УДК 517. 968

М. Азизов (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ ПРОЕКЦИОННО-ИТЕРАТИВНОГО МЕТОДА И НЕКОТОРЫХ ЕГО ОБОБЩЕНИЙ НА КЛАССЕ УРАВНЕНИЙ СО СГЛАЖИВАЮЩИМИ ОПЕРАТОРАМИ

For some classes of operator equations of the second kind with smoothing operators, we find the exact order of the optimal rate of convergence of generalized projection-iterative methods.

Дле деяких класів операторних рівнянь другого роду зі згладжуючими операторами знайдено точний порядок оптимальної швидкості збіжності узагальнених проекційно-ітеративних методів.

1. Пусть X — гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и нормой $\|g\|=\sqrt{(g,g)}$, а $Y_0=X\supset Y_1\supset Y_2\supset\ldots\supset Y_\nu\supset\ldots$ — шкала банаховых пространств, вложенных друг в друга с константой вложения 1, т. е. $\|\cdot\|_1\le$ $\le\|\cdot\|_2\le\ldots\le\|\cdot\|_\nu\le\ldots$, где $\|\cdot\|_\nu=\|\cdot\|_{Y_\nu}$. Через $L(Y_\nu, Y_\mu)$ будем обозначать пространство линейных непрерывных операторов H, действующих из Y_ν в Y_μ. При этом, как обычно

$$\|H\|_{\nu\to\mu} = \sup_{\|g\|_\nu\le 1}\|Hg\|_\mu.$$

Следуя [1], будем называть H сглаживающим оператором порядка q, если для любого $\nu=0,1,2,\ldots$ $\|H\|_{\nu\to\nu+q}<\infty$ т. е. для любого ν и $g\in Y_\nu$, $Hg\in$ $\in Y_{\nu+q}$. Как и в [1], будем рассматривать операторные уравнения второго рода

$$z = Hz+f \tag{1}$$

со сглаживающими операторами H из класса

$$\mathcal{H}^q=\mathcal{H}^q(\alpha,\beta)=\{H\colon H\in L(Y_\nu, Y_{\nu+q}),\quad \nu=0,1,2,\ldots,$$
$$\|H\|_{\nu\to\nu+q}<\alpha,\quad \|(I-H)^{-1}\|_{0\to 0}\le\beta\}.$$

В [1] есть несколько примеров уравнений вида (1) со сглаживающими операторами. Приведем еще один пример таких уравнений, которые в последнее время исследовались авторами [2, 3]. В качестве гильбертова пространства X выберем пространство $L_2=L_2(-\pi,\pi)$ функций с интегрируемым квадратом на $(-\pi,\pi)$, скалярное произведение в котором задается обычным образом, а роль элементов шкалы Y_ν будут играть соболевские пространства W_2^ν 2π-периодических функций $f(t)$, имеющих абсолютно непрерывные на $[-\pi,\pi]$ производные $f^{(\nu-1)}$ и суммируемые в квадрате производные $f^{(\nu)}$, т. е. $f^{(\nu)}\in L_2$. При этом

$$\|f\|_\nu = \|f\|_{W_2^\nu} := \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty}\left(1+|l|^2\right)^\nu|\hat f(l)|^2\right)^{1/2}$$

где

$$\hat f(l) = (2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)e^{-il\tau}d\tau$$

— коэффициенты Фурье функции f по тригонометрической системе.

В пространстве L_2 рассмотрим слабо сингулярные уравнения Фредгольма второго рода вида

$$z(t) = H_a z(t) + f(t) :=$$

$$:= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{-a(t,\tau)}{\pi} \ln\left| 2\sin\frac{t-\tau}{2} \right| + \frac{b(t,\tau)}{2\pi} \right] z(\tau)\, d\tau + f(t) \tag{2}$$

