УДК 531.36

С. П. Сосницький (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО ГІРОСКОПІЧНУ СТАБІЛІЗАЦІЮ КОНСЕРВАТИВНИХ СИСТЕМ

We consider conservative systems with gyroscopic forces and prove theorems on stability and instability of equilibrium of such systems. These theorems can be regarded as a generalization of the Kelvin theorems to nonlinear systems.

Розглядаються консервативні системи з гіроскопічними силами. Доводяться теореми про стійкість і нестійкість рівноваги таких систем. Одержані теореми є спробою поширити теореми Кельвіна на нелінійні системи.

1. Розглянемо голономну систему з n ступенями вільності

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0, \tag{1}$$

лагранжіан якої має вигляд

$$L(q, \dot q) = L_2(q, \dot q) + L_1(q, \dot q) + L_0(q) = \frac{1}{2}\dot q^T A(q)\dot q + f(q)^T \dot q + L_0(q). \tag{2}$$

Вважатимемо, що $L(q, \dot q) \in C^2(D_q \times R^n)$, квадратична форма $L_2(0, \dot q)$ додатно означена, точка $q = \dot q = 0$ відповідає положенню рівноваги системи (1) і $f(0) = 0$, $L_0(0) = 0$.

До рівнянь (1) з лагранжіаном (2), як правило, зводиться вивчення широкого класу гіроскопічних систем, для яких існує інтеграл Якобі

$$L_2 - L_0 = h = \text{const}. \tag{3}$$

Якщо в точці $q = 0$ функція $L_0(q)$ має строгий локальний максимум, то згідно з теоремою Рауса положення рівноваги $q = \dot q = 0$ системи (1) стійке, що безпосередньо випливає з інтеграла Якобі (3). Коли ж максимум відсутній, то може мати місце як стійкість, зумовлена, зокрема, стабілізуючою дією гіроскопічних сил, так і нестійкість (Кельвін [1], Четаєв [2], див. також огляди [3, 4]). При цьому стабілізуючий ефект сил гіроскопічної природи і донині залишається не зовсім з'ясованим [5], особливо коли мова йде про нелінійні системи з виродженим положенням рівноваги $(\partial^2 L_0 / \partial q^2 |_{q=0} = 0)$ [6].

Покладаючи в (1)

$$\frac{\partial L_2}{\partial \dot q} = A\dot q = p,$$

одержуємо систему

$$\dot q = \frac{\partial H}{\partial p},$$
$$\dot p = -\frac{\partial H}{\partial q} + GA^{-1}p, \qquad G = (g_{ij}) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial q_j} - \frac{\partial f_j}{\partial q_i}\right), \quad i, j = \overline{1, n}, \tag{4}$$

$$H(q, p) = \frac{1}{2}p^T A^{-1} p - L_0(q) = h = \text{const}. \tag{5}$$

Разом з тим, здійснюючи заміну $\partial L / \partial \dot q = p^*$, рівняння (1) можна зобразити в гамільтоновій формі

$$\dot{q} = \frac{\partial H^*}{\partial p^*}, \qquad \dot{p}^* = -\frac{\partial H^*}{\partial q}, \tag{6}$$

$$H^*(q, p^*) = \frac{1}{2}p^{*T}A^{-1}p^* - p^{*T}A^{-1}f - L_0 + \frac{1}{2}f^TA^{-1}f = h.$$

Система (1) як в формі (4), так і в формі (6), застосовуватиметься в подальшому.

Теорема 1. *Нехай в точці* $q = 0$ *функція* $L_0(q)$ *має строгий локальний мінімум і, крім того, існує таке* $\varepsilon > 0$ $\left(D_q \supset \bar{s}_\varepsilon = \{q \in R^n, \|q\| \le \varepsilon\}\right)$, *що:*

1) $\partial L_0 / \partial q \neq 0 \ \ \forall\, q \in s_\varepsilon \setminus \{0\}$;

2) $\det G \equiv 0$.

Тоді положення рівноваги $q = \dot{q} = 0$ *системи* (1), (2) *нестійке.*

Доведення. Оскільки лагранжіан (2) визначається з точністю до функції $d\Psi(q)/dt$, розглянемо поряд з системою (4) допоміжну еквівалентну їй систему

$$\dot{q} = \frac{\partial H_1}{\partial p}, \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H_1}{\partial q} + G\frac{\partial H_1}{\partial p}, \tag{7}$$

$$H_1(q, p) = \frac{1}{2}p^TA^{-1}p - p^TA^{-1}\frac{\partial \Psi}{\partial q} - L_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial q}\right)^T A^{-1}\frac{\partial \Psi}{\partial q}.$$

Вибір функції $\Psi(q)$ здійснимо таким чином, щоб виконувалась рівність

$$-L_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial q}\right)^T A^{-1}\frac{\partial \Psi}{\partial q} = 0. \tag{8}$$

