УДК 517. 948

М. Л. Горбачук, Р. Я. Якимів (Ін-т математики НАН України, Київ)

ОЦІНКА ПОХИБКИ НАБЛИЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ОПЕРАТОРНОГО РІВНЯННЯ МЕТОДОМ МОМЕНТІВ*

For an equation $Au=f$, where A is a closed densely defined operator in a Hilbert space H, $f \in H$, we estimate the deviation of its approximated solution obtained by the moment method from the exact solution. All presented theorems are of direct and inverse character. The paper refers to direct methods of mathematical physics, the development of which was promoted by Yu. D. Sokolov, the well-known Ukrainian mathematician and mechanic, great humanitarian and righteous man. We dedicate this paper to his blessed memory.

Для операторного рівняння $Au=f$, де A — щільно заданий замкнений оператор у гільбертовому просторі H, $f \in H$, встановлюються оцінки відхилення наближеного методом моментів розв'язку від його точного розв'язку. Наведені теореми носять прямий і обернений характер. Результати пов'язані з прямими методами математичної фізики, розвиткові яких всіляко сприяв Ю. Д. Соколов, відомий український математик і механік, великий гуманіст і праведник. Світлій його пам'яті й присвячується ця стаття.

Нехай H — сепарабельний гільбертів простір над полем комплексних чисел, $(\cdot, \cdot)$ та $\|\cdot\|$ — скалярний добуток та норма в ньому. Розглянемо рівняння

$$Au = f, \tag{1}$$

де $f \in H$, A — щільно заданий замкнений оператор в H, що задовольняє умови:

1) існує обернений до A оператор A^{-1}, визначений на всьому H;

2) для деякого оператора K в H оператор A є K-додатно визначений у розумінні [1, 2], тобто $\mathcal{D}(K) \supseteq \mathcal{D}(A)$ ($\mathcal{D}(\cdot)$ — область визначення оператора) і

i) $\exists\, \gamma > 0,\ \forall\, u \in \mathcal{D}(A)\quad (Au, Ku) \geq \gamma^2 \|u\|^2$;

ii) $\exists\, \beta > 0,\ \forall\, u \in \mathcal{D}(A)\ \|Ku\|^2 \leq \beta^2 (Au, Ku)$;

iii) оператор K допускає замикання і $\overline{K\mathcal{D}(A)} = H$.

На множині $\mathcal{D}(A)$ задамо білінійну форму

$$(u, v)_+ = (Au, Kv). \tag{2}$$

Завдяки умові i) $(u, v)_+$ має всі властивості скалярного добутку. Позначимо через $\|\cdot\|_+$ норму, породжену цим скалярним добутком, а через H_+ — поповнення $\mathcal{D}(A)$ відносно $\|\cdot\|_+$. Властивість i) також зумовлює нерівність

$$\|u\| \leq \frac{1}{\gamma} \|u\|_+.$$

З ii) випливає, що лінійний оператор K неперервно відображає H_+ в H. Оскільки за умовою він допускає замикання в H, норми $\|\cdot\|_+$ та $\|\cdot\|$ узгоджені, тобто фундаментальність послідовності в H_+ і її прямування до нуля в H обумовлюють прямування до нуля цієї послідовності в просторі H_+. Отже, простір H_+ щільно й неперервно вкладається в H. Нехай H_- — простір з негативною нормою, побудований за простором з позитивною нормою H_+ щодо H [3]. Враховуючи, що оператор K діє неперервно з H_+ в H, приходимо до висновку, що оператор K^+, визначений формулою

$$(Ku, v) = (u, K^+ v), \quad u \in H_+, \quad v \in H,$$

---

* Робота частково підтримана INTAS, проект 93–02449.

