випадку самоспряженої задачі на власні значення для систем лінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку.

Розглянемо задачу на власні значення

$$(P(x)\bar{u}'(x))' - (Q(x) - \lambda R(x))\,\bar{u}(x) = \bar{0}, \quad x \in [0, 1], \tag{1}$$

$$\bar{u}(0) = \bar{u}(1) = \bar{0} \qquad \left(\bar{u}'(x) = \frac{d\bar{u}(x)}{dx}\right), \tag{2}$$

де $P(x) = [p_{ij}(x)]_{i,j=1}^{n}$, $Q(x) = [q_{ij}(x)]_{i,j=1}^{n}$, $R(x) = [r_{ij}(x)]_{i,j=1}^{n}$ — дісні n-вимірні самоспряжені матриці, тобто

$$P(x) = P^*(x), \qquad Q(x) = Q^*(x), \qquad R(x) = R^*(x), \tag{3}$$

що задовольняють такі умови при довільному $x \in [0, 1]$:

$$\begin{gathered} 0 < p_1(\bar{v},\bar{v}) \le (P(x)\bar{v},\bar{v}) \le p_2(\bar{v},\bar{v}), \quad 0 \le (Q(x)\bar{v},\bar{v}) \le q_1(\bar{v},\bar{v}), \\ 0 < r_1(\bar{v},\bar{v}) \le (R(x)\bar{v},\bar{v}) \le r_2(\bar{v},\bar{v}), \end{gathered} \tag{4}$$

де $p_j, q_j, r_j = \mathrm{const}$, $i = 1, 2$, $\bar{v}$ — довільний вектор простору $\mathbb{R}^n$, $\bar{v} = (v_1, v_2, \ldots$ $\ldots, v_n)$, а $(\cdot)$ — скалярний добуток векторів в $\mathbb{R}^n$.

Необхідно зазначити, що задача на власні значення (1), (2) при виконанні

© І. Л. МАКАРОВ, 1996

умов (3), (4) має необмежену послідовність дійсних позитивних власних значень і відповідну повну систему ортонормованих власних вектор-функцій $\bar{v}_k(x)$:

$$(\bar{v}_k, \bar{v}_m)_R = \int_0^1 (R(x)\bar{v}_k, \bar{v}_m)\, dx = \delta_{km}.$$

Можна показати, що задача (1), (2) еквівалентна варіаційній задачі: знайти пару $(\mu, \bar{v}(x))$, $\mu \in R$, $\bar{v}(x) \neq \bar{0}$, таку, що рівність

$$\int_0^1 [(P(x)\bar{u}', \bar{v}') + ((Q(x) - \mu R(x))\bar{u}, \bar{v})]\, dx = 0 \tag{5}$$

виконується для довільної вектор-функції $\bar{v}(x)$, компоненти якої належать простору $\mathring{W}_2^1(0,1)$.

Нехай $\overline{\omega}_h = \{x_i = ih,\ i = \overline{0, N},\ h = N^{-1}\}$ — рівномірна сітка на відрізку $[0, 1]$.

***Визначення* 1.** *Самоспряжену триточкову схему вигляду*

$$\begin{gathered} L^h(x,\mu)\,\bar{y}(x,\mu) + \mu\, B^h(x,\mu)\,\bar{y}(x,\mu) = 0, \quad x \in \omega_h, \\ \bar{y}(0) = \bar{y}(1) = \bar{0}, \end{gathered} \tag{6}$$

що може бути одержана з (5) *(за рахунок спеціального вибору пробних вектор-функцій* $\bar{v}(x)$*), де* $L^h(x,\mu)$, $B^h(x,\mu)$ *— триточкові оператори з* $(n \times n)$*-матричними коефіцієнтами, будемо називати самоспряженою триточковою варіаційною схемою для задачі* (1), (2), *якщо виконуються умови*:

а) елементи матричних коефіцієнтів операторів $L^h(x,\mu)$, $B^h(x,\mu)$ *являють собою функціонали від елементів матриць* $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ *на проміжку* $[x_{k-1}, x_{k+1}]$;

б) множини перших $M < n \times (N-1)$ *власних значень* $0 < \mu_1 \leq \ldots \leq \mu_M$ *і власних вектор-функцій* $\{\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_M\}$ *задачі* (6) *мають властивості*:

$$\lambda_k = \mu_k, \quad \bar{y}_k(x) = \bar{u}_k(x), \quad k = \overline{1, M}, \quad x \in \omega_h,$$

де $(\lambda_k, \bar{u}(x))$ *— розв'язки вихідної задачі* (1), (2), $M \neq M(N)$.

