УДК 517. 946

К. Н. Оспанов (Ин-т прикл. математики НАН и Мин. образования РК, Караганда)

КОЭРЦИТИВНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ОБОБЩЕННОЙ СИСТЕМЫ КОШИ–РИМАНА В ПРОСТРАНСТВЕ $L_p(E)$

For an inhomogeneous generalized Cauchy–Riemann system with nonsmooth coefficients separated from zero, we establish conditions for the solvability and estimation of a weighted solution and its first-order derivatives.

Знайдено умови розв'язності та оцінки розв'язку з вагою, а також похідних першого порядку неоднорідної узагальненої системи Коші – Рімана з відокремленими від нуля негладкими коефіцієнтами.

В настоящей статье изучаются системы первого порядка

$$L_\lambda w = \partial_{\bar{z}} w + A(z)w + (B(z)+\lambda)\overline{w} = F(z), \tag{1}$$

где $\partial_{\bar{z}} = 0{,}5(\partial_x + i\partial_y)$, $z = x + iy \in E$, $w(z)$ — комплекснозначная функция, E — комплексная плоскость.

В ограниченной области эта система подробно исследована в [1, 2] и др. Методы разработанной в [1, 2] теории распространены на случай, когда коэффициенты $A(z)$, $B(z)$ и правая часть $F(z)$ принадлежат пространству $L_{p,2}(E)$, $p > 2$. В [1] отмечена необходимость исследования системы (1) для более общих классов коэффициентов A, B и правых частей. Этой задаче посвящены работы [3–5]. В [6] с помощью функционального метода исследован случай, когда коэффициенты $A(z)$ и $B(z)$ отделены от нуля и могут иметь неограниченный рост на бесконечности, а $F(z)$ принадлежит пространству $L_2(E)$. В [7] этот метод обобщен на системы типа Бельтрами. В настоящей статье в отличие от них $F(z)$ считается элементом $L_p(E)$ при некотором $p \in (2, \infty)$ (этот случай наиболее сложен, поскольку оператор системы, являясь неполуограниченным, не допускает каких-либо априорных оценок решения) и для широкого класса коэффициентов устанавливаются существование и единственность решения $w(z)$ системы (1), а также оценки L_p-норм $w(z)$ и его производных первого порядка.

Относительно функций $A(x, y)$ и $B(x, y)$ предполагаем, что они непрерывны и удовлетворяют следующим условиям:

$$\inf\left(\varepsilon \operatorname{Re} B(z) - |A(z)|\right) \geq \delta > 0, \quad 0 < \varepsilon < 1, \tag{2}$$

$$\sup_{|z-\eta|\leq 1} \max\left\{\left|\frac{B(z)}{B(\eta)}\right|, \frac{\operatorname{Re} B(z)}{\operatorname{Re} B(\eta)}\right\} \leq K, \quad K > 1, \tag{3}$$

$$|A(z) - A(\eta)| + |B(z) - B(\eta)| \leq M|B(z)|^{\alpha}|z-\eta|^{\beta} \tag{4}$$

$$\text{при} \quad |z-\eta| \leq 1, \quad \beta \in (0, 1], \quad \alpha - \beta - 1 < 0.$$

Оператор L_λ считаем определенным на множестве бесконечно дифференцируемых финитных функций $C_0^\infty(R^2)$, его замыкание по норме пространства $L_p \equiv L_p(R^2)$, $p > 2$, обозначим также через L_λ.

Определение. *Функцию* $w(z) \in L_p(E)$ *назовем решением уравнения* (1), *если найдется последовательность* $\{w_n(z)\}_{n=1}^\infty$ *функций из* $C_0^\infty(E)$ *такая, что* $\|w_n - w\|_p \to 0$, $\|L_\lambda w_n - F\|_p \to 0$, *когда* $n \to \infty$.