с 2π-периодическими по каждой переменной коэффициентами $a(t,\tau)$, $b(t,\tau)$ и $f(t)$. Известно (см., например, [2]), что уравнения вида (2) естественно возникают при решении внешних краевых задач для двумерных уравнений Гельмгольца в областях, ограниченных замкнутыми кривыми. При этом, если эти кривые являются аналитическими, то свойство аналитичности наследуется и коэффициентами $a(t,\tau)$, $b(t,\tau)$. Говоря о периодических аналитических функциях, естественно думать о функциях из пространства A^d [4, с. 185], образованного 2π-периодическими функциями $a(t,\tau)$, допускающими по каждой переменной аналитическое продолжение в полосу $\{u = x + iy,\ |y| < d\}$ комплексной плоскости шириной $2d$,

$$\|a\|_{A^d} := \left(\sum_{k,l=-\infty}^{\infty} \operatorname{ch}^2|kd| \operatorname{ch}^2|ld|\, |\hat{a}(k,l)|^2 \right)^{1/2},$$

$$\hat{a}(k,l) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} a(t,\tau)\, e^{-i(kt+l\tau)} dt\, d\tau.$$

При этом, из результатов [3] следует, что для любого ν и $a \in A^d$

$$\|H_a\|_{\nu\to\nu+1} \le c_\nu [\|a\|_{A^d} + \|b\|_{A^d}].$$

Таким образом, по принятой нами терминологии, при $a, b \in A^d$ операторы H_a из уравнений (2) являются сглаживающими операторами порядка 1 по отношению к шкале соболевских пространств W_2^ν.

В настоящей статье мы исследуем возможность приближенного решения уравнений (1), (2) со сглаживающими операторами с помощью проекционно-итеративного метода и некоторых его обобщений, учитывающих, по мнению автора, особенности сглаживающих операторов.

2. Проекционно-итеративный метод возник на базе предложенного Ю. Д. Соколовым в 1952 г. метода осреднения функциональных поправок [5] и развивался в дальнейшем в работах учеников и последователей Ю. Д. Соколова – А. Ю. Лучки [6], Н. С. Курпеля [7], В. И. Тивончика [8] и др. По терминологии [9, с. 201], проекционно-итеративный метод является линейной итерацией, состоящей в определении последовательности $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_k, \ldots$ приближенных решений уравнений (1) согласно формуле

$$z_k = z_{k-1} + B(Hz_{k-1} - z_{k-1} + f), \tag{3}$$

где

$$B = B(P,H) = I + H(I - PH)^{-1} P, \tag{4}$$

а P — проектор на некоторое N-мерное подпространство $F_N \subset X$.

Пусть $\Delta_{k-1} = z - z_{k-1}$ — погрешность приближенного решения (1), полученная на $(k-1)$-й итерации. Легко видеть, что Δ_k является решением следующего уравнения вида (1):

$$\Delta_{k-1} = H\Delta_{k-1} + Hz_{k-1} - z_{k-1} + f. \tag{5}$$

При проекционно-итеративном методе с помощью проекционного метода мы фактически находим приближенное решение $\delta_{k-1,N}$ уравнения (5), т. е. решаем уравнение

$$\delta_{k-1,N} = PH\delta_{k-1,N} + P(Hz_{k-1} - z_{k-1} + f), \tag{6}$$

затем определяем вспомогательный элемент

$$z_{k-1/2} = Hz_{k-1} + f \tag{7}$$

и строим приближенное решение z_k уравнения (1) на k-й итерации по формуле

$$z_k = f + H(z_{k-1} + \delta_{k-1,N}) = z_{k-1/2} + H\delta_{k-1,N}. \tag{8}$$

Следуя [9, с. 261], операцию нахождения решения уравнения (6) будем называть P-операцией, а операцию нахождения вспомогательного элемента (7) — K-операцией.

Ясно, что в силу (6)

$$\delta_{k-1,N} = \sum_{j=1}^{N} x_j e_j, \tag{9}$$

где $\{e_j\}$ — базис подпространств F_N, а коэффициенты x_j определяются из соответствующей уравнению (6) системы N линейных алгебраических уравнений. Но тогда

$$z_k = z_{k-1/2} + \sum_{j=1}^{N} x_j He_j. \tag{10}$$

Таким образом, если элементы He_j, $j = 1, 2, \ldots, N$, найдены до начала итерационного процесса, то при проекционно-итеративном методе (3), (4) на каждом шаге итерации нужно выполнить одну K-операцию и одну P-операцию.