Далі будемо вважати, що елементи матриць $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ належать простору $C(0, 1)$.

Розглянемо на кожному з відрізків $[x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1, N}$, такі матричні задачі Коші:

$$\begin{gathered} \left(P(x)V_k^{i\prime}(x,\lambda)\right)' - (Q(x) - \lambda R(x))\, V_k^i(x,\lambda) = 0, \quad x \in [x_{i-1}, x_i], \\ V_1^i(x_{i-1},\lambda) = V_2^i(x_i,\lambda) = 0, \\ P(x)V_1^{i\prime}(x,\lambda)\big|_{x = x_{i-1}} = -P(x)V_2^{i\prime}(x,\lambda)\big|_{x = x_i} = E, \quad i = \overline{1, N}, \quad k = 1, 2, \end{gathered} \tag{7}$$

розв'язки яких $V_k^i(x,\lambda)$ будемо називати шаблонними матричними функціями; 0 — нульова матриця, E — одинична матриця.

Оскільки $V_k^i(x,\lambda)$ є матричними розв'язками рівняння (1), неважко показати, що при довільному $\lambda > 0$ при достатньо малому h виконуються співвідношення

$$\det\left(V_{1+p}^i(x_{i-p},\lambda)\right) \neq 0, \quad p = 0, 1, \quad i = \overline{1, N}, \quad x_{i-p} \in \omega_h. \tag{8}$$

У подальшому λ в позначенні шаблонних матричних функцій будемо, по можливості, опускати.

Враховуючи результати робіт [4, 5], можна довести таку лему.

Лема 1. *Нехай виконані умови* (3), (4). *Тоді при достатньо малому* h *шаблонні матричні функції* $V_k^i(x)$ *мають такі властивості*:

1) $V_k^i(x)$ *лінійно незалежні*, $k=1,2$;

2) $V_1^i(x_{i+1}) = V_2^{i^*}(x_i)$;

3) $$V_1^i(x_{i+1}) = V_2^{i^*}(x_i)\left\{E + \int\limits_{x_i}^{x}[Q(s)-\lambda R(s)]\,V_1^i\,ds\right\} + \\ + \left\{E + \int\limits_{x}^{x_{i+1}}[Q(s)-\lambda R(s)]\,V_2^{i^*}\,ds\right\}V_1^i(x);$$

4) $$P(x)\,V_1^{i'}(x)\,[V_1^i(x)]^{-1} = [V_1^{i^*}(x)]^{-1}\,V_1^{i'^*}(x)\,P(x), \quad x_i \le x \le x_{i+1};$$

5) $$[V_1^i(x_{i+1})]^{-1} = -[V_2^{i^*}(x_i)]^{-1}\int\limits_{x}^{x_{i+1}}\left[\frac{dV_2^{i^*}(x)}{dx}\,P(x)\,\frac{dV_1^i(x)}{dx} + \right. \\ \left. + V_2^{i^*}(x)\,(Q(x)-\lambda R(x))\,V_1^i(x)\right]dx\,[V_1^i(x_{i+1})]^{-1};$$

6) $$[V_2^{i-1}(x_{i-1})]^{-1} = -[V_1^{i^*-1}(x_i)]^{-1}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\left[\frac{dV_1^{i^*-1}(x)}{dx}\,P(x)\,\frac{dV_2^{i-1}(x)}{dx} + \right. \\ \left. + V_2^{i^*-1}(x)\,(Q(x)-\lambda R(x))\,V_2^{i-1}(x)\right]dx\,[V_2^{i-1}(x_{i-1})]^{-1};$$

7) $$[V_2^{i^*}(x_i)]^{-1}\left(E + \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} V_2^{i^*}(x)\,(Q(x)-\lambda R(x))\,dx\right) = \\ = [V_2^{i^*}(x_i)]^{-1}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\left[\frac{dV_2^{i^*}(x)}{dx}\,P(x)\,\frac{dV_2^i(x)}{dx} + \right. \\ \left. + V_2^{i^*}(x)\,(Q(x)-\lambda R(x))\,V_2^i(x)\right]dx\,[V_2^i(x_{i+1})]^{-1};$$