Через μ обозначим число

$$\mu = \left(4M\left[\frac{8}{3}K\pi\left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^{1/2}\left(\beta+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\beta+\frac{1}{2}\right)+\frac{4}{3}\pi\beta\Gamma(\beta)\right]\frac{K^{\beta+1}\sqrt{2(1+\varepsilon^2)}}{(1-\varepsilon)^{\beta+2/3}} + \right.$$

$$\left. + \frac{8\varphi_0(1+\varepsilon)^2K^3}{(1-\varepsilon)^4}+\frac{4\varphi_0(1+\varepsilon)}{(1-\varepsilon)^4}\right)^{1/\theta},$$

$\theta = \min(1+\beta-\alpha, 3/2)$, Γ — гамма-функция Эйлера, постоянные $K, M, \beta, \varepsilon, \alpha$ такие же, как и в условиях (2)–(4), φ_0 — конечное число, связанное с некоторым разбиением единицы. Через $W_p^1(E,\Delta)$ обозначим пространство с нормой

$$\| w\|_{p,1,\Delta} = \left(\int\limits_E\left(|w_x|^p+|w_y|^p+|\Delta(x,y)w|^p\right)dx\,dy\right)^{1/p},$$

где $\Delta(x,y)$ — весовая функция.

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема. *Пусть выполнены условия* (2)–(4) *и* $\lambda>\mu$. *Тогда для любой функции* $F\in L_p(E)$, $2<p<\infty$, *уравнение* (1) *имеет единственное решение* $w(z)$ *из* $L_p(E)$ *такое, что справедлива оценка*

$$\| w\|_{p,1,B} = C\| F\|_p,$$

где C *не зависит от* $w(z)$, *а* $B=B(x,y)$ — *коэффициент системы* (1).

Доказательству теоремы предпошлем ряд построений и лемм.

Если ввести обозначения

$$U(x) = (u,v) \equiv (\operatorname{Re}w, \operatorname{Im}w), \quad X=(x,y)\in R^2, \quad f=(\operatorname{Re}F, -\operatorname{Im}F),$$

$$B_{0X} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\partial_x+\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\partial_y, \quad Q(x) = 2\begin{pmatrix}\operatorname{Re}(A+B) & -\operatorname{Im}(A-B)\\ -\operatorname{Im}(A+B) & -\operatorname{Re}(A-B)\end{pmatrix},$$

то систему (1) можно записать в виде

$$L_\lambda U = (L+\lambda I)U = B_{0X}U(X)+(Q(X)+\lambda I)U(X) = f(X). \qquad (1')$$

Обозначим через $M_0(X,T,\lambda)$ $(X,T\in R^2, \lambda>0)$ матричную функцию

$$M_0(X,T,\lambda) = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{R^2}\exp[i\zeta(T-X)]\,\tilde{Q}_\lambda^{-1}(X,\zeta)\,d\zeta\,d\eta,$$

где $\zeta=(\xi,\eta)\in R^2$, $\tilde{Q}_\lambda^{-1}(X,\zeta)$ — обратная к матрице

$$\tilde{Q}_\lambda(X,\zeta) = Q(X)+\lambda I+\begin{pmatrix}i\xi & -i\eta\\ -i\eta & -i\xi\end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Пусть функция $r(s)\in C_0^\infty(R^2)$, $s=(s_1,s_2)$, такая, что

$$0\le r(s)\le 1, \quad \left|\frac{\partial r}{\partial s_1}\right|\le\varphi_0, \quad \left|\frac{\partial r}{\partial s_2}\right|\le\varphi_0, \quad r(s) = \begin{cases}1, & \text{если } |s|\le 3/4,\\ 0, & \text{если } |s|\ge 1.\end{cases}$$

Введем следующие интегральные операторы:

$$(M_1(\lambda)f)(T) = \int\limits_{R^2}[Q(T)-Q(X)]M_0(X,T,\lambda)\,r(T-X)f(X)\,dX,$$

$$(M_2(\lambda)f)(T) = \int_{R^2} M_0(X,T,\lambda)\,[B_{0_T} r(T-X)]\,f(X)\,dX,$$

$$(M_3(\lambda)f)(T) = \int_{R^2} M_0(X,T,\lambda)\,r(T-X)\,f(X)\,dX.$$

Непосредственным вычислением устанавливается следующее утверждение.