неперервний з H в H_- і є продовженням оператора K^*, спряженого до K в H, тобто

$$K^+ f = K^* f, \quad f \in \mathcal{D}(K^*).$$

Форма (2) допускає замкнене додатно визначене розширення на H_+, а тому [4] існує самоспряжений додатно визначений оператор A_K в H такий, що

$$\mathcal{D}(A_K^{1/2}) = H_+, \quad (u, v)_+ = (A_K^{1/2} u, A_K^{1/2} v).$$

Покладемо

$$\mathcal{D}' = A^{-1}(\mathcal{D}(K^*))$$

і визначимо оператор A'_K як $A'_K f = K^* A f$, $\mathcal{D}(A'_K) = \mathcal{D}'$.

Твердження 1. *Множина $\mathcal{D}'$ щільна в H, оператор A'_K додатно визначений, область його значень $\mathcal{R}(A'_K)$ щільна в H і $\overline{A'_K} = A_K$.*

Доведення. Щільність множини $\mathcal{D}'$ випливає з властивості 1 і того факту, що оператор K допускає замикання в H. Припустимо, що $\overline{\mathcal{R}(A'_K)} \neq H$. Тоді існує вектор $g \in H$, $g \neq 0$, такий, що

$$(K^* A f, g) = 0, \quad f \in \mathcal{D}'.$$

Останнє рівносильне співвідношенням

$$g \in \mathcal{D}(A^* K), \quad A^* K g = 0.$$

Внаслідок властивостей 1) та і) $g = 0$, що суперечить припущенню. Оскільки $A'_K \subsetneq A_K$, то $\overline{A'_K} = A_K$.

Твердження 2. *Вектор $u \in \mathcal{D}(A)$ є розв'язком рівняння* (1) *тоді і тільки тоді, коли u — розв'язок рівняння*

$$K^+ A u = K^+ f. \tag{3}$$

Доведення. Те, що розв'язок рівняння (1) є розв'язком (3), очевидне. Нехай тепер u — розв'язок рівняння (3). Домножуючи скалярно рівність (3) на вектор $v \in \mathcal{D}(A)$, дістаємо

$$(K^+ A u, v) = (K^+ f, v),$$

звідки

$$(Au - f, Kv) = 0$$

для будь-якого $v \in \mathcal{D}(A)$. На підставі iii) u — розв'язок рівняння (1).

Так само, як це зроблено в [5] у випадку $K = I$, можна довести, що для рівняння (3) виконується принцип Діріхле. Цей принцип полягає в тому, що знаходження розв'язку цього рівняння еквівалентне знаходженню елемента $u \in \mathcal{D}(A)$, на якому функціонал

$$F(v) = (Av, Kv) - 2\Re(f, Kv), \tag{4}$$

заданий на множині $\mathcal{D}(A)$, досягає свого мінімуму. Цей мінімум не завжди досягається на $\mathcal{D}(A)$. Оскільки при фіксованому $f \in H$ (Kv, f) — лінійний неперервний функціонал над H_+, існує елемент $u \in H_+$ такий, що

$$(Kv, f) = (v, u)_+.$$

Тому $F(v)$ можна подати у вигляді

$$F(v) = \|v-u\|_+^2 - \|u\|_+^2. \tag{5}$$

Рівність (5) показує, що мінімум функціонала $F(v)$, визначеного на H_+, досягається на елементі $u \in H_+$. Цей вектор u назвемо узагальненим розв'язком рівняння (1).

Нехай $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — система лінійно незалежних векторів з $\mathcal{D}(A)$, u_n — вектор, на якому функціонал (4), розглядуваний на множині $H_n =$ л. о. $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, досягає мінімуму. Такий елемент завжди існує. Він називається наближеним методом моментів відносно базисної системи $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ розв'язком рівняння (1). Зауважимо, що коли оператор A самоспряжений і додатно визначений, а $K = I$, метод моментів стає методом Рітца. Якщо ж A $\left(\overline{\mathcal{D}(A)} = H\right)$ замкнений і задовольняє умову 1, а $K = A$, то приходимо до наближеного методу найменших квадратів. За умови повноти в H_+ системи $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ послідовність u_n збігається [1, 2] до узагальненого розв'язку u рівняння (1) в просторі H_+, а тому й у H. Така збіжність, як показує наступна теорема, може бути як завгодно повільною.