8) $$[V_1^{i^*-1}(x_i)]^{-1}\left(E + \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} V_1^{i^*-1}(x)\,(Q(x)-\lambda R(x))\,dx\right) = \\ = [V_1^{i^*-1}(x_i)]^{-1}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\left[\frac{dV_1^{i^*-1}(x)}{dx}\,P(x)\,\frac{dV_1^{i-1}(x)}{dx} + \right. \\ \left. + V_1^{i^*-1}(x)\,(Q(x)-\lambda R(x))\,V_1^{i-1}(x)\right]dx\,[V_1^{i-1}(x_i)]^{-1}.$$

Згідно з лемою 1 власну функцію $\bar{u}_k(x)$ задачі (1), (2), яка відповідає власному значенню λ_k, можна подати у вигляді

$$\bar{u}_k(x) = V_1^i(x,\lambda_k)[V_1^i(x_{i+1},\lambda_k)]^{-1}\bar{u}_{i+1} + V_2^i(x,\lambda_k)[V_2^i(x_i,\lambda_k)]^{-1}\bar{u}_i,$$
$$x_i \le x \le x_{i+1}, \quad i=\overline{0, N-1}, \quad k=\overline{1, M}, \quad \bar{u}_i = \bar{u}_k(x_i).$$

Введемо простір вектор-функцій $B_k(0,1)$ $(k \le M)$: $\bar{W}(x) \in B_k(0,1)$ тоді і тільки тоді, коли існують вектори $\bar{g}_i \in R^n$, $i=\overline{1, N-1}$, такі, що

$$\bar{W}(x) = \sum_{j=1}^{N}[F^j(x,\lambda_k)\bar{g}_j + H^j(x,\lambda_k)\bar{g}_{j-1}], \quad \bar{g}_0 = \bar{g}_N = \bar{0},$$

де матриці F^i, H^i поза відрізком $[x_i, x_{i+1}]$ є нульові матриці, а на відрізку $[x_i, x_{i+1}]$ визначаються таким чином:

$$F^i(x,\lambda_k) = V_1^i(x,\lambda_k)[V_1^i(x_{i+1},\lambda_k)]^{-1},$$
$$H^i(x,\lambda_k) = V_2^i(x,\lambda_k)[V_2^i(x_i,\lambda_k)]^{-1}.$$

Згідно з побудовою $B_k(0,1) \in [W_2^1(0,1)]^n$ та $\bar{u}_k(x) \in B_k(0,1)$, де $\bar{u}_k(x)$ — власна вектор-функція задачі (1), (2), що відповідає k-му власному значенню.

Лема 2. *Нехай виконані умови леми* 1, *тоді для задачі* (1), (2) *при достатньо малому* h *існує точна варіаційна триточкова самоспряжена схема.*

Доведення. Використаємо простір функцій $B_k(0,1)$ як простір припустимих функцій для варіаційної задачі (5), тобто покладемо $\bar{u}(x) = \bar{v}(x) \in B_k(0,1)$. Тоді, здійснюючи варіацію за параметрами $\bar{g}_i$, одержуємо за побудовою точну самоспряжену варіаційну триточкову схему

$$A_{ii-1}\bar{y}_{i-1} + A_{ii}\bar{y}_i + A_{ii+1}\bar{y}_{i+1} -$$
$$- \mu[B_{ii-1}\bar{y}_{i-1} + B_{ii}\bar{y}_i + B_{ii+1}\bar{y}_{i+1}] = \bar{0}, \quad \bar{y}_0 = \bar{y}_N = \bar{0}, \quad i=\overline{1, N-1}, \tag{9}$$