Как отмечалось в [10], один из возможных подходов к построению оператора B в (3) базируется на следующем соображении. Так как при $B = (I - H)^{-1}$ итерационный процесс (3) сходится за одну операцию, то естественно выбирать B близким к резольвенте $(I - H)^{-1}$ оператора H. Это можно сделать, воспользовавшись тождеством

$$(I - H)^{-1} = \sum_{k=0}^{m} H^k + H^{m+1}(I - H)^{-1}$$

и положив

$$B = B_m = B_m(P, H) = \sum_{k=0}^{m} H^k + H^{m+1}(I - PH)^{-1}P. \tag{11}$$

В случае $m = 0$ $B_0(P, H) = B(P, H)$ и указанный подход приводит к проекционно-итеративному методу (3), (4). Поэтому в дальнейшем итерационный процесс (3), (11) будем называть обобщенным проекционно-итеративным методом.

Заметим, что если элементы $H^{m+1}e_j$, $j = 1, 2, \ldots, N$, определены до начала итерационного процесса и $z_0 = f$, то на первой итерации по методу (3), (11) мы должны $(m + 1)$ раз выполнить K-операцию, определив вспомогательный элемент

$$z_{m,1/2} = \sum_{k=0}^{m+1} H^k f, \tag{12}$$

и один раз выполнить P-операцию, состоящую в определении решения уравнения (6) при $k=1$ и $z_0=f$.

3. В [9, с. 292] отмечается, что основное свойство линейной итерации (3) состоит в том, что ее погрешность $\Delta_k = z - z_k$ удовлетворяет соотношению

$$\Delta_k = T\Delta_{k-1}, \quad k=1,2,\dots, \tag{13}$$

где $T = I - B(I-H)$. При этом скорость сходимости итерационного процесса (3) в пространствах X определяется величиной [9, с. 282]

$$\mu(T) = \lim_{k\to\infty} \|T^k\|_{X\to X}^{1/k}.$$

Иными словами, итерационный процесс (3) сходится к решению уравнения (1) как геометрическая прогрессия со знаменателем $\mu(T)$, т. е.

$$\|z - z_k\| \le c[\mu(T)]^k, \tag{14}$$

где постоянная c не зависит от k. Для обобщенного проекционно-итеративного метода (3), (11) полагаем

$$T_m(P,H) = I - B_m(P,H)(I-H),$$

$$\mu_m(P,H) = \lim_{k\to\infty} \|T_m^k(P,H)\|_{X\to X}^{1/k}.$$

Пусть $\mathcal{P}_N$ — множество всевозможных проекторов на различные подпространства X размерности N. Следуя [10], рассмотрим величину

$$\mu_{m,N}(\mathcal{H}) = \sup_{H\in\mathcal{H}} \inf_{P\in\mathcal{P}_N} \mu_m(P,H),$$

характеризующую оптимальную скорость сходимости на классе уравнений (1) с операторами $H\in\mathcal{H}$ обобщенных проекционно-итеративных методов (3), (11), определяемых различными проекторами $P\in\mathcal{P}_N$.

Теорема 1. *Если*

$$\lim_{N\to\infty} \inf_{P\in\mathcal{P}_N} \|I-P\|_{q\to 0} = 0,$$

то, начиная с некоторого номера N,

$$c_1 \sup_{P\in\mathcal{P}_{N+1}\bigcap\limits_{\nu=0}^{\infty} L(Y_\nu, Y_{\nu+q})} \inf_{\nu} \|P\|_{\nu\to\nu+q}^{-(m+1)} \le$$

$$\le \mu_{m,N}(\mathcal{H}^q) \le c_2 \inf_{P\in\mathcal{P}_N} \|I-P\|_{(m+1)q\to 0},$$

где постоянные c_1 и c_2 не зависят от N.

Доказательство. Установим оценку снизу. Пусть P_0 — некоторый проектор из $\mathcal{P}_{N+1}\bigcap\limits_{\nu=0}^{\infty} L(Y_\nu, Y_{\nu+q})$. Рассмотрим оператор

$$H_0 = \delta \inf_{\nu} \|P_0\|_{\nu\to\nu+q}^{-1} P_0,$$

где $\delta = \min\{\alpha, (\beta-1)/\beta\}$. Легко видеть, что для любого фиксированного ν_0

$$\| H_0 \|_{\nu_0 \to \nu_0 + q} = \delta \inf_{\nu} \| P_0 \|^{-1}_{\nu \to \nu + q} \| P_0 \|_{\nu_0 \to \nu_0 + q} \leq$$

$$\leq \delta \| P_0 \|^{-1}_{\nu_0 \to \nu_0 + q} \| P_0 \|_{\nu_0 \to \nu} \leq \delta \leq \alpha.$$

Кроме того, $\| H_0 \|_{0 \to 0} \leq \| H_0 \|_{0 \to q} \leq \delta < 1$. Но тогда

$$\| (I - H_0)^{-1} \|_{0 \to 0} = \left\| \sum_{k=0}^{\infty} H_0^k \right\|_{0 \to 0} \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty} \| H_0 \|^k_{0 \to 0} \leq \frac{1}{1 - \| H_0 \|_{0 \to 0}} \leq \frac{1}{1 - \delta} \leq \beta.$$

Таким образом, $H_0 \in \mathcal{H}^q(\alpha, \beta)$.