Теорема 1. *Припустимо, що замкнений щільно заданий в H оператор A задовольняє умови 1 та 2, а B — самоспряжений додатно визначений оператор, спектр якого дискретний, є спорідненим з A_K (тобто $\mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(A_K)$). Тоді для будь-якої монотонно незростаючої послідовності $\alpha_n \to 0$, $n \to \infty$, існує вектор $f \in H$ такий, що для узагальненого розв'язку u рівняння* (1) *та його наближення u_n методом моментів відносно базисної системи $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ всіх власних векторів оператора B виконується нерівність*

$$\|u_n - u\| \geq \alpha_n.$$

Доведення. Покажемо спочатку, що коли $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортонормований базис в H і α_n — числова послідовність, яка задовольняє умови теореми, тоді існує вектор $\varphi \in H$ такий, що

$$\left\|\varphi - \sum_{k=1}^{n} (\varphi, \varphi_k)\varphi_k\right\| = \alpha_n.$$

Дійсно, покладемо $\beta_1 = 0$, $\beta_i^2 = \alpha_{i-1}^2 - \alpha_i^2$. Тоді ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \varphi_i$ збігається в H до деякого елемента φ і є його рядом Фур'є $(\beta_i = (\varphi, \varphi_i))$. Рівність

$$\left\|\varphi - \sum_{k=1}^{n} (\varphi, \varphi_k)\varphi_k\right\|^2 = \alpha_n^2$$

доводить сформульоване твердження.

З нерівності Гайнца [4] випливає $\mathcal{D}\left(A_K^{1/2}\right) = \mathcal{D}(B^{1/2})$. У просторі H_+ введемо нову норму $\|u\|_1 = \|B^{1/2}u\|$. Оскільки оператори $A_K^{-1/2}B^{1/2}$, $B^{1/2}A_K^{-1/2}$, $B^{-1/2}A_K^{1/2}$, $A_K^{1/2}B^{-1/2}$ обмежені в H, норми $\|\cdot\|_1$ та $\|\cdot\|_+$ еквівалентні, тобто існують сталі $c_1, c_2 \in (0, \infty)$ такі, що

$$c_1\|u\|_1 \leq \|u\|_+ \leq c_2\|u\|_1. \tag{6}$$

Тоді маємо

$$\| u - u_n \|_+ \geq c_1 \| u - u_n \|_1 = c_1 \| B^{1/2} u - B^{1/2} u_n \| \geq$$

$$\geq c_1 \inf_{\alpha_k} \left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k - B^{1/2} u \right\| = c_1 \left\| B^{1/2} u - \sum_{k=1}^{n} \left(B^{1/2} u, e_k \right) e_k \right\|.$$

Доведене вище твердження зумовлює внаслідок рівності $B^{1/2} H_+ = H$ існування вектора $u \in H_+$, для якого

$$\left\| B^{1/2} u - \sum_{k=1}^{n} \left(B^{1/2} u, e_k \right) e_k \right\| = \alpha_n ,$$

а це означає, що

$$\| u - u_n \|_+ \geq c_1 \alpha_n .$$

Теорему доведено.

В подальшому під u_n розуміємо наближений методом моментів відносно базисної системи $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ власних векторів оператора B розв'язок рівняння (1).

Постає питання, які властивості повинен мати узагальнений розв'язок u рівняння (1) для того, щоб відхилення $u - u_n$ прямувало до нуля досить швидко. Розглядові цього питання в різноманітних конкретних випадках (коли A реалізується звичайним диференціальним або інтегро-диференціальним виразом, виразом з частинними похідними, тощо) присвячена ціла низка робіт (їх детальний огляд див. у [6]). Що стосується загальної операторної постановки, для методу Рітца $(K = I)$ це питання розглядалося в [7–9]. А саме: було встановлено, що коли $f - A u_n \in \mathcal{D}(B^r)$, $r > 0$, тоді

$$\| u - u_n \| \leq \lambda_{n+1}^{-(r+1)} \| A B^{-1} \| \| B^r (f - A u_n) \|,$$

де λ_n — власні числа оператора B, розташовані в порядку зростання.