матричні коефіцієнти якої обчислюються за формулами

$$A_{ii} = \int_{x_{i-1}}^{x_i}\Bigg[[V_1^{i-1}(x_i)]^{-1^*}\frac{dV_1^{i-1^*}(s)}{ds}P(s)\frac{dV_1^{i-1}(s)}{ds}[V_1^{i-1}(x_i)]^{-1} +$$
$$+ [V_1^{i-1}(x_i)]^{-1^*}V_1^{i-1^*}(s)Q(s)V_1^{i-1}(s)[V_1^{i-1}(x_i)]^{-1^*}\Bigg]ds +$$
$$+ \int_{x_i}^{x_{i+1}}\Bigg[[V_2^i(x_i)]^{-1^*}\frac{dV_2^{i^*}(s)}{ds}P(s)\frac{dV_2^i(s)}{ds}[V_2^i(x_i)]^{-1} +$$
$$+ [V_2^i(x_i)]^{-1^*}V_2^{i^*}(s)Q(s)V_2^i(s)[V_2^i(x_i)]^{-1^*}\Bigg]ds,$$

$$B_{ii} = \int_{x_{i-1}}^{x_i}[V_1^{i-1}(x_i)]^{-1^*}V_1^{i-1^*}(s)R(s)V_1^{i-1}(s)[V_1^{i-1}(x_i)]^{-1^*}ds +$$
$$+ \int_{x_i}^{x_{i+1}}[V_2^i(x_i)]^{-1^*}V_2^{i^*}(s)R(s)V_2^i(s)[V_2^i(x_i)]^{-1^*}ds, \tag{10}$$

$$A_{i\,i+1} = \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \Bigg[[V_2^i(x_i)]^{-1^*} \frac{dV_2^{i^*}(s)}{ds} P(s) \frac{dV_2^i(s)}{ds} [V_2^i(x_i)]^{-1} +$$

$$+ [V_2^i(x_i)]^{-1^*} V_2^{i^*}(s) Q(s) V_2^i(s) [V_2^i(x_i)]^{-1} \Bigg] ds,$$

$$B_{i\,i+1} = \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} [V_2^i(x_i)]^{-1^*} V_2^{i^*}(s) R(s) V_2^i(s) [V_2^i(x_i)]^{-1^*} ds,$$

$$A_{i\,i-1} = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \Bigg[[V_1^{i-1}(x_i)]^{-1^*} \frac{dV_1^{i-1^*}(s)}{ds} P(s) \frac{dV_2^{i-1}(s)}{ds} [V_2^{i-1}(x_i)]^{-1} +$$

$$+ [V_1^{i-1}(x_i)]^{-1^*} V_1^{i-1^*}(s) Q(s) V_2^{i-1}(s) [V_2^{i-1}(x_i)]^{-1^*} \Bigg] ds,$$

$$B_{i\,i-1} = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} [V_1^{i-1}(x_i)]^{-1^*} V_1^{i-1^*}(s) R(s) V_2^{i-1}(s) [V_2^i(x_i)]^{-1^*} ds.$$

Лему 2 доведено.

Оскільки за винятком випадку постійних матриць $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ точні варіаційні схеми при практичних обчисленнях побудувати в явному вигляді не вдається, введемо зрізані варіаційні схеми m-го рангу, які для випадку задачі Штурма – Ліувілля запропоновані в [2].

Неважко перевірити, що розв'язок задач (7) задовольняє наступні матричні інтегральні рівняння:

$$V_1^i(x) = \int\limits_{x_i}^{x} P^{-1}(s)\, ds + \int\limits_{x_i}^{x} P^{-1}(s) \int\limits_{x_i}^{s} (Q(t) - \lambda R(t))\, V_1^i(t)\, dt\, ds,$$

$$V_2^i(x) = \int\limits_{x}^{x_{i+1}} P^{-1}(s)\, ds + \tag{11}$$

$$+ \int\limits_{x}^{x_{i+1}} P^{-1}(s) \int\limits_{s}^{x_{i+1}} (Q(t) - \lambda R(t))\, V_2^i(t)\, dt\, ds, \quad i = \overline{0, N-1}.$$

Розв'язок рівнянь (11) будемо шукати у вигляді матричних рядів

$$V_1^i(x) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k^i(x), \qquad V_2^i(x) = \sum_{k=0}^{\infty} G_k^i(x), \quad i = \overline{0, N-1}, \tag{12}$$