Оскільки (8) — це рівняння Гамільтона – Якобі для натуральної системи

$$\dot{q} = \frac{\partial H_2}{\partial p}, \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H_2}{\partial q}, \tag{9}$$

$$H_2(q, p) = \frac{1}{2}p^TA^{-1}p - L_0 = h^* = \text{const}$$

при умові, що $h^* = 0$, наведемо розгорнутий запис рівнянь (7) при виконанні рівності (8). В результаті одержимо

$$\dot{q} = A^{-1}\left(p - \frac{\partial \Psi}{\partial q}\right), \tag{10}$$

$$\dot{p} = \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{1}{2}p^TA^{-1}p - p^TA^{-1}\frac{\partial \Psi}{\partial q}\right) + GA^{-1}\left(p - \frac{\partial \Psi}{\partial q}\right).$$

З умови існування розв'язку $p = 0$ системи (10) маємо

$$\dot{q} = A^{-1}\left(-\frac{\partial \Psi}{\partial q}\right), \tag{11}$$

$$GA^{-1}\left(-\frac{\partial \Psi}{\partial q}\right) = 0. \tag{12}$$

Оскільки $\det G \equiv 0$, то існує нетривіальний відносно компонент вектора $\partial\Psi / \partial q$ розв'язок системи (12). Таким чином, рівняння (11), (12) а отже, і розв'язок $p = 0$ системи (10) дійсно мають сенс і відображають рух натуральної системи (9) при певних початкових умовах. Останні є такими, що забезпечують еквівалентність систем (9) і (7) на множині спільних для них траєкторій Γ. Згідно з (9), (12) $\Gamma \setminus \{0, 0\} \neq \varnothing$.

Ідея доведення теореми саме в тому і полягає, щоб звести дослідження стійкості вихідної системи (1) до більш простої натуральної системи (9).

Припустимо, що положення рівноваги $q = \dot{q} = 0$ системи (1) стійке. Тоді множина додатних граничних точок $\Omega^+_{\Gamma \setminus \{0,0\}}$, що відповідає $\Gamma \setminus \{0, 0\}$, непорожня. Оскільки множина $\Omega^+_{\Gamma \setminus \{0,0\}}$ компактна, то вона містить мінімальну множину $\kappa \subset \Omega^+_{\Gamma \setminus \{0,0\}}$ [7, с. 401]. Множина κ також компактна, тому що є замкнутою підмножиною множини $\Omega^+_{\Gamma \setminus \{0,0\}}$. У відповідності з теоремою Біркгофа [7, с. 402] будь-яка траєкторія $\gamma \subset \kappa$ рекурентна, а отже стійка за Пуассоном.

На підставі зворотності системи (9) поряд з $\kappa = \kappa(q, p)$ існує множина $\kappa^*(q, p) = \kappa(q, -p)$, яка також рекурентна.

Для доведення нестійкості системи (1), аналогічно [8], розглянемо функцію дії за Гамільтоном

$$S = \int_0^t L(q, \dot{q})\, d\tau. \tag{13}$$

В умовах припущення про стійкість положення рівноваги $q = \dot{q} = 0$ функцію S завжди можна подати у вигляді [8]

$$S = S^*(\tau, q(\tau), \dot{q}(\tau))\big|_0^t. \tag{14}$$

Оскільки система (7) еквівалентна (1), то

$$L(q, \dot{q})\big|_{(q,\dot{q}) \in \Gamma} = \left[L_2(q, \dot{q}) + L_0(q)\right]\Big|_{(q,\dot{q}) \in \Gamma} = \left[\frac{1}{2} q^T A \dot{q} + L_0(q)\right]\Big|_{(q,\dot{q}) \in \Gamma}. \tag{15}$$

З урахуванням зворотності системи (9), а також рівностей (13) – (15), згідно з [8] робимо висновок, що функція дії за Гамільтоном S на одній з множин κ або κ^* обмежена зверху, Без обмеження загальності міркувань надалі вважатимемо, що S обмежена зверху на множині κ^*.

Користуючись гамільтоновою формою (6) системи (1) і, зокрема, зображаючи функцію S у вигляді

$$S = S^*(\tau, q(\tau), p^*(\tau))\big|_0^t,$$

обчислимо похідну S по векторному полю, що визначається рівняннями (6). В результаті отримаємо

$$\frac{dS}{dt} = L\left(q, \frac{\partial H^*}{\partial p^*}\right). \tag{16}$$

Інтегруючи рівність (16) вздовж стійкої за Пуассоном півтраєкторії $\gamma^* \subset \kappa^*$, а також беручи до уваги рівність (15), у відповідності зі схемою міркувань, викладеною в [8, с. 41], робимо висновок, що положення рівноваги $q = \dot{q} = 0$ системи (1) нестійке. Теорема 1 доведена.

