УДК 517.9

И. П. Мельниченко, С. А. Плакса
(Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ПОЛЯ С ОСЕВОЙ СИММЕТРИЕЙ И АЛГЕБРЫ МОНОГЕННЫХ ФУНКЦИЙ ВЕКТОРНОГО АРГУМЕНТА. I

We obtain a new representation of potential and flow functions for space potential solenoidal fields with axial symmetry. We study principal algebraic-analytical properties of monogenic functions of vector variable with values in an infinite-dimensional Banach algebra of even Fourier series and describe the relationship between these functions and the axially symmetric potential and Stokes flow function. The suggested method for the description of the above-mentioned fields is an analog of the method of analytic functions in the complex plane for the description of plane potential fields.

Одержано нові зображення потенціалу та функції течії для просторових потенціальних соленоїдальних полів з осьовою симетрією. Вивчено основні алгебраїчно-аналітичні властивості моногенних функцій векторного аргумента зі значеннями в нескінченномірній банаховій алгебрі парних рядів Фур'є та встановлено зв'язок цих функцій з осесиметричним потенціалом та функцією течії Стокса. Запропонований підхід до опису вказаних полів є аналогом апарату аналітичних функцій у комплексній площині для опису плоских потенціальних полів.

Пространственное потенциальное соленоидальное поле, симметричное относительно оси Ox, описывается в меридианной плоскости xOy потенциалом $\varphi(x, y)$ и функцией тока Стокса $\psi(x, y)$, удовлетворяющими системе уравнений

$$\begin{aligned} y\frac{\partial\varphi}{\partial x} &= \frac{\partial\psi}{\partial y}, \\ y\frac{\partial\varphi}{\partial y} &= -\frac{\partial\psi}{\partial x}. \end{aligned} \qquad (1)$$

Функция $\psi(x, y)$ должна также удовлетворять условию

$$\psi(x, 0) \equiv 0, \qquad (2)$$

которое, например, в модели течения идеальной жидкости выражает отсутствие перетекания жидкости через ось Ox.

Из системы (1) при условии существования и непрерывности частных производных второго порядка функций $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ следуют уравнение для осесимметричного потенциала

$$y\Delta\varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0 \qquad (3)$$

и уравнение для функции тока Стокса

$$y\Delta\psi - \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0, \qquad (4)$$

где

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Область D назовем правильной в направлении оси Oy, если она симметрична относительно оси Ox и вместе с каждой точкой (x_0, y_0) содержит отрезок $\{(x_0, y): |y| \le |y_0|\}$.

* Выполнена при частичной поддержке Международных научных фондов (гранты № UB4000 ISF и № 94-1474 INTAS) и Государственного комитета Украины по вопросам науки и технологий (грант № 11.3/12).

Известно (см., например, [1, 2]), что функция

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x + iy\cos\tau)\, d\tau \tag{5}$$

является решением уравнения (3) в области D, правильной в направлении оси Oy, при условии, что функция $f(z)$ — аналитическая в области D_z комплексной переменной z, конгруэнтной области D при соответствии $z = x + iy$, $(x, y) \in D$.

Отметим, что в [1, 2] условие правильности области D в направлении оси Oy не упоминается, хотя, как это следует из анализа формулы (5) и приведенных в [1, 2] доказательств, неявно предполагается и используется.

Для уравнения (3) известен [1] также обратный результат: если решение $\varphi(x, y)$ уравнения (3) в окрестности точки $(x_0, 0)$ допускает разложение в степенной ряд по произведениям степеней $(x - x_0)$ и y, то в этой же окрестности $\varphi(x, y)$ представимо формулой (5), где $f(z)$ — конкретная аналитическая функция комплексной переменной $z = x + iy$.

В [2] показано, что пара функций (5) и

$$\psi(x, y) = \frac{1}{\pi}\int_0^y y\left(\int_0^\pi f'(x + iy\cos\tau)\, d\tau\right) dy \tag{6}$$

является решением системы (1) при тех же условиях, наложенных на функцию $f(z)$, что и в формуле (4), и выполняется тождество (2).

В [3] рассмотрена бесконечномерная алгебра H над полем действительных чисел, определенным образом связанная с системой (1). При помощи алгебры H в [3] получено более простое, чем (6), представление функции $\psi(x, y)$ в области D:

$$\psi(x, y) = \frac{y}{\pi i}\int_0^\pi f(x + iy\cos\tau)\cos\tau\, d\tau, \tag{7}$$

где $f(z)$ так же, как и в формуле (5), является аналитической функцией комплексной переменной $z = x + iy$ в области D_z.

В пп. 1, 2 данной статьи будут построены новые формулы решений системы (1) для области D, обобщающие формулы (5)–(7), а также формулы решений системы (1) для внешности замыкания $\overline{D}$ области D, что ранее не рассматривалось. Также будет доказано, что этими формулами представляются все решения уравнений (3), (4) в указанных областях при более слабых, чем в обратном результате [1], предположениях.

В п. 3 изучаются алгебраико-аналитические свойства моногенных функций векторного аргумента со значениями в алгебре $H_{\mathbb{C}}$, которая является комплексификацией алгебры H из [3]. При изучении этих свойств и были получены новые формулы решений системы (1).

1. Пусть $\mathbb{R}$ — множество действительных чисел. Декартову меридианную плоскость xOy будем обозначать также через $\mathbb{R}^2$.