де матричні коефіцієнти $D_k^i(x)$, $G_k^i(x)$ задовольняють рекурентні співвідношення

$$D_k^i(x) = \int\limits_{x_i}^{x} P^{-1}(s) \int\limits_{x_i}^{s} (Q - \lambda R(t))\, D_{k-1}^i(t)\, dt\, ds,$$

$$G_k^i(x) = \int\limits_{x}^{x_{i+1}} P^{-1}(s) \int\limits_{s}^{x_{i+1}} (Q(t) - \lambda R(t))\, G_{k-1}^i(t)\, dt\, ds, \quad k = 0, 1, \tag{13}$$

$$D_0^i(x) = \int\limits_{x_i}^{x} P^{-1}(s)\,ds, \qquad G_0^i(x) = \int\limits_{x}^{x_{i+1}} P^{-1}(s)\,ds, \quad i = \overline{0, N-1}.$$

Доведемо за індукцією для довільного $x \in [x_i, x_{i+1}]$ оцінки

$$\begin{aligned} \|D_k^i(x)\| &\le \|P^{-1}\| H^k \frac{(x-x_i)^{2k+1}}{(2k+1)!}, \\ \|G_k^i(x)\| &\le \|P^{-1}\| H^k \frac{(x_{i+1}-x)^{2k+1}}{(2k+1)!}, \end{aligned} \tag{14}$$

де $\| \ \|$ — матрична норма в R^n, $H = \|P^{-1}\| [\|Q\| + \lambda \|R\|]$.

Розглянемо випадок матричних функцій $D_k^i(x)$. Для $k=0$ оцінка очевидна. Нехай вона вірна для $k=m$. Покажемо, що вона справедлива і для $k=m+1$. Дійсно,

$$\|D_{m+1}^i(x)\| = \left\| \int\limits_{x_i}^{x} P^{-1}(s) \int\limits_{x_i}^{s} (Q(t) - \lambda R(t))\, D_m^i(t)\, dt\, ds \right\| \le$$

$$\le \|P^{-1}\| [\|Q\| + \lambda \|R\|] \left(\|P^{-1}\| H^m \int\limits_{x_i}^{x} \int\limits_{x_i}^{s} \frac{(t-x_i)^{2m+1}}{(2m+1)!}\, dt\, ds \right) \le$$

$$\le \|P^{-1}\| H^{m+1} \frac{(x-x_i)^{2(m+1)+1}}{(2(m+1)+1)!}.$$

Аналогічно доводиться оцінка (14) для матричних функцій $G_k^i(x)$.

З оцінок (14) випливає, що ряди (12) є абсолютно збіжними.

Нехай

$$D^{(m)i}(x) = \sum_{j=0}^{m} D_j^i(x), \qquad G^{(m)i}(x) = \sum_{j=0}^{m} G_j^i(x), \tag{15}$$

де матричні функції $D_j^i(x)$, $G_j^i(x)$ визначаються за рекурентними співвідношеннями (13).

Лема 3. *При достатньо малому h справедливі оцінки*

$$\|W_{k,j}^m(x)\| \le C_1 h^{2m+3}, \qquad \left\| \frac{dW_{k,j}^m(x)}{dx} \right\| \le C_2 h^{2m+2}, \tag{16}$$

де $C_k = \text{const}$, $k = 1, 2$, $i = \overline{0, N-1}$;

$$W_{1,i}^m(x) = V_1^i(x) - D^{(m)i}(x), \qquad W_{2,i}^m(x) = V_2^i(x) - G^{(m)i}(x).$$

Доведення. Розглянемо випадок $k=1$. Маємо

$$\|W_{1,i}^m(x)\| \le \left\| \sum_{j=m+1}^{\infty} D_j^i(x) \right\| \le$$

$$\le \sum_{j=m+1}^{\infty} H^{j+1} \|P^{-1}\| \frac{(x-x_i)^{2j+1}}{(2j+1)!} \le C_2 h^{2m+3}.$$

Далі, враховуючи оцінки (14), одержуємо

$$\left\| \frac{dW_{k,j}^m(x)}{dx} \right\| = \left\| \sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{dD_j^i(x)}{dx} \right\| = \left\| \sum_{j=m+1}^{\infty} P^{-1}(x) \int_{x_i}^{x} (Q(s) - \lambda R(s))\, D_{j-1}^i(s)\, ds \right\| \le$$

$$\le \sum_{j=m+1}^{\infty} H^j \|P\|^{-1} \frac{(x-x_i)^{2j}}{(2j)!} \le C_2^{2m+2} h.$$

Аналогічно розглядається випадок $k = 2$. Лему доведено.