Лемма 1. *Для каждой функции $f(X)$ из $C_0^\infty(R^2, R^2)$ справедливо соотношение*

$$(L+\lambda I)(M_3(\lambda)f)(T) = f(T) + (M_1(\lambda)f)(T) + (M_2(\lambda)f)(T).$$

Лемма 2. *Если K — интегральный оператор, действующий по формуле*

$$(Kf)(X) = \int_{R^2} \mathfrak{K}(X;T)\,f(T)\,dT$$

с матричным ядром $\mathfrak{K}(X,T)$, то норма $\|K\|_{L_p\to L_p}$, $1<p<\infty$, удовлетворяет оценке

$$\|K\|_{L_p\to L_p} \le \sup_{X\in R^2} \int_{R^2} (\|\mathfrak{K}(X,T)\|_{R^2} + \|\mathfrak{K}(T,X)\|_{R^2})\,dT,$$

где $\|\mathfrak{K}\|_{R^2}$ — квадратный корень из суммы квадратов элементов матрицы $\mathfrak{K}$.

Доказательство. Известно, что

$$\|(Kf)(X)\|_{L_p} = \sup_{\|g\|_{L_q}=1} \int_{R^2} (Kf)(X)g(X)\,dX, \quad 1/p+1/q=1,$$

поэтому

$$\|K\|_{L_p\to L_p} = \sup_{\|f\|_{L_p}=1}\sup_{\|g\|_{L_q}=1} \left| \int_{R^2} g(X)\left(\int_{R^2}\mathfrak{K}(X,T)f(T)\,dT\right)dX \right| \le$$

$$\le \sup_{\|f\|_{L_p}=1}\sup_{\|g\|_{L_q}=1} \int_{R^2}\int_{R^2} \|\mathfrak{K}\|_{R^2}\,|f(T)|\,|g(X)|\,dX\,dT \le$$

$$\le \sup_{\|f\|_{L_p}=1}\sup_{\|g\|_{L_q}=1} \left[\frac{1}{p}\int_{R^2}|f(T)|^p\,dT \sup_{T\in R^2}\int_{R^2}\|\mathfrak{K}(X,T)\|_{R^2}\,dX + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{q}\int_{R^2}|g(X)|^q\,dX \sup_{X\in R^2}\int_{R^2}\|\mathfrak{K}(X,T)\|_{R^2}\,dT \right] =$$

$$= \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)\sup_{X\in R^2}\int_{R^2}[\|\mathfrak{K}(X,T)\|_{R^2} + \|\mathfrak{K}(T,X)\|_{R^2}]\,dT =$$

$$= \sup_{X\in R^2}\int_{R^2}[\|\mathfrak{K}(X,T)\|_{R^2} + \|\mathfrak{K}(T,X)\|_{R^2}]\,dT.$$

Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть выполнено условие* (2) *и* $\lambda\ge 0$. *Тогда для нормы матрицы $M_0(X,T,\lambda)$ справедливо неравенство*

$$\|M_0(X,T,\lambda)\|_{R^2} < \frac{2}{3}\left[\frac{2\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{|X-T|}} + \frac{1}{|X-T|}\right]\exp\{-\lambda_1'|X-T|\}, \quad X\ne T,$$

где

$$\lambda_1 \equiv \lambda_1(X) = \sqrt{\lambda^2 + 2\operatorname{Re} B\lambda + |B(X)|^2}, \qquad \lambda_1' \equiv \lambda_1'(X) = \lambda_1(X) - |A(X)|.$$

Доказательство. Преобразованием переменных матрица $M_0(X, T, \lambda)$ приводится к виду $(X = (x, y),\ T = (t, \tau))$

$$M_0(X, T, \lambda) = -\frac{1}{4\pi^2} \exp\{-\operatorname{Re} A(t-x) - \operatorname{Im} A(\tau - y)\} J,$$