Лема 1. *Нехай оператор B задовольняє умови теореми* 1, *а узагальнений розв'язок u рівняння* (1) *належить до $\mathcal{D}(B^m)$, $m > 0$. Тоді*

$$\| u - u_n \|_+ = o\left(\frac{1}{\lambda_n^{m-1/2}} \right).$$

Доведення. Внаслідок (5) елемент u_n є найкращим наближенням в метриці простору H_+ узагальненого розв'язку u рівняння (1) векторами вигляду $\sum_{k=1}^{n} a_k e_k$. Тому, враховуючи (6), маємо

$$\| u - u_n \|_+ \leq \| u - P_n u \|_+ \leq c_2 \| B^{1/2} (u - P_n u) \| =$$

$$= c_2 \| B^{1/2} B^{-m} (I - P_n) B^m u \| \leq \frac{1}{\lambda_{n+1}^{m-1/2}} \| (I - P_n u) B^m u \|,$$

де P_n — ортопроектор з H на $H_n =$ л. о. $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Остання нерівність і той факт, що $\| (I - P_n) B^m u \| \to 0$, $n \to \infty$, завершують доведення леми.

Зазначимо, що у випадку $m = 1$ ця лема міститься в [5].

Оцінки, що фігурують вище, стосуються степеневого порядку прямування відхилення $u - u_n$ до нуля, якщо послідовність власних чисел λ_n оператора B має степеневий порядок зростання, що найчастіше трапляється в конкретних ситуаціях. Щоб вийти за межі степеневого спадання, розглянемо деякі простори [10].

Для заданої монотонно неспадної послідовності додатних чисел $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$, $m_0 = 1$, покладемо

$$C_{\{m_n\}}(B) = \bigcup_{\alpha > 0} C_\alpha \langle m_n \rangle (B),$$

$$C_{(m_n)}(B) = \bigcap_{\alpha > 0} C_\alpha \langle m_n \rangle (B),$$

де

$$C_\alpha \langle m_n \rangle (B) = \left\{ f \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}(B^n) \mid \exists\, c > 0: \left\| B^k f \right\| \le c \alpha^k m_k,\ k = 0, 1, \ldots \right\}$$

— банахів простір з нормою

$$\| f \|_{C_\alpha \langle m_n \rangle (B)} = \sup_{n = 0, 1, \ldots} \frac{\left\| B^n f \right\|}{m_n \alpha^n}.$$

На множинах $C_{\{m_n\}}(B)$ та $C_{(m_n)}(B)$ введемо топології відповідно індуктивної та проективної границь просторів $C_\alpha \langle m_n \rangle (B)$:

$$C_{\{m_n\}}(B) = \operatorname*{ind\,lim}_{\alpha \to \infty} C_\alpha \langle m_n \rangle (B),$$

$$C_{(m_n)}(B) = \operatorname*{proj\,lim}_{\alpha \to 0} C_\alpha \langle m_n \rangle (B).$$