Пусть теперь F_N — произвольное N-мерное пространство X с базисом $\{ e_1, e_2, \ldots, e_N \}$, а P_N — проектор на F_N.

Так как $\| P_N H_0 \|_{0 \to 0} \leq \| H_0 \|_{0 \to 0} < 1$, оператор $(I - P_N H_0)^{-1}$ существует и его можно представить в виде $I - R_N$, где R_N — некоторый оператор из X в F_N. По определению

$$T_m^k(P_N, H_0) = (I - B_m(P_N, H_0)(I - H_0))^k =$$

$$= \left(I - \left(\sum_{n=0}^{m} H_0^n + H_0^{m+1}(I - P_N H_0)^{-1} P_N \right)(I - H_0) \right)^k =$$

$$= \left(I - \sum_{n=0}^{m} H_0^n + \sum_{n=0}^{m} H_0^{n+1} - H_0^{m+1}(I - P_N H_0)^{-1} P_N + H_0^{m+1}(I - P_N H_0)^{-1} P_N H_0 \right)^k =$$

$$= (H_0^{m+1}(I - (I - P_N H_0)^{-1} P_N + (I - P_N H_0)^{-1} P_N H_0)))^k =$$

$$= (H_0^{m+1}(I - P_N H_0)^{-1}(I - P_N H_0 - P_N + P_N H_0))^k =$$

$$= (H_0^{m+1}(I - P_N H_0)^{-1}(I - P_N))^k =$$

$$= (H_0^{m+1}(I - R_N)^{-1}(I - P_N))^k = H_0^{(m+1)k} - \sum_{i=0}^{k} H_0^{(m+1)k} R_{N,i}, \tag{15}$$

где $R_{N,i}$, $i = 1, 2, \ldots, k$, — некоторые операторы ранга не выше N, действующие из X в F_N. Полагаем

$$H_N = \sum_{i=0}^{k} H_0^{(m+1)k} R_{N,i} = \delta^{(m+1)k} \inf_{\nu} \| P_0 \|^{-(m+1)k}_{\nu \to \nu + q} \sum_{i=0}^{k} P_0 R_{N,i}. \tag{16}$$

Из (16) видно, что H_N действует из X в подпространство

$$F_N^0 = \operatorname{span} \{ P_0 e_1, P_0 e_2, \ldots, P_0 e_N \},$$

базисом которого является максимальная линейно независимая система из множества образов элементов базиса F_N при действии проектора $P_0 \in \mathcal{P}_{N+1}$. Ясно, что $\dim F_N^0 \leq N$.

Пусть $U_X = \{\varphi : \|\varphi\|_0 \le 1\}$, а Φ_{N+1} — пространство размерности $N+1$, на которое проектирует $P_0 \in \mathcal{P}_{N+1}$. Если φ пробегает множество $U_X \cap \Phi_{N+1}$, то элементы

$$H_0^{(m+1)k}\varphi = \delta^{(m+1)k} \inf_{\nu} \|P_0\|_{\nu\to\nu+q}^{-(m+1)k} P_0\varphi = \delta^{(m+1)k} \inf_{\nu} \|P_0\|_{\nu\to\nu+q}^{-(m+1)k}\varphi$$