Введемо простір вектор-функцій $B_k^m(0,1)$, $k \le M$: $\bar{W}(x) \in B_k^m(0,1)$ тоді і тільки тоді, коли існують вектори $\bar{g}_i \in R^n$, $i = \overline{1, N-1}$, такі, що

$$\bar{W}(x) = \sum_{j=1}^{N} [F^{(m)j}(x, \lambda_k)\, \bar{g}_j + H^{(m)j}(x, \lambda_k)\, \bar{g}_{j-1}], \quad \bar{g}_0 = \bar{g}_N = \bar{0},$$

де матриці $F^{(m)i}$, $H^{(m)i}$ поза відрізком $[x_i, x_{i+1}]$ дорівнюють нульовим матрицям, а на відрізку $[x_i, x_{i+1}]$ визначаються таким чином:

$$F^{(m)i}(x) = D^{(m)i}(x)\,[D^{(m)i}(x_{i+1})]^{-1}, \qquad H^{(m)i}(x) = G^{(m)i}(x)\,[G^{(m)i}(x_i)]^{-1}.$$

При цьому матричні коефіцієнти $D^{(m)i}(x, \lambda_k)$, $G^{(m)i}(x, \lambda_k)$ обчислюються за формулами (15).

Визначення 2. *Триточкову самоспряжену варіаційну схему вигляду* (9), *для обчислення матричних коефіцієнтів якої за формулами* (10) *матриці* V_1^i, V_2^i *замінені на матриці* $D^{(m)i}$, $G^{(m)i}$, *будемо називати самоспряженою зрізаною варіаційною схемою* m*-го рангу.*

Використовуючи простір функцій $B_k^m(0,1)$ як простір пробних функцій для варіаційної задачі (5), одержуємо варіаційну самоспряжену зрізану схему m-го рангу.

Лема 4. *Нехай виконані умови леми* 1, *тоді у нормі простору* $[W_2^1(0,1)]^n$ *при достатньо малому* h *справедлива оцінка*

$$\|\bar{u}(x) - \bar{v}(x)\|_W^2 = \int_0^1 \left\{ \left(\frac{d\bar{u}}{dx} - \frac{d\bar{v}}{dx}, \frac{d\bar{u}}{dx} - \frac{d\bar{v}}{dx} \right) + (\bar{u} - \bar{v}, \bar{u} - \bar{v}) \right\} dx \le Ch^{4m+2}, \tag{17}$$

де $\bar{u}(x) \in B_k(0,1)$, $\bar{v}(x) \in B_k^m(0,1)$, $\bar{u}(x_i) = \bar{v}(x_i)$, $i = \overline{0, N}$, $C \ne C(h)$.

Доведення леми 4 випливає з оцінок (16).

Враховуючи теореми 6.1 [6, с. 267] і 6.2 [6, с. 271], а також результати роботи [7] і оцінки (16), (17), одержуємо доведення такого твердження.

Теорема 1. *Нехай виконані умови* (3), (4). *Тоді для похибки триточкової самоспряженої зрізаної варіаційної схеми* m*-го рангу для задачі* (1), (2) *при достатньо малому* h *справедливі оцінки*

$$0 < \lambda_k^m - \lambda_k \le C_1 h^{4m+2},$$

$$\|\bar{u}_k^m(x) - \bar{u}_k(x)\|_W \le C_2 h^{2m+1}, \qquad C_i \ne C_i(h), \quad i = 1, 2,$$

де $(\lambda_k, \bar{u}_k(x))$ *— точний розв'язок задачі* (1), (2), *а* $(\lambda_k^m, \bar{u}_k^m(x))$ *— розв'язок зрізаної варіаційної схеми* m*-го рангу.*

За побудовою точна і зрізана варіаційні схеми m-го рангу $(m > 0)$ є нелінійними відносно λ. У зв'язку з цим вводяться самоспряжені лінеаризовані зрізані варіаційні схеми m-го рангу [2].