Условимся, что всюду в дальнейшем D — это правильная в направлении оси Oy область меридианной плоскости xOy. Область комплексной плоскости $\mathbb{C}$, конгруэнтную области D при соответствии $z = x + iy$, $(x, y) \in D$, будем обозначать через D_z и называть правильной в направлении мнимой оси. Замыкания областей D и D_z обозначим соответственно через $\overline{D}$ и $\overline{D_z}$, а их границы — через ∂D и ∂D_z. Обозначим

$$M_D := \max_{(x,\,y)\in\overline{D}} x,$$

если максимум существует, и $M_D := \infty$, если такого нет, а также

$$m_D := \min_{(x,\,y)\in\overline{D}} x,$$

если минимум существует, и $m_D := -\infty$, если он отсутствует.

Если $z_0 \in D_z$, $\operatorname{Im} z_0 \neq 0$, то $\sqrt{(z-z_0)(z-\overline{z}_0)}$ понимаем как непрерывную ветвь аналитической функции $G(z) = \sqrt{(z-z_0)(z-\overline{z}_0)}$ с разрезом $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = \operatorname{Re} z_0,\ |\operatorname{Im} z| \leq |\operatorname{Im} z_0|\}$ такую, что $G(z) > 0$ для произвольных $z \in \mathbb{R} : z > \operatorname{Re} z_0$.

Если $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}_z$, $\operatorname{Im} z_0 \neq 0$, то $\sqrt{(z-z_0)(z-\overline{z}_0)}$ будет обозначать непрерывную ветвь той же аналитической функции $G(z)$ с разрезом $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = \operatorname{Re} z_0,\ |\operatorname{Im} z| \geq |\operatorname{Im} z_0|\}$ такую, что $G(z) > 0$ для произвольных $z \in \mathbb{R} : z > \operatorname{Re} z_0$.

В случае, когда кривая γ является границей правильной в направлении мнимой оси области $D_z \subset \mathbb{C}$, то положительным направлением обхода γ будем считать такое направление, при котором область D_z остается слева.

Жорданову кривую γ, $\gamma \subset \mathbb{C}$ (или $\gamma \subset \mathbb{R}^2$), которая проходит через бесконечно удаленную точку ∞, будем называть спрямляемой, если ее пересечение с любым кругом спрямляемо. Интеграл по неограниченной спрямляемой жордановой кривой $\gamma \subset \mathbb{C}$ определим следующим образом:

$$\int_\gamma f(t)\,dt := \lim_{N\to\infty} \int_{\{t\in\gamma:\,|t|\leq N\}} f(t)\,dt,$$

если предел в правой части равенства существует.

Для ограниченной или неограниченной жордановой спрямляемой кривой γ в $\mathbb{C}$ через $L(\gamma)$ обозначим множество суммируемых на γ комплекснозначных функций.

Обозначим $c_\varepsilon(z) := \{t \in \mathbb{C} : |t-z| = \varepsilon\}$. Положительным направлением обхода окружности $c_\varepsilon(z)$ считаем такое направление, при котором точка z остается слева. Через $s[z_1, z_2]$ обозначим отрезок, соединяющий точки z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$ с началом в точке z_1 концом в точке z_2.

Рассмотрим вначале область D с жордановой спрямляемой границей. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть область D (как ограниченная, так и не ограниченная) имеет жорданову спрямляемую границу ∂D и $f \in L(\partial D_z)$. Тогда пара функций*

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\partial D_z} \dfrac{f(t)}{\sqrt{(t-x-iy)(t-x+iy)}}\,dt & \text{при} \quad y\neq 0,\ (x,y)\notin\partial D, \\ \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\partial D_z} \dfrac{f(t)}{t-x}\,dt & \text{при} \quad y=0,\ (x,0)\notin\partial D,\ x<M_D, \\ -\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\partial D_z} \dfrac{f(t)}{t-x}\,dt & \text{при} \quad y=0,\ (x,0)\notin\partial D,\ x>M_D, \end{cases} \tag{8}$$

$$\psi(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\partial D_z} f(t) \left(1 - \dfrac{t-x}{\sqrt{(t-x-iy)(t-x+iy)}}\right) dt & \\ & \text{при} \quad y \neq 0, \ (x, y) \notin \partial D, \\ 0 & \text{при} \quad y = 0, \ (x, 0) \notin \partial D, \quad x < M_D, \\ \dfrac{1}{\pi i} \displaystyle\int_{\partial D_z} f(t)\, dt & \text{при} \quad y = 0, \ (x, 0) \notin \partial D, \quad x > M_D, \end{cases} \tag{9}$$

является решением системы (1) *при* $(x, y) \notin \partial D$. *Кроме того, функции* (8), (9) *являются соответственно решениями уравнений* (3), (4) *при* $(x, y) \notin \partial D$.