заполняют в Φ_{N+1} шар $\Phi_{N+1}(\rho) = \{\varphi \in \Phi_{\nu+1}, \|\varphi\|_0 \le \rho\}$ радиуса

$$\rho = \delta^{(m+1)k} \inf_{\nu} \|P_0\|_{\nu\to\nu+q}^{-(m+1)k}.$$

Но тогда из (15), (16) и теоремы о поперечнике шара [4, с. 258] находим

$$\left\|T_m^k(P_N, H_0)\right\|_{0\to 0} \ge \sup_{\varphi\in U_x \cap \Phi_{N+1}} \left\|H_0^{(m+1)k}\varphi - H_N\varphi\right\| \ge$$

$$\ge \sup_{\varphi\in\Phi_{N+1}(\rho)} \inf_{g\in F_N^0} \|\varphi - g\| \ge$$

$$\ge \inf_{F_N\subset X,\, \dim F_N = N} \sup_{\varphi\in\Phi_{N+1}(\rho)} \inf_{g\in F_N} \|\varphi - g\| =$$

$$= d_N(\Phi_{N+1}(\rho), X) = \rho = \delta^{(m+1)k} \inf_{\nu} \|P_0\|_{\nu\to\nu+q}^{-(m+1)k}.$$

Это означает, что

$$\mu_m(F_N, H_0) = \lim_{k\to\infty} \left\|T_m^k(P_N, H_0)\right\|_{0\to 0}^{1/k} \ge \lim_{k\to\infty} \left[\delta^{(m+1)k}\left(\inf_{\nu} \|P_0\|_{\nu\to\nu+q}^{-(m+1)k}\right)^k\right]^{1/k} =$$

$$= \delta^{(m+1)} \inf_{\nu} \|P_0\|_{\nu\to\nu+q}^{-(m+1)}.$$

Поскольку такая оценка справедлива для любого $P_0 \in \mathcal{P}_N$, справедливы соотношения

$$\mu_{m,N}(\mathcal{H}^q) = \inf_{P\in\mathcal{P}_N} \mu_m(F_N, H_0) \ge \delta^{(m+1)} \inf_{\nu} \|P_0\|_{\nu\to\nu+q}^{-(m+1)}$$

и в силу произвольности выбора $P_0 \in \mathcal{P}_{N+1} \bigcap_{\nu=0}^{\infty} L(Y_\nu, Y_{\nu+q})$ требуемая оценка снизу установлена.

Получим оценки сверху. Пусть P — некоторый проектор из $\mathcal{P}_N$. В силу условия теоремы, не умаляя общности рассуждений можно предположить, что $\|I-P\|_{q\to 0} < 1/2\alpha\beta$, где α и β — параметры, участвующие в определении класса $\mathcal{H}^q(\alpha, \beta)$. Но тогда для $H \in \mathcal{H}^q(\alpha,\beta)$ имеем

$$\|H - PH\|_{0\to 0} \le \|I-P\|_{q\to 0}\|H\|_{0\to q} \le \frac{1}{2\alpha\beta}\alpha = \frac{1}{2\beta}$$

и, кроме того,

$$\|(I-PH)^{-1}\|_{0\to 0} \le \frac{\|(I-H)\|_{0\to 0}}{1 - \left\|(I-H)^{-1}\right\|_{0\to 0}\|H-PH\|_{0\to 0}} \le$$

$$\le \frac{\beta}{1 - \beta\|H-PH\|_{0\to 0}} \le 2\beta.$$

Заметим, что для $H \in \mathcal{H}^q(\alpha, \beta)$ справедливо равенство

$$\| H^{m+1} \|_{0 \to (m+1)q} \le \prod_{i=0}^{m} \| H \|_{(m-i)q \to (m-i+1)q} \le \alpha^{m+1}.$$

Теперь, повторяя выкладки (15) для $H \in \mathcal{H}^q$, находим

$$\begin{aligned} \left\| T_m^k(P, H) \right\|_{0 \to 0} &= \| (H^{m+1}(I - PH)^{-1}(I-P))^k \|_{0 \to 0} = \\ &= \| H^{m+1}(I - PH)^{-1}(I-P) T_m^{k-1}(P, H) \|_{0 \to 0} \le \\ &\le 2\alpha^{m+1}\beta \| I - P \|_{(m+1)q \to 0} \left\| T_m^{k-1}(P, H) \right\|_{0 \to (m+1)q}. \end{aligned} \tag{17}$$