У частинних випадках, коли $m_n = n!$ та $m_n \equiv 1$, одержуємо відомі простори $C_{\{n!\}}(B)$, $C_{(n!)}(B)$, $C_{\{1\}}(B)$ аналітичних, цілих та цілих експоненціального типу векторів оператора B. Простір $C_{(\infty)}(B)$ розуміється як $\bigcap_{n > 0} \mathcal{D}(B^n)$ з топологією проективної границі банахових просторів $H^n = \mathcal{D}(B^n)$ щодо норми графіка B^n. Він називається простором нескінченно диференційовних векторів оператора B. Якщо B — оператор диференціювання d / dx в просторі $H = L_2(a, b)$, $\mathcal{D}(B) = W_1^1(a, b)$ — соболевський простір, то $C_{\{n!\}}(B)$, $C_{(n!)}(B)$ та $C_{\{1\}}(B)$ збігаються з просторами аналітичних на $[a, b]$ цілих та цілих експоненціального типу функцій. Простори $C_{\{n^{\alpha\beta}\}}\left(\frac{d}{dx}\right)$ та $C_{(n^{\alpha\beta})}\left(\frac{d}{dx}\right)$, $\beta > 1$, відомі як класи Жевре, $C_{(\infty)}\left(\frac{d}{dx}\right)$ — простір нескінченно диференційовних на $[a, b]$ функцій.

Справедливі такі теореми.

Теорема 2. *Нехай оператори A і B, вектори u й u_n такі самі, як і в теоремі 1. Тоді*

$$u \in C_{\{m_n\}}(B) \Leftrightarrow \exists\, \alpha > 0,\ \exists\, c > 0: \| u - u_n \|_+ \le \frac{c}{\rho(\alpha \lambda_n)},$$

$$u \in C_{(m_n)}(B) \Leftrightarrow \forall\, \alpha > 0,\ \exists\, c = c(\alpha): \| u - u_n \|_+ \le \frac{c}{\rho(\alpha \lambda_n)},$$

де

$$\rho(\lambda) = \sup_n \frac{\lambda^n}{m_n}, \quad \lambda > 0,$$

λ_n — *власні числа оператора* B. *Якщо* $u \in C_{\{m_n\}}(B)$ *або* $u \in C_{(m_n)}(B)$, *то* $u - u_n \to 0$ *в топології цих просторів.*

***Теорема* 3.** *Нехай оператори* A, B *та вектори* u, u_n *задовольняють умови теореми* 1. *Тоді виконуються наступні співвідношення еквівалентності:*

$$u \in C_{(\infty)}(B) \Leftrightarrow \forall\, k \in \mathbb{N} \quad \| u - u_n \| = o\left(\frac{1}{\lambda_n^k}\right).$$

Якщо $u \in C_{(\infty)}(B)$, *то* $u - u_n \to 0$ *в топології простору* $C_{(\infty)}(B)$.

Доведення теорем 2 і 3 випливають з того факту, що u_n є найкращим наближенням u в метриці простору H_+ векторами з H_n, і теорем 5 та відповідно 6 з [10], якщо в них покласти

$$\mathcal{X} = H, \quad \mathcal{B} = H_+, \quad A = B, \quad \mathcal{E}_n^{\mathcal{B}}(u) = \| u - u_n \|_+.$$

Зауважимо, що скрізь у теоремах 2, 3 величину $\| u - u_n \|_+$ можна замінити на $\| u - u_n \|$.

Якщо в теоремі 2 взяти $m_n = n^{n\beta}$, $\beta \ge 0$, то неважко перевірити, що в цьому випадку $\rho(\lambda) \sim e^{\lambda^{1/\beta}}$, а тому маємо таке твердження.

***Наслідок* 1.** *За умов теореми* 2

$$u \in C_{\{n^n\beta\}}(B) \Leftrightarrow \exists\, \alpha > 0, \ \exists\, c > 0 : \| u - u_n \|_+ \le c e^{-\alpha \lambda_n^{1/\beta}},$$

$$u \in C_{(n^n\beta)}(B) \Leftrightarrow \forall\, \alpha > 0, \ \exists\, c > 0 : \| u - u_n \|_+ \le c e^{-\alpha \lambda_n^{1/\beta}}.$$

Зокрема, якщо u — аналітичний вектор оператора B, то

$$\| u - u_n \|_+ = o(e^{-\alpha \lambda_n}),$$

де α — деяка додатна стала.