Доказательство. Учитывая, что при каждом $t \in \partial D_z$ функция

$$\Phi_t(x, y) := \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{(t-x-iy)(t-x+iy)}} & \text{при} \quad y \neq 0, \ (x, y) \notin \partial D, \\ \dfrac{1}{t-x} & \text{при} \quad y = 0, \ (x, 0) \notin \partial D, \quad x < M_D, \\ -\dfrac{1}{t-x} & \text{при} \quad y = 0, \ (x, 0) \notin \partial D, \quad x > M_D, \end{cases}$$

имеет в D и $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$ непрерывные частные производные любого порядка, по стандартной схеме [4, с. 661] доказывается, что функция (8) также имеет в D и $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$ непрерывные частные производные любого порядка. При этом

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_z} f(t) \frac{\partial \Phi_t}{\partial x}(x, y)\, dt, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_z} f(t) \frac{\partial \Phi_t}{\partial y}(x, y)\, dt$$

и т. п. Аналогично получаем

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_z} f(t) \frac{\partial \Psi_t}{\partial x}(x, y)\, dt, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_z} f(t) \frac{\partial \Psi_t}{\partial y}(x, y)\, dt$$

и т. п., где

$$\Psi_t(x, y) := \begin{cases} 1 - \dfrac{t-x}{\sqrt{(t-x-iy)(t-x+iy)}} & \text{при} \quad y \neq 0, \ (x, y) \notin \partial D, \\ 0 & \text{при} \quad y = 0, \ (x, 0) \notin \partial D, \quad x < M_D, \\ 2 & \text{при} \quad y = 0, \ (x, 0) \notin \partial D, \quad x > M_D. \end{cases}$$

Теперь уравнения системы (1), а также (3) и (4), при подстановке в них частных производных функций (8), (9) превращаются в тождества вне границы ∂D. Теорема доказана.

В приводимых ниже теоремах 2–4 ослабляется условие $f \in L(\partial D_z)$ теоремы 1 в случае неограниченной области D.

Теорема 2. *Пусть D — неограниченная область с жордановой спрямляемой границей и функция $f\colon \partial D_z \to \mathbb{C}$ удовлетворяет условию*

$$\int_{\partial D_z} \frac{|f(t)|}{|t-a|} |dt| < \infty, \tag{10}$$

где a — некоторая точка, не принадлежащая кривой ∂D_z. Тогда функция (8) *является решением уравнения* (3) *при* $(x, y) \notin \partial D$.

Доказательство. Очевидно, условие (10) обеспечивает существование интегралов в формуле (8) и их частных производных, входящих в уравнение (3). Теперь теорема доказывается так же, как и теорема 1.

Теорема 3. *Пусть D — неограниченная область с жордановой спрямляемой границей. Если функция $f\colon \partial D_z \to \mathbb{C}$ удовлетворяет условию*

$$\int_{\partial D_z} \frac{|f(t)|}{|t-a|^2}|dt| < \infty, \tag{11}$$

где a — некоторая точка, не принадлежащая кривой ∂D_z, то функция (9) является решением уравнения (4) при $(x, y) \in D$. Если же вместо условия (11) выполняется условие (10), то пара функций (8), (9) является решением системы (1) при $(x, y) \in D$.

Доказательство. Легко установить, что для каждой точки $(x, y) \in D$ такой, что $y \neq 0$, справедливо следующее асимптотическое соотношение при $t \to \infty$, $t \in \partial D_z$:

$$\frac{1}{\sqrt{(t-x-iy)(t-x+iy)}} = \frac{1}{t-x}\left(1 - \frac{y^2}{2(t-x)^2} + o\left(\frac{y^2}{(t-x)^2}\right)\right). \tag{12}$$

Из соотношений (12), (11) следует существование интеграла в формуле (9) при $y \neq 0$, а также частных производных функции (9) в области D, входящих в уравнение (4). Далее теорема доказывается аналогично теореме 1 с учетом того, что неравенство (11) является следствием неравенства (10).

Теорема 4. *Пусть D — неограниченная область с жордановой спрямляемой границей такая, что одна и только одна из величин M_D, m_D бесконечна. Если функция $f\colon \partial D_z \to \mathbb{C}$ удовлетворяет условию (11), то функция*

$$\psi(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\partial D_z} f(t)\left(1 - \frac{t-x}{\sqrt{(t-x-iy)(t-x+iy)}}\right)dt, \\ \qquad \text{если} \quad y \neq 0, \ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}, \ M_D = \infty, \quad m_D > -\infty, \\ \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\partial D_z} f(t)\left(-1 - \frac{t-x}{\sqrt{(t-x-iy)(t-x+iy)}}\right)dt, \\ \qquad \text{если} \quad y \neq 0, \ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}, \ M_D < \infty, \quad m_D = -\infty, \\ 0, \qquad \text{если} \quad y = 0, \ (x, 0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}, \end{cases} \tag{13}$$

является решением уравнения (4) при $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$. Если же вместо условия (11) выполняется условие (10), то пара функций (8), (13) является решением системы (1) при $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$.

Доказательство. В данном случае при $t \to \infty$, $t \in \partial D_z$ справедливо асимптотическое соотношение (12), если $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$, $M_D = \infty$, $M_D > -\infty$, и

$$\frac{1}{\sqrt{(t-x-iy)(t-x+iy)}} = -\frac{1}{t-x}\left(1 - \frac{y^2}{2(t-x)^2} + o\left(\frac{y^2}{(t-x)^2}\right)\right),$$

если $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$, $M_D < \infty$, $m_D = -\infty$. С учетом этих соотношений теорема доказывается аналогично теореме 3.

Теоремы 5–7 формулируются для правильных в направлении оси Oy областей D, имеющих произвольную границу (т. е. граница может быть и неспрямляемой кривой).