где

$$J = \int_{R^2} \frac{\exp\{i\xi(t-x) + i\eta(\tau - y)\}}{\xi^2 + \eta^2 + \lambda_1^2} \tilde{\tilde{Q}}_\lambda^{-1}(x, y, \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

$$\tilde{\tilde{Q}}_\lambda^{-1}(x, y, \xi, \eta) = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} B(x, y) - i\xi + \lambda & \operatorname{Im} B(x, y) + i\eta \\ -\operatorname{Im} B(x, y) + i\eta & \operatorname{Re} B(x, y) + i\xi + \lambda \end{pmatrix}.$$

Отсюда с помощью формул 3.961.1 и 8.432.8 из [8] и представлений $\lambda_1(X)$ и $\lambda_1'(X)$ из леммы 3 выводим оценку нормы $\|J\|_1$, равной сумме модулей элементов матрицы J:

$$\|J\|_1 \leq 4\sqrt{2}\left(\sqrt{\pi} + 1\right)\pi \frac{\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{|X - T|}} e^{-\lambda_1 |X - T|} + \frac{8\pi}{|X - T|} e^{-\lambda_1 |X - T|},$$

из которой и следует доказательство леммы.

Лемма 4. *Пусть выполнены условия* (2), (3) *теоремы и* $\lambda \geq 0$. *Тогда уравнение*

$$L_\lambda U = B_{0X} U(X) + [Q(X) + \lambda I] U(X) = 0 \tag{5}$$

не имеет решений $U(X) \in L_p(R^2)$ *за исключением тривиального.*

Лемма вытекает из результатов [6], поскольку (5) можно рассматривать как уравнение с правой частью из $L_p(R^2)$.

Лемма 5. *Пусть выполнены условия* (2)–(4) *и* $\lambda > \mu$. *Тогда для любой функции* $f \in L_p$ *уравнение*

$$(L + \lambda I) U = f \tag{6}$$

имеет единственное решение $U(X)$ *из* L_p, *причем справедлива оценка*

$$\|B_{0X} U\|_{L_p} + \|Q(X) U\|_{L_p} \leq C \|f\|_{L_p},$$

где C *не зависит от* $U(X)$.

Доказательство. В лемме 1 показано, что

$$(L + \lambda I)(M_3(\lambda) f)(T) = f(T) + (M_1(\lambda) f)(T) + (M_2(\lambda) f)(T).$$

Докажем, что нормы в L_p операторов $M_1(\lambda)$ и $M_2(\lambda)$ стремятся к нулю с увеличением λ. Используя леммы 2 и 3, а также условия (2), (4), имеем

$$\|M_1(\lambda)\|_{L_p \to L_p} \leq 2 \sup_{T \in R^2} \int_{|X - T| \leq 1} \|M_0(X, T, \lambda)\|_{R^2} \|Q(T) - Q(X)\|_{R^2}\, dX \leq$$

$$\leq 2M \sup_{T \in R^2} \|Q(T)\|^\alpha \int_{|X - T| \leq 1} \left[\frac{4\sqrt{\lambda_1(X)}}{3\sqrt{|X - T|}} + \frac{2}{3|X - T|}\right] \exp\{-\lambda_1' |X - T|\} |X - T|^\beta\, dX.$$

Вычисляя интегралы и оценивая норму $\|Q\|_{R^2}$, получаем

$$\|M_1(\lambda)\|_{L_p \to L_p} \le 2M\left[\frac{8}{3}\pi K^{\beta+2}\left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^{\beta+3/2}\left(\beta+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\beta+\frac{1}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{4}{3}\pi\beta\Gamma(\beta)\left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^{\beta+1}K^{\beta+1}\right]\frac{\sqrt{2(1+\varepsilon^2)}}{(1-\varepsilon)^{\beta+2/3}}\frac{1}{\lambda^{1+\beta-\alpha}}. \tag{7}$$