З наведених теорем також випливає, що швидкість наближення розв'язку u рівняння (1) методом моментів, побудованим відносно базисної системи власних векторів спорідненого з A_K оператора B, залежить лише від порядку гладкості u щодо оператора B. Тому в конкретних задачах оцінку наближення можна точно виписати, якщо відома гладкість u щодо оператора B.

Приклад. Нехай

$$H = L_2(0, \pi), \quad A = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x),$$

де $q(x) \ge 0$ — неперервна на $[0, \pi]$ функція,

$$\mathcal{D}(A) = \{ v(x) \in W_2^2[0, \pi] : v(0) = v(\pi) = 0 \}, \quad K = I.$$

Відомо, що A — додатно визначений самоспряжений оператор в H з дискретним спектром. За B візьмемо оператор

$$B = -\frac{d^2}{dx^2}, \quad \mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(A).$$

Оператор B також додатно визначений і самоспряжений в H. Його спектр дискретний, власні значення $\lambda_n = n^2$, $\sqrt{2/\pi}\, \sin nx$ — відповідний ортонормований базис із власних функцій оператора B.

Якщо функція $q(x)$ нескінченно диференційовна на $[0, \pi]$ і задовольняє умови

$$q^{(2k-1)}(0) = q^{(2k-1)}(\pi) = 0, \quad k \in \mathbb{N},$$

то неважко довести, що $C_{(\infty)}(B) = C_{(\infty)}(A)$. Тоді з теореми 3 випливає, що умови нескінченної диференційовності $f(x)$ на $[0, \pi]$ і $f^{(2k)}(0) = f^{(2k)}(\pi) = 0$, $k = 0, 1, \ldots$, еквівалентні співвідношенню

$$\forall \alpha > 0 \quad n^{\alpha} \| u - u_n \| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Якщо додатково $q(x)$ аналітична на $[0, \pi]$, то

$$C_{\{n^{2n}\}}(A) = C_{\{n^{2n}\}}(B), \qquad C_{(n^{2n})}(A) = C_{(n^{2n})}(B)$$

і умова

$$\exists \alpha > 0 : e^{\alpha n} \| u - u_n \| \to 0, \quad n \to \infty,$$

еквівалентна аналітичності $f(x)$ на $[0, \pi]$ та умові $f^{(2k)}(0) = f^{(2k)}(\pi) = 0$, $k = 0, 1, \ldots$. Для виконання оцінки

$$\forall \alpha > 0 \quad e^{\alpha n} \| u - u_n \| \to 0, \quad n \to \infty,$$

необхідно і достатньо, щоб функція $f(x)$ була цілою і задовольняла ті ж самі умови на кінцях інтервалу $[0, \pi]$.

1. *Мартынюк А. Е.* Некоторые новые приложения методов типа Галеркина // Мат. сб. – 1959. – **49**, № 1. – С. 85–108.
2. *Petryschyn W. V.* On a class of K-p.d. and non-K-p.d. operators and operator equations // J. Math. Anal. and Appl. – 1965. – **10**. – P. 1–24.
3. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1965. – 798 с.
4. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. – Ленинград: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980. – 264 с.
5. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. – М.: Наука, 1970. – 512 с.
6. *Лучка А. Ю., Лучка Т. Ф.* Возникновение и развитие прямых методов математической физики. – Киев: Наук. думка, 1985. – 239 с.
7. *Джишкариани А. В.* О быстроте сходимости приближенного метода Ритца // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1963. – **3**, № 4. – С. 654–663.
8. *Джишкариани А. В.* О быстроте сходимости метода Бубнова–Галеркина // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1964. – **4**, № 2. – С. 343–348.
9. *Вайникко Г. М.* О сходных операторах // Докл. АН СССР. – 1968. – **179**, № 5. – С. 1029–1031.
10. *Горбачук М. Л., Горбачук В. І.* Про наближення гладких векторів замкненого оператора цілими векторами експоненціального типу // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 5. – С. 616–628.

Получено 14.05.96