Теорема 5. *Каждой голоморфной в области* D_z *функции* $F: \partial D_z \to \mathbb{C}$ *соответствует пара* $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ *решений системы* (1) *в области* D:

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_\gamma \frac{F(t)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}}\, dt & \text{при} \quad y \neq 0, \\ F(x) & \text{при} \quad y = 0, \end{cases} \tag{14}$$

$$\psi(x, y) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_\gamma \frac{F(t)(t-x)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}}\, dt & \text{при} \quad y \neq 0, \\ 0 & \text{при} \quad y = 0, \end{cases} \tag{15}$$

где $(x, y) = D$, $z = x + iy$, γ — *произвольная замкнутая жорданова спрямляемая кривая, ограничивающая правильную в направлении мнимой оси область* $\overline{D'_z} \subset D_z$ *и* $z \in D'_z$. *При этом функции* (14), (15) *являются соответственно решениями уравнений* (3), (4) *при* $(x, y) \in D$.

Доказательство. В качестве γ можно взять, по крайней мере, кривую, состоящую из полуокружностей $\{t \in c_\varepsilon(z): |\operatorname{Im} t| \geq |y|\}$, $\{t \in c_\varepsilon(\bar{z}): |\operatorname{Im} t| \geq |y|\}$ и отрезков, соединящих точки $z - \varepsilon$, $\bar{z} - \varepsilon$ и $z + \varepsilon$, $\bar{z} + \varepsilon$, где

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \min\left\{|y|, \min_{t \in \partial D_z} |t - z|\right\}.$$

Тогда утверждение теоремы следует из теоремы 1.

Справедливы и обратные результаты о представимости решений уравнений (3), (4) в области D формулами (14), (15) при естественных предположениях о функциях $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$.

В доказательстве представимости потенциала $\varphi(x, y)$ в области D формулой (14) используется следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть функция* $\varphi(x, y)$ *имеет в области* D *непрерывные частные производные второго порядка и является решением уравнения* (3) *в* D. *Тогда функции* $F_1(x + iy) = u_1(x, y) + iv_1(x, y)$ *и* $F_2(x + iy) = u_2(x, y) + iv_2(x, y)$, *где*

$$u_1(x, y) := \begin{cases} \tilde{u}_1(x, y) \equiv \varphi(x, 0) + y \displaystyle\int_0^y \frac{\varphi'_s(x, s)}{\sqrt{y^2 - s^2}}\, ds & \text{при} \quad (x, y) \in D, \quad y > 0, \\ \varphi(x, 0) & \text{при} \quad (x, y) \in D, \quad y = 0, \\ \tilde{u}_1(x, -y) & \text{при} \quad (x, y) \in D, \quad y < 0, \end{cases} \tag{16}$$

$$v_1(x, y) := \begin{cases} \tilde{v}_1(x, y) \equiv \displaystyle\int_0^y \frac{s\varphi'_x(x, s)}{\sqrt{y^2 - s^2}}\, ds & \text{при} \quad (x, y) \in D, \quad y > 0, \\ 0 & \text{при} \quad (x, y) \in D, \quad y = 0, \\ -\tilde{v}_1(x, -y) & \text{при} \quad (x, y) \in D, \quad y < 0, \end{cases} \tag{17}$$

$$u_2(x, y) := \begin{cases} \tilde{u}_2(x, y) \equiv \varphi(x, 0) - y \displaystyle\int_{-y}^0 \frac{\varphi'_s(x, s)}{\sqrt{y^2 - s^2}}\, ds & \text{при} \quad (x, y) \in D, \quad y > 0, \\ \varphi(x, 0) & \text{при} \quad (x, y) \in D, \quad y = 0, \\ \tilde{u}_2(x, -y) & \text{при} \quad (x, y) \in D, \quad y < 0, \end{cases} \tag{18}$$

$$v_2(x, y) := \begin{cases} \tilde{v}_2(x, y) \equiv -\int\limits_{-y}^{0} \dfrac{s\,\varphi'_x(x, s)}{\sqrt{y^2 - s^2}}\, ds & \text{при} \quad (x, y) \in D, \quad y > 0, \\ 0 & \text{при} \quad (x, y) \in D, \quad y = 0, \\ -\tilde{v}_2(x, -y) & \text{при} \quad (x, y) \in D, \quad y < 0, \end{cases} \tag{19}$$

являются голоморфными в области D_z.

Доказательство. Докажем, что при $(x, y) \in D$, $y > 0$, выполняются условия Коши–Римана:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial v_1}{\partial y}(x, y), \\ \frac{\partial u_1}{\partial y}(x, y) &= -\frac{\partial v_1}{\partial x}(x, y). \end{aligned} \tag{20}$$

Проинтегрировав по частям интегралы в определении функций $\tilde{u}_1(x, y)$, $\tilde{v}_1(x, y)$, получим

$$\int\limits_0^y \frac{\varphi'_s(x, s)}{\sqrt{y^2 - s^2}}\, ds = \frac{\pi}{2}\varphi'_y(x, y) - \int\limits_0^y \varphi''_{ss}(x, s) \arcsin\frac{s}{y}\, ds,$$

$$\tilde{v}_1(x, y) = y\,\varphi'_x(x, 0) + \int\limits_0^y \varphi''_{xs}(x, s)\sqrt{y^2 - s^2}\, ds.$$