Аналогично оцениваем норму $M_2(\lambda)$:

$$\|M_2(\lambda)\|_{L_p \to L_p} \le 2\varphi_0 \sup_{T\in R^2} \int_{|X-T|\ge 1} \|M_0(X,T,\lambda)\|_{R^2}\, dX \le$$

$$\le 2\varphi_0 \sup_{T\in R^2} \int_{|X-T|\ge 1} \left[\frac{4\sqrt{\lambda_1(X)}}{3\sqrt{|X-T|}}+\frac{2}{3|X-T|}\right]\exp\{-\lambda_1'(X)\,|X-T|\}\, dX <$$

$$< \frac{4\varphi_0(1+\varepsilon)^2K^3}{(1-\varepsilon)^4}\frac{1}{\lambda^{3/2}}+\frac{2\varphi_0(1+\varepsilon)^2K^2}{(1-\varepsilon)^4}\frac{1}{\lambda^2}.$$

Согласно условию (4) $1+\beta-\alpha>0$, поэтому из оценки (7) и последнего неравенства вытекает

$$\|M_1(\lambda)\|_{L_p \to L_p} + \|M_2(\lambda)\|_{L_p \to L_p} \le \frac{1}{2}$$

для всех значений λ, не меньших, чем введенное выше число μ.

Поэтому при $\lambda \ge \mu$ оператор $S_\lambda = I + M_1(\lambda) + M_2(\lambda)$ имеет обратный S_λ^{-1}, причем

$$\|S_\lambda^{-1}\|_{L_p \to L_p} \le 2, \quad \|S_\lambda\|_{L_p \to L_p} \ge \frac{1}{2}, \quad \lambda \ge \mu.$$

Это означает, что S_λ взаимно однозначно отображает все $L_p(R^2)$ на себя. Обозначая $g(T) = (S_\lambda f)(T)$, $\lambda \ge \mu$, получаем соотношение

$$(L+\lambda I)\left(M_3(\lambda)S_\lambda^{-1}g\right)(T) = g(T),$$

что в силу произвольности $g(T)$ означает совпадение $M_3(\lambda)S_\lambda^{-1}$ с L_λ^{-1} при $\lambda \ge \mu$. Оценим норму оператора $Q(X)L_\lambda^{-1}$, $\lambda \ge \mu$:

$$\left\|QL_\lambda^{-1}\right\|_{L_p \to L_p} \le 2\,\|QM_3(\lambda)\|_{L_p \to L_p} \le$$

$$\le 2 \sup_{T\in R^2} \int_{|X-T|\le 1} \|Q(X)\|_{R^2}\,\|M_0(X,T,\lambda)\|_{R^2}\, dx \le$$

$$\le \frac{8\sqrt{2}\pi K^2}{3}\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\left(\frac{K\sqrt{\pi}\sqrt{1+\varepsilon}}{(1-\varepsilon)^2}+1\right)(1+\varepsilon^2).$$

Поэтому из уравнения $(1')$ имеем

$$\|B_0U\|_{L_p} \le \|f\|_{L_p} + \left\|QL_\lambda^{-1}f\right\|_{L_p} + \lambda\left\|L_\lambda^{-1}f\right\|_{L_p} \le$$

$$\le \left[1+\frac{8}{3}\pi\left(K\sqrt{2}\,(1+\varepsilon^2)+1\right)\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}(1+\varepsilon^2)\left(\frac{K\sqrt{\pi}\sqrt{1+\varepsilon}}{(1-\varepsilon)^2}+1\right)\right]\|f\|_{L_p}.$$

Объединяя это неравенство с предыдущим, получаем оценку

$$\| B_0 U \|_{L_p} + \| QU \|_{L_p} \le \left[1 + \frac{8\sqrt{2}\pi K^2}{3} + \frac{8}{3}\pi\left(K\sqrt{2}\,(1+\varepsilon^2)+1\right) \right] \times$$

$$\times \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}(1+\varepsilon^2)\left(\frac{K\sqrt{\pi}\sqrt{1+\varepsilon}}{(1-\varepsilon)^2}+1\right)\| f \|_{L_p} \equiv T\| f \|_{L_p}, \quad 2<p<\infty.$$

Лемма доказана.