Визначення 3. *Зрізану варіаційну самоспряжену схему m-го рангу, для обчислення матричних коефіцієнтів якої за формулами* (10) *використовується відповідне власне значення, знайдене за зрізаною варіаційною схемою $(m-1)$-го рангу, будемо називати лінеаризованою самоспряженою зрізаною варіаційною схемою m-го рангу.*

Лема 5. *Нехай виконані умови леми* 1. *Тоді у нормі простору $[W_2^1(0,1)]^n$ при достатньо малому h справедлива оцінка*

$$\|\vec{u}(x,\lambda_k)-\bar{v}(x,\lambda_k^{m-1})\|_W^2 =$$

$$= \int_0^1 \left\{\left(\frac{d\bar{u}}{dx}-\frac{d\bar{v}}{dx},\frac{d\bar{u}}{dx}-\frac{d\bar{v}}{dx}\right)+(\bar{u}-\bar{v},\bar{u}-\bar{v})\right\}dx \le Ch^{4m+2}, \tag{18}$$

де $\bar{u}(x)\in B_k(0,1)$, $\bar{v}(x)\in \hat{B}_k^m(0,1)$, $\bar{u}(x_i)=\bar{v}(x_i)$, $i=\overline{0,N}$, $C\ne C(h)$, *а простір* $\hat{B}_k^m(0,1)$ *будується так само, як простір* $B_k^m(0,1)$, *з заміною точного власного значення вихідної задачі* λ_k *на відповідне власне значення* λ_k^{m-1}, *знайдене за зрізаною схемою* $(m-1)$*-го рангу.*

Доведення леми 5 випливає з оцінок (16).

Запропонований метод лінеаризації не знижує порядок точності зрізаної варіаційної схеми, про що стверджує наступна теорема.

Теорема 2. *Нехай виконані умови* (3), (4). *Тоді для похибки триточкової самоспряженої зрізаної лінеаризованої варіаційної схеми m-го рангу для задачі* (1), (2) *при достатньо малому h справедливі оцінки*

$$0 < \tilde{\lambda}_k^m-\lambda_k \le \tilde{C}_1 h^{4m+2},$$

$$\|\tilde{\bar{u}}_k^m(x)-\bar{u}_k(x)\|_W \le \tilde{C}_2 h^{2m+1}, \quad \tilde{C}_i\ne\tilde{C}_i(h), \quad i=1,2,$$

де $(\lambda_k,\bar{u}_k(x))$ *— розв'язок задачі* (1), (2), *а* $(\tilde{\lambda}_k^m,\tilde{\bar{u}}_k^m(x))$ *— розв'язок лінеаризованої зрізаної схеми m-го рангу.*

Доведення теореми 2 аналогічне доведенню теореми 1 з урахуванням оцінок (18).

Робота виконана при підтримці Фонду фундаментальних досліджень Державного комітету України з питань науки та технологій.

1. *Макаров И. Л.* Вариационно-разностные схемы высокого порядка точности для задачи Штурма–Лиувилля // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1987. – № 2. – С. 30–32.
2. *Приказчиков В. Г.* Однородные разностные схемы и схемы высокого порядка точности для задачи Штурма–Лиувилля // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1969. – **9**, № 2. – С. 315–336.
3. *Макаров И. Л.* Точные и усеченные разностные схемы для векторной задачи Штурма–Лиувилля // Вычисл. и прикл. математика. – 1983. – Вып. 49. – С. 72–84.
4. *Макаров В. Л., Макаров И. Л., Приказчиков В. Г.* Точные разностные схемы любого порядка точности для систем дифференциальных уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения. – 1979. – **15**, № 7. – С. 1194–1205.
5. *Макаров И. Л.* Самосопряженные разностные схемы любого порядка точности для векторных краевых задач второго порядка // Использование математических методов и ЭВМ в системах управления и проектирования. – Киев: Ин-т кибернетики АН Украины, 1991. – С. 19–29.
6. *Стренг Г., Фикс Дж.* Теория метода конечных элементов. – М.: Мир, 1977. – 349 с.
7. *Mertins U.* Zur Konvergenz des Rayleigh–Ritz–Verfahrens bei Eigenwertaufgaben // Numer. Math. – 1991. – **59**. – P. 667–682.

Одержано 05.06.95