При $y = s$ уравнение (3) запишем в следующем виде:

$$\varphi'_s(x, s) + s\,\varphi''_{ss}(x, s) = -s\,\varphi''_{xx}(x, s). \tag{21}$$

Тогда, учитывая равенство (21), получаем

$$\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial y}(x, y) =$$

$$= \int\limits_0^y \frac{\varphi'_s(x, s)}{\sqrt{y^2 - s^2}}\, ds + y\left(\frac{\pi}{2}\varphi''_{yy}(x, y) - \frac{\pi}{2}\varphi''_{yy}(x, y) - \int\limits_0^y \frac{\varphi'_{ss}(x, s)}{\sqrt{1 - s^2/y^2}}\left(-\frac{s}{y^2}\right) ds\right) =$$

$$= \int\limits_0^y \frac{\varphi'_s(x, s)}{\sqrt{y^2 - s^2}}\, ds + \int\limits_0^y \frac{s\,\varphi''_{ss}(x, s)}{\sqrt{y^2 - s^2}}\, ds = -\int\limits_0^y \frac{s\,\varphi''_{xx}(x, s)}{\sqrt{y^2 - s^2}}\, ds.$$

Далее имеем

$$\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x}(x, y) = \varphi'_x(x, 0) + y\int\limits_0^y \frac{\varphi''_{sx}(x, s)}{\sqrt{y^2 - s^2}}\, ds,$$

$$\frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial x}(x, y) = \int\limits_0^y \frac{s\,\varphi''_{xx}(x, s)}{\sqrt{y^2 - s^2}}\, ds,$$

$$\frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial y}(x, y) = \varphi'_x(x, 0) + y\int\limits_0^y \frac{\varphi''_{sx}(x, s)}{\sqrt{y^2 - s^2}}\, ds.$$

Таким образом, условия (20) выполняются при $(x, y) \in D$, $y > 0$. В силу принципа симметрии [5, с. 148] функция F_1 голоморфна в области D_z.

Аналогично доказывается голоморфность функции F_2 в области D_z. Лемма доказана.

Теорема 6. *Пусть функция* $\varphi(x, y)$ *имеет в области* D *непрерывные частные производные второго порядка и является решением уравнения* (3) *в* D. *Тогда существует единственная голоморфная в области* D_z *функция* $F: D_z \to \mathbb{C}$ *такая, что справедливо равенство* (14) *для всех* $(x, y) \in D$, *и при этом* $F(x+iy) = u_1(x, y) + iv_1(x, y)$, *где функции* $u_1(x, y)$, $v_1(x, y)$ *определяются соотношениями* (16), (17).

Доказательство. Пусть $(x, y) \in D$, $y \neq 0$, $z = x + iy$ и кривая γ имеет такие же свойства, как и в теореме 5. Рассмотрим интегральное уравнение

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{F(t)}{\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})}}\,dt = \varphi(x, y) \tag{22}$$

с искомой функцией $F(t)$. Покажем, что оно имеет единственное решение в классе функций, голоморфных в области D_z.

Докажем сначала, что существует единственная функция $F_1(t)$, голоморфная в области D_z, такая, что равенство (22) выполняется при $F(t) = F_1(t)$ и всех $(x, y) \in D^+ := \{(x, y) \in D: y > 0\}$.

Пусть $(x, y) \in D^+$ и

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\min\left\{y, \min_{t\in\gamma}|t-z|\right\}.$$

Рассмотрим области $E_\varepsilon^{\pm} := \{t \in D'_z: |t-z| > \varepsilon, |t-\overline{z}| > \varepsilon, \pm(\operatorname{Re} t - x) > 0\}$. Положительным направлением обхода границы $\partial E_\varepsilon^{\pm}$ будем считать такое направление, при котором область $E_\varepsilon^{\pm}$ остается слева. Обозначим

$$\left(\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})}\right)^{\pm} := \lim_{\tau\to t,\, \tau\in E_\varepsilon^{\pm}} \sqrt{(\tau-z)(\tau-\overline{z})} \quad \forall t \in \partial E_\varepsilon^{\pm}.$$

Тогда интеграл из уравнения (22) при $F(t) = F_1(t)$ представляется суммой четырех интегралов:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{F_1(t)}{\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})}}\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial E_\varepsilon^-} \frac{F_1(t)}{\left(\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})}\right)^-}\,dt +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial E_\varepsilon^+} \frac{F_1(t)}{\left(\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})}\right)^+}\,dt - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial E_\varepsilon^- \setminus\gamma} \frac{F_1(t)}{\left(\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})}\right)^-}\,dt -$$

$$- \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial E_\varepsilon^+ \setminus\gamma} \frac{F_1(t)}{\left(\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})}\right)^+}\,dt := I_1 + I_2 + I_3 + I_4.$$

Если $F_1(t)$ голоморфна в области D_z, то по теореме Коши $I_1 = I_2 = 0$. Обозначим

$$\Gamma^- := \partial E_\varepsilon^- \setminus (\gamma \cup c_\varepsilon(z) \cup c_\varepsilon(\overline{z}) \cup s[\overline{z} + i\varepsilon, z - i\varepsilon]),$$

$$\Gamma^+ := \partial E_\varepsilon^+ \setminus (\gamma \cup c_\varepsilon(z) \cup c_\varepsilon(\overline{z}) \cup s[z - i\varepsilon, \overline{z} + i\varepsilon]).$$