Через $H_p^l(R^2)$, $1<p<\infty$, $l>1$, обозначим пространство бесселевых потенциалов с нормой, определенной по формуле [9]

$$\| U \|_{H_p^l(R^2)} = \left\| F^{-1}\left(1+\xi_1^2+\xi_2^2\right)^{l/2} FU \right\|_{L_p},$$

где F, F^{-1} — соответственно прямое и обратное преобразования Фурье. Известно, что каждый элемент матрицы

$$\frac{1}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}\,B_0(\xi,\eta) = \frac{1}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}\begin{pmatrix} i\xi & -i\eta \\ -i\eta & -i\xi \end{pmatrix}$$

является мультипликатором класса M_p^p, поэтому с учетом соотношения $FB_0(x,y)U = B_0(x,y)FU$ получаем оценку

$$\| U \|_{H_p^1(R^2)} = \left\| F^{-1}\frac{1}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}\,B_0(\xi,\eta)\,B_0(\xi,\eta)\,FU \right\|_{L_p} + \| U \|_{L_p} =$$

$$= \left\| \left(F^{-1}\frac{1}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}\,B_0(\xi,\eta)\,F\right)\left(F^{-1}B_0(\xi,\eta)\,FU\right) \right\|_{L_p} + \| U \|_{L_p} \le$$

$$\le C\left\| F^{-1}B_0(\xi,\eta)\,FU \right\|_{L_p} + \| U \|_{L_p} \le C\| B_0 U \|_{L_p} + \| U \|_{L_p}.$$

Отсюда и из теоремы вытекает, что любая функция $U(X)$ из $D(L)$ принадлежит классу $H_p^1(R^2)$ при некотором $p>2$, причем

$$\| U \|_{H_{p,Q}^1(R^2)} \equiv \| U \|_{H_p^1(R^2)} + \| Q(X)U \|_{L_p} \le C_0 T \| f \|_{L_p(R^2)}. \tag{8}$$

Однако $\| Q(X)U \|_p = \| Aw + B\overline{w} \|_p$ и согласно условию (2)

$$r_\varepsilon \| B\overline{w} \|_p \le \| Aw + B\overline{w} \|_p \le 2\| B\overline{w} \|_p,$$

где $r_\varepsilon > 0$. Эти оценки вместе с (8) доказывают теорему.

1. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. – М., 1959. – 628 с.
2. *Bers L.* Theory of pseudo-analytic function. – New York, 1953. – 190 p.
3. *Виноградов В. С.* О теореме Лиувилля для обобщенных аналитических функций // Докл. АН СССР. – 1968. – **183**, № 3. – С. 503–506.
4. *Виноградов В. С.* О теоремах Лиувилля для уравнения обобщенных аналитических функций // Дифференц. уравнения. – 1980. – **16**, № 1. – С. 42–46.
5. *Мухамадиев Э., Байзаев С.* К теории ограниченных решений обобщенной системы Коши – Римана // Докл. АН СССР. – 1986. – **287**, № 2. – С. 280–283.
6. *Оспанов К. Н., Сегизбаева Р. У.* Об условиях коэрцитивной разрешимости обобщенной системы Коши – Римана // Изв. АН КазССР. – 1989. – № 5. – С. 24–27.
7. *Оспанов К. Н.* Разрешимость и свойства решений нелинейной обобщенной системы Бельтрами с неограниченными коэффициентами // Новые исследования в вычислительной и прикладной математике. – Караганда, 1993. – С. 38–49.
8. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм рядов и произведений. – М.: Физматгиз, 1962. – 1100 с.
9. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1977. – 456 с.
10. *Отелбаев М. О.* Оценки спектра оператора Штурма – Лиувилля. – Алматы: Гылым, 1990. – 191 с.

Получено 30.03.95