Кроме того, имеем

$$\begin{aligned} \left\| T_m^{k-1}(P, H) \right\|_{0 \to (m+1)q} &= \| H^{m+1}(I - PH)^{-1}(I-P) T_m^{k-2}(P, H) \|_{0 \to (m+1)q} \le \\ &\le \| H^{m+1} \|_{0 \to (m+1)q} \| (I - PH)^{-1}(I-P) T_m^{k-2}(P, H) \|_{0 \to 0} \le \\ &\le 2\alpha^{m+1}\beta \| I - P \|_{(m+1)q \to 0} \left\| T_m^{k-2}(P, H) \right\|_{0 \to (m+1)q} \le \\ &\le (2\alpha^{m+1}\beta)^2 \| I - P \|^2_{(m+1)q \to 0} \left\| T_m^{k-3}(P, H) \right\|_{0 \to (m+1)q} \le \ldots \le \\ &\le (2\alpha^{m+1}\beta)^{k-2} \| I - P \|^{k-2}_{(m+1)q \to 0} \| T_m(P, H) \|_{0 \to (m+1)q} \le \\ &\le (2\alpha^{m+1}\beta)^{k-1} \| I - P \|^{k-2}_{(m+1)q \to 0}. \end{aligned}$$

Из (17) и последнего неравенства следует, что для $H \in \mathcal{H}^q$

$$\mu_m(P, H) = \lim_{k \to \infty} \left\| T_m^k(P, H) \right\|^{1/k}_{X \to X} \le \lim_{k \to \infty} \left((2\alpha^{m+1}\beta)^k \| I - P \|^{k-1}_{(m+1)q \to 0} \right)^{1/k} =$$

$$= 2\alpha^{m+1}\beta \| I - P \|_{(m+1)q \to 0}.$$

В силу произвольности $H \in \mathcal{H}^q$ и $P \in \mathcal{P}_N$ это означает, что

$$\mu_{m,N}(\mathcal{H}^q) \le 2\alpha^{m+1}\beta \inf_{P \in \mathcal{P}_N} \| I - P \|_{(m+1)q \to 0}.$$

Требуемая оценка сверху получена. Теорема доказана.

4. Конкретизируем утверждение доказанной выше теоремы для операторов, являющихся сглаживающими по отношению к шкале соболевских пространств W_2^ν. При $X = L_2$ и $Y_\nu = W_2^\nu$ класс сглаживающих операторов $\mathcal{H}^q(\alpha, \beta)$ будем обозначать через $\mathcal{H}_W^q(\alpha, \beta)$. Как уже отмечалось, при $q = 1$ класс $\mathcal{H}_W^1$ содержит слабо сингулярные интегральные операторы Фредгольма с аналитическими коэффициентами, входящие в уравнения вида (2).

Теорема 2. *Справедливо соотношение* $\mu_{m,N}(\mathcal{H}_W^q) \asymp N^{-(m+1)q}$. *При этом оптимальный порядок скорости сходимости обобщенного проекционно-итеративного метода* (3), (11) *реализуется при* $P = S_n$, $n = [(N-1)/2]$, *где*

$$S_n f(t) = \sum_{l=-n}^{n} e^{ilt} \bar{f}(l)$$

— *частная сумма ряда Фурье функции* f *порядка* n.

Доказательство. Известно, что для любого $\nu = 1, 2, \ldots$

$$\| I - S_n \|_{W_2^\nu \to L_2} \leq (n+1)^{-\nu}.$$

Кроме того, при $n = [(N-1)/2]$ $S_n \in \mathcal{P}_N$ и в силу теоремы 1

$$\mu_{m,N}(\mathcal{H}_W^q) \leq c_2 \inf_{P \in \mathcal{P}_N} \| I - P \|_{(m+1)q \to 0} \leq c_2 \| I - S_n \|_{W_2^{(m+1)q} \to L_2} \leq$$

$$\leq c_2 (n+1)^{-(m+1)q} \leq c_1 N^{-(m+1)q}.$$

Требуемая оценка сверху установлена.

Для получения оценки снизу заметим, что при $n = [N/2]$ $S_n \in \mathcal{P}_{N+1}$ и

$$\| S_n \|_{W_2^\nu \to W_2^{\nu+q}} = \sup_{\| f \|_\nu \leq 1} \| S_n f \|_{\nu+q} =$$

$$= \sup_{\| f \|_\nu \leq 1} \left(\sum_{l=-n}^{n} (1+|l|^2)^{\nu+q} |\hat{f}(l)|^2 \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \sup_{\| f \|_\nu \leq 1} \left((n+1)^{2q} \sum_{l=-n}^{n} \frac{(1+|l|^2)^{\nu+q}}{(1+n^2)^q} |\hat{f}(l)|^2 \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq (n+1)^q \sup_{\| f \|_\nu \leq 1} \left(\sum_{l=-n}^{n} (1+|l|^2)^{\nu} |\hat{f}(l)|^2 \right)^{1/2} \leq (n+1)^q.$$