Тогда для суммы отличных от нуля интегралов имеем следующее представление:

$$I_3 + I_4 = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{\Gamma^-} + \int\limits_{\Gamma^+}\right)\frac{F_1(t)}{\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})}}\,dt + \frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{c_\varepsilon(z)} + \int\limits_{c_\varepsilon(\overline{z})}\right)\frac{F_1(t)}{\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})}}\,dt -$$

$$- \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{s[\bar z + i\varepsilon,\, z - i\varepsilon]} \frac{F_1(t)}{\left(\sqrt{(t-z)(t-\bar z)}\right)^-} dt - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{s[z - i\varepsilon,\, \bar z + i\varepsilon]} \frac{F_1(t)}{\left(\sqrt{(t-z)(t-\bar z)}\right)^+} dt :=$$

$$:= I_5 + I_6 + I_7 + I_8.$$

Поскольку множества Γ^- и Γ^+ совпадают, а их ориентация противоположна, то $I_5 = 0$.

Оценим модуль интеграла I_6:

$$|I_6| \le \frac{1}{2\pi} \max_{t \in \overline{D'_z}} |F_1(t)| \left(\int\limits_{c_\varepsilon(z)} + \int\limits_{c_\varepsilon(\bar z)} \right) \frac{|dt|}{\sqrt{\varepsilon(3y/2)}} \le c\sqrt{\varepsilon}, \tag{23}$$

где постоянная c не зависит от ε.

Учитывая, что

$$\left(\sqrt{(t-z)(t-\bar z)}\right)^+ = \sqrt{y^2 - (\operatorname{Im} t)^2} \quad \forall t \in s[z - i\varepsilon,\ \bar z + i\varepsilon]$$

и

$$\left(\sqrt{(t-z)(t-\bar z)}\right)^- = -\sqrt{y^2 - (\operatorname{Im} t)^2} \quad \forall t \in s[\bar z + i\varepsilon,\ z - i\varepsilon],$$

получаем

$$I_7 + I_8 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-y+\varepsilon}^{y-\varepsilon} \frac{F_1(x + i\eta)}{\sqrt{y^2 - \eta^2}} d\eta.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{F_1(t)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar z)}} dt = I_6 + \frac{1}{\pi} \int\limits_{-y+\varepsilon}^{y-\varepsilon} \frac{F_1(x + i\eta)}{\sqrt{y^2 - \eta^2}} d\eta. \tag{24}$$

Устремляя ε к нулю в равенстве (24), с учетом оценки (23) имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{F_1(t)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar z)}} dt = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-y}^{y} \frac{F_1(x + i\eta)}{\sqrt{y^2 - \eta^2}} d\eta.$$

Итак, уравнение (22) при $(x, y) \in D^+$ приведено к уравнению

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{-y}^{y} \frac{F_1(x + i\eta)}{\sqrt{y^2 - \eta^2}} d\eta = \varphi(x, y). \tag{25}$$

Введем в рассмотрение функцию

$$\tilde u_1(x, \eta) := \frac{1}{2} F_1(x + i\eta) + \frac{1}{2} F_1(x - i\eta).$$

Для ее нахождения из (25) получаем уравнение Абеля

$$\frac{2}{\pi} \int\limits_0^y \frac{\tilde u_1(x, \eta)}{\sqrt{y^2 - \eta^2}} d\eta = \varphi(x, y), \tag{26}$$

разрешимое [6, с. 32] в явном виде. Значит, имеем

$$\tilde u_1(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \int\limits_0^y \frac{s\,\varphi(x, s)}{\sqrt{y^2 - s^2}} ds =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y} \left(-\varphi(x, s)\sqrt{y^2 - s^2}\, \Big|_{s=0}^{s=y} + \int\limits_0^y \varphi'_s(x, s)\sqrt{y^2 - s^2}\, ds \right) = \varphi(x, 0) + y \int\limits_0^y \frac{\varphi'_s(x, s)}{\sqrt{y^2 - s^2}} ds.$$

Определим функцию $u_1(x, y)$ соотношениями (16). Из леммы 1 следует, что $u_1(x, y)$ — гармоническая в области D функция и $\frac{\partial u_1}{\partial y}(x, 0) = 0$ для всех $(x, 0) \in D$. Поэтому существует единственная гармоническая в области D функция $v_1(x, y)$ такая, что $v_1(x, 0) = 0$ для всех $(x, 0) \in D$ и функция $u_1(x, y) + iv_1(x, y)$ голоморфна в области D_z. Согласно лемме 1 функция $v_1(x, y)$ определяется соотношениями (17). Следовательно, равенство (22) выполняется при $F(x+iy) = F_1(x+iy) := u_1(x, y) + iv_1(x, y)$ и всех $(x, y) \in D^+$, причем функция $F_1(t)$ определяется единственным образом.

Аналогично доказывается, что при $(x, y) \in D$, $y < 0$, равенство (22) выполняется тогда и только тогда, когда $F(x+iy) = F_2(x+iy) := u_2(x, y) + iv_2(x, y)$, где функции $u_2(x, y)$, $v_2(x, y)$ определяются соотношениями (18), (19).

Согласно теореме единственности аналитических функций [5, с. 68] $F_1(z) = F_2(z)$ для всех $z \in D_z$. Таким образом, существует единственная функция $F(z) := F_1(z)$ для всех $z \in D_z$, голоморфная в области D_z, такая, что выполняется равенство (14). Теорема доказана.

В доказательстве представимости функции тока Стокса в области D формулой (15) используется следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть функция $\psi(x, y)$ имеет в области D непрерывные частные производные второго порядка, удовлетворяет условию*

$$\left| \int_0^y \frac{|\psi''_{xx}(x, s)|}{s} ds \right| < \infty \quad \forall (x, y) \in \{ (x, y) \in D : \ y \neq 0 \} \tag{27}$$

и является решением уравнения (3) *в* D. *Тогда функции* $F_3(x+iy) = u_3(x, y) + iv_3(x, y)$ *и* $F_4(x+iy) = u_4(x, y) + iv_4(x, y)$, *где*

$$v_3(x, y) := \begin{cases} \tilde{v}_3(x, y) \equiv \displaystyle\int_0^y \frac{\psi'_s(x, s)}{\sqrt{y^2 - s^2}} ds & \text{при} \quad (x, y) \in D, \quad y > 0, \\ 0 & \text{при} \quad (x, y) \in D, \quad y = 0, \\ -\tilde{v}_3(x, -y) & \text{при} \quad (x, y) \in D, \quad y < 0, \end{cases} \tag{28}$$

$$u_3(x, y) := \begin{cases} \tilde{u}_3(x, y) \equiv \pm \displaystyle\int_{x_0}^x \Delta\psi(x, 0)\, dx - y \int_0^y \frac{\psi'_x(x, s)}{s\sqrt{y^2 - s^2}} ds & \\ \qquad\qquad\qquad \text{при} \quad (x, y) \in D, \quad y > 0, \ \pm(x - x_0) \geq 0, & \\ \pm \displaystyle\int_{x_0}^x \Delta\psi(x, 0)\, dx \qquad \text{при} \quad (x, y) \in D, \quad y = 0, \ \pm(x - x_0) \geq 0, & \\ \tilde{u}_3(x, -y) \qquad\qquad \text{при} \quad (x, y) \in D, \quad y < 0, & \end{cases} \tag{29}$$

$$v_4(x, y) := \begin{cases} \tilde{v}_4(x, y) \equiv - \displaystyle\int_{-y}^0 \frac{\psi'_s(x, s)}{\sqrt{y^2 - s^2}} ds & \text{при} \quad (x, y) \in D, \quad y > 0, \\ 0 & \text{при} \quad (x, y) \in D, \quad y = 0, \\ -\tilde{v}_4(x, -y) & \text{при} \quad (x, y) \in D, \quad y < 0, \end{cases}$$

$$u_4(x,y) := \begin{cases} \tilde{u}_4(x,y) \equiv \pm\int\limits_{x_0}^{x} \Delta\psi(x,0)\,dx - y\int\limits_{-y}^{0} \dfrac{\psi'_x(x,s)}{s\sqrt{y^2-s^2}}\,ds \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{при} \quad (x,y)\in D, \ \ y>0, \ \ \pm(x-x_0)\ge 0, \\ \pm\int\limits_{x_0}^{x} \Delta\psi(x,0)\,dx \qquad \text{при} \quad (x,y)\in D, \ \ y=0, \ \ \pm(x-x_0)\ge 0, \\ \tilde{u}_4(x,-y) \qquad\qquad \text{при} \quad (x,y)\in D, \ \ y<0, \end{cases}$$

$x_0\in\mathbb{R}$, $(x_0,0)\in D$, *являются голоморфными в области* D_z.

Доказательство. Пусть $(x,y)\in D$, $y>0$. Так же, как и в доказательстве леммы 1, получаем

$$\tilde{v}_3(x,y) = \frac{\pi}{2}\psi'_y(x,y) - \int\limits_0^y \psi''_{ss}(x,s)\arcsin\frac{s}{y}\,ds,$$

$$\frac{\partial\tilde{v}_3}{\partial x}(x,y) = \int\limits_0^y \frac{\psi''_{sx}(x,s)}{\sqrt{y^2-s^2}}\,ds,$$

$$\frac{\partial\tilde{v}_3}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{y}\int\limits_0^y \frac{s\,\psi''_{ss}(x,s)}{\sqrt{y^2-s^2}}\,ds,$$

$$\frac{\partial\tilde{u}_3}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_0^y \psi''_{xs}(x,s)\left(\ln\left(y+\sqrt{y^2-s^2}\right)-\ln s\right)ds = -\int\limits_0^y \frac{\psi''_{xs}(x,s)}{\sqrt{y^2-s^2}}\,ds.$$