Таким образом, для любого $\nu = 1, 2, \ldots$

$$\| S_n \|_{W_2^\nu \to W_2^{\nu+q}}^{-1} \geq (n+1)^{-q}$$

и, вновь пользуясь теоремой 1, находим

$$\mu_{m,N}(\mathcal{H}_W^q) \geq c_1 \sup_{P \in \mathcal{P}_{N+1} \bigcap_{\nu=0}^{\infty} L(W_2^\nu, W_2^{\nu+q})} \inf_\nu \| P \|_{W_2^\nu \to W_2^{\nu+q}}^{-(m+1)} \geq$$

$$\geq c_1 \inf_\nu \| S_n \|_{W_2^\nu \to W_2^{\nu+q}}^{-(m+1)} \geq c_1 (n+1)^{-(m+1)q} \geq c_1 N^{-(m+1)q}.$$

Требуемая оценка снизу установлена. Теорема доказана.

Оценим число K-операций и P-операций, которые нужно выполнить при $S_n \in \mathcal{P}_N$ и различных m в рамках обобщенных проекционно-итеративных методов (3), (11) для достижения точности $O(N^{-s})$ на классе уравнений (1) с операторами $H \in \mathcal{H}_W^1$. Напомним, что этот класс содержит граничные интегральные уравнения (2) внешних краевых задач для двумерных уравнений Гельмгольца.

Итак, пусть

$$\sup_{\substack{z = Hz + f \\ H \in \mathcal{H}_W^1, \| f \| \leq 1}} \| z - z_k \| = O(N^{-s}). \tag{18}$$

В силу теоремы 2 для того чтобы обеспечить выполнение условия (18) в рамках стандартной схемы проекционно-итеративного метода, т. е. при $m = 0$, потребуется s итераций. Мы уже отмечали, что при $m = 0$ на каждом шаге итерации по методу (3), (11) нужно выполнить одну P-операцию и одну K-операцию. Таким образом, для выполнения (18) потребуется s P-операций и s K-операций.

Если теперь положить $m = s - 1$, то для выполнения условия (18) в рамках обобщенного проекционно-итеративного метода (3), (11) нужна лишь одна итерация. Но эта итерация, как отмечалось выше, потребует выполнения одной P-операции и $m + 1 = s$ K-операций. Приведенный анализ показывает, что при больших m применение обобщенных проекционно-итеративных методов (3), (11) для приближенного решения уравнений со сглаживающими операторами дает выигрыш по числу P-операций.

1. *Pereverzev S. V., Solodky S. G.* Optimierung directer Verfahren fur Gleichungen 2. Art mit Glattungsoperatoren // Math. Nachr. – 1991. – **153.** – S. 101–108
2. *Yi Yan.* A fast numerical solution for a second kind boundary integral equation with a logarithmic kernel // SIAM J. Nummer. Anal. – 1994. – **31,** № 2. – P. 477–498.
3. *Saranen J., Vainikko G.* Trigonometric collocation methods with product integration for boundary integral equations on closed curves // SIAM J. Nummer. Anal. – 1995. – **32,** № 5. – P. 577–590.
4. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. – 340 с.
5. *Соколов Ю. Д.* Метод осреднения функциональных поправок. – Киев: Наук. думка, 1968. – 336 с.
6. *Лучка А. Ю.* Проекционно-итеративные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. – Киев.: Наук. думка, 1980. – 264 с.
7. *Курпель Н. С.* Проекционно-итеративные методы решения операторных уравнений. – Киев.: Наук. думка, 1968. – 244 с.
8. *Тивончук В. И.* Об одном варианте метода осреднения функциональных поправок для решения линейных интегральных уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения. – 1966. – **2,** № 9. – С. 1228–1238.
9. *Марчук Г. И., Лебедев В. И.* Численные методы в теории переноса нейтронов. – М.: Атомиздат, 1971. – 492 с.
10. *Переверзев С. В., Синенко М. А.* Об оптимальной скорости сходимости KR-метода и некоторых его обобщений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1991. – **31,** № 10. – С. 1452–1460.

Получено 22.04.96