Учитывая условие (27) и следствие равенства (4) при $s\neq 0$:

$$\psi''_{xx}(x,s) = \frac{1}{s}\psi'_s(x,s) - \psi''_{ss}(x,s),$$

получаем

$$\frac{\partial\tilde{u}_3}{\partial x}(x,y) = \Delta\psi(x,0) - y\int\limits_0^y \frac{\psi''_{xx}(x,s)}{s\sqrt{y^2-s^2}}\,ds =$$

$$= \Delta\psi(x,0) + y\lim_{\varepsilon\to 0+0}\left(\int\limits_\varepsilon^y \frac{\psi''_{ss}(x,s)}{s\sqrt{y^2-s^2}}\,ds - \int\limits_\varepsilon^y \frac{\psi'_s(x,s)}{s^2\sqrt{y^2-s^2}}\,ds\right) = \Delta\psi(x,0) +$$

$$+ \lim_{\varepsilon\to 0+0}\left(y\int\limits_\varepsilon^y \frac{\psi''_{ss}(x,s)}{s\sqrt{y^2-s^2}}\,ds + \frac{\sqrt{y^2-s^2}}{ys}\psi'_s(x,s)\Bigg|_{s=\varepsilon}^{s=y} - \frac{1}{y}\int\limits_\varepsilon^y \frac{\psi''_{ss}(x,s)}{s}\sqrt{y^2-s^2}\,ds\right) =$$

$$= \Delta\psi(x,0) + \lim_{\varepsilon\to 0+0}\left(\frac{1}{y}\int\limits_\varepsilon^y \frac{s\,\psi''_{ss}(x,s)}{\sqrt{y^2-s^2}}\,ds - \frac{\sqrt{y^2-s^2}}{y}\Delta\psi(x,\varepsilon)\right) = \frac{1}{y}\int\limits_0^y \frac{s\,\psi''_{ss}(x,s)}{\sqrt{y^2-s^2}}\,ds.$$

Таким образом, выполняются условия Коши–Римана:

$$\frac{\partial u_3}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v_3}{\partial y}(x,y), \qquad \frac{\partial u_3}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial v_3}{\partial x}(x,y) \quad \text{при} \quad (x,y)\in D, \quad y>0.$$

В силу принципа симметрии [5, с. 148] функция F_3 голоморфна в области D_z. Аналогично доказывается голоморфность функции F_4 в области D_z. Лемма доказана.

Теорема 7. *Пусть функция* $\psi(x, y)$ *имеет в области* D *непрерывные частные производные второго порядка и является решением уравнения* (4) *в* D, *при этом выполняются условие* (2) *при* $(x, 0) \in D$ *и условие* (27). *Тогда существует голоморфная в области* D_z *функция* F_0: $D_z \to \mathbb{C}$ *такая, что равенство* (15) *выполняется для всех* $(x, y) \in D$ *тогда и только тогда, когда* $F(t) = F_0(t) + c$, *где* c *— произвольная постоянная,* $F_0(x+iy) = u_3(x, y) + iv_3(x, y)$, *функции* $u_3(x, y)$, $v_3(x, y)$ *определяются соотношениями* (28), (29).

Доказательство. Пусть $(x, y) \in D$, $y > 0$, $z = x + iy$ и кривая γ имеет такие же свойства, как и в теореме 5. Рассмотрим интегральное уравнение

$$-\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{F(t)(t-x)}{\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})}}\, dt \;=\; \psi(x, y) \tag{30}$$

с искомой функцией $F(t)$, голоморфной в области D_z. Так же, как и в доказательстве теоремы 6, уравнение (30) приводится к уравнению Абеля

$$\frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{y} \frac{\eta \tilde{v}_3(x, \eta)}{\sqrt{y^2 - \eta^2}}\, d\eta \;=\; \psi(x, y), \tag{31}$$

где

$$\tilde{v}_3(x, \eta) \;:=\; \frac{i}{2} F(x - i\eta) - \frac{i}{2} F(x + i\eta).$$

Решением уравнения (31) является функция [6, с. 32]

$$\tilde{v}_3(x, y) \;=\; \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \int\limits_{0}^{y} \frac{s\psi(x, s)}{\sqrt{y^2 - s^2}}\, ds \;=\; \int\limits_{0}^{y} \frac{\psi'_s(x, s)}{\sqrt{y^2 - s^2}}\, ds.$$

Определим голоморфную в области D_z функцию F_3 так же, как и в лемме 2. Таким образом, равенство (30) выполняется при $F(t) = F_3(t)$ и $(x, y) \in D$, $y > 0$. Аналогично доказывается, что при $(x, y) \in D$, $y < 0$, равенство (30) выполняется, если $F(t) = F_4(t)$, где функция F_4 определена в лемме 2. По теореме единственности аналитических функций [5, с. 68] $F_3(z) = F_4(z) := F_0(z)$ для всех $z \in D_z$. Теперь доказательство завершается очевидным образом.

Отметим, что заменой $\eta = y \cos\tau$ переменной интегрирования при $y \neq 0$ формулы (5), (7) приводятся к равенствам вида (25), (31), эквивалентным формулам (22), (30). Таким образом, полученные в теоремах 1, 5 формулы решений системы (1) в случае правильной в направлении оси Oy области D являются более общими, чем формулы (5)–(7).

1. *Уиттекер Э. Т., Ватсон Д. Н.* Курс современного анализа: В 2-х ч. – М.: Физматгиз, 1963. – Ч. 2. – 515 с.
2. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1987. – 840 с.
3. *Мельниченко И. П.* Об одном методе описания потенциальных полей с осевой симметрией // Современные вопросы вещественного и комплексного анализа. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1984. – С. 98–102.
4. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3-х т. – М.: Наука, 1966. – Т. 27. – 800 с.
5. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1987. – 688 с.
6. *Забрейко П. П. и др.* Интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968. – 448 с.

Получено 28.12.95