Наслідок. *Нестійке ізольоване положення рівноваги $q = \dot{q} = 0$ голономної консервативної системи з непарним числом ступенів вільності неможливо стабілізувати з допомогою гіроскопічних сил, якщо в точці $q = 0$ функція $L_0(q)$ має строгий локальний мінімум.*

***Зауваження* 1.** Як відомо [9], розв'язок $\Psi(q)$ рівняння Гамільтона – Якобі (8) існує лише локально, в околі неособливих точок. Проте це не є перешкодою для використання його в запропонованій вище схемі доведення теореми. Справа в тому, що функція $\Psi(q)$ в наведеній схемі відіграє суто допоміжну роль і є лише фіксатором того факту, що при $\det G \equiv 0$ в фазовому просторі системи (1) існує інваріантна підмножина (інтегральний многовид), на якій досліджувана система переходить у натуральну $(L_1 = 0)$.

2. Умова 2 в теоремі 1 є ключовою в тому сенсі, що вона усуває стабілізуючу дію гіроскопічних сил, принаймні, на деяких підмножинах фазового простору системи (1). Проте виявляється, що за рахунок структури потенційних сил, аналогічно тому, як це буває в лінійному випадку [5], нестійкість рівноваги все одно може мати місце, незалежно від виродженості (невиродженості) матриці гіроскопічних сил.

Визначимо множини

$$M^n = \left\{ q \in R^n : \prod_{i<j} \left(q_i^2 + q_j^2 \right) > 0 \right\}, \quad i, j = \overline{1, n}; \ n \geq 3,$$

$$\omega = \left(q \in s_\varepsilon = \{ q \in R^n, \|q\| < \varepsilon \} : L_0(q) > 0 \right).$$

Позначимо через $K^n \subset M^n$ область, що задовольняє умову випуклості або зірчастості. Зауважимо, зокрема, що при $n = 3$ умову випуклості задовольняє будь-який октант, або об'єднання двох октантів, що межують один з одним; умову зірчастості задовольняє, наприклад, верхній (нижній) напівпростір з вилученим плоским елементом, утвореним вертикальною координатною напіввіссю і перпендикулярним до неї в початкові координат променем. Нарешті, нехай ω^* — зв'язна компонента множини ω, для якої $\partial\omega^* \subset \partial\omega$, $0 \in \partial\omega^*$.

Теорема 2. *Нехай* $L(q, \dot{q}) \in C^1(D_q \times R^n)$ *і існує таке* $\varepsilon > 0$ $(D_q \supset \bar{s}_\varepsilon)$, *що:*

1) $\omega \neq \varnothing$, $0 \in \partial\omega$;

2) ω (або ω^*) $\subset K^n$ *при* $n \geq 3$, *якщо ж* $n = 2$, *то множина* ω *не містить цикл, що охоплює точку* $q = 0$;

3) *функція* $L_0(q)$ *має вигляд*

$$L_0(q) = \sum_{l=1}^{m} L_0^{(k_l)},$$

де $L_0^{(k_l)}$ — *однорідні функції степенів* k_l, $1 < k_1 < k_2 < \ldots < k_m$, $L_0^{(k_l)} \leq 0 \quad \forall\, l \leq \leq m-1$.

Тоді положення рівноваги $q = \dot{q} = 0$ *системи* (1) *нестійке.*

Доведення. Обмежившись дослідженням руху системи на множинах від'ємного рівня інтеграла $H = h$, що завжди можливо на підставі умови 1 теореми 2, розглянемо функцію

$$V = -Hpq. \tag{17}$$

Її похідна по векторному полю, яке визначається рівнянням (4), у достатньо малому околі s_ε точки $q = p = 0$ має вигляд

$$\frac{dV}{dt} = -H\left(p\frac{\partial H}{\partial p} - q\frac{\partial H}{\partial q} + q^T G \frac{\partial H}{\partial p} \right) =$$

$$= -H\left[p^T A^{-1} p + o\left(\|p\|^2\right) + \sum_{l=1}^{m} k_l L_0^{(k_l)} \right] - Hq^T G \frac{\partial H}{\partial p}, \tag{18}$$

де $\|p\|^2$ — евклідова норма.

Розв'язуючи рівність (5) відносно $L_0^{(k_m)}$ і підставляючи результат в (18), маємо

$$\frac{dV}{dt} = -H\left[\left(\frac{k_m}{2}+1\right)p^T A^{-1}p + o(\|p\|^2) - k_m h + \sum_{l=1}^{m-1}(-k_m+k_l)L_0^{(k_l)}\right] - Hq^T G\frac{\partial H}{\partial p}. \tag{19}$$

Вираз у квадратних дужках рівності (19) при $H = h < 0$ з урахуванням умови 3 теореми в достатньо малому околі точки $q = p = 0$ додатний. Вираз

$$q^T G\frac{\partial H}{\partial p} = q^T G\dot{q} = \sum_{i<j} g_{ij}(-\dot{q}_i q_j + q_i\dot{q}_j) \tag{20}$$

знакозмінний, а тому виникає необхідність в його оцінці.

Скориставшись полярними координатами

$$q_i = r_{ij}\cos\varphi_{ij}, \quad q_j = r_{ij}\sin\varphi_{ij}, \quad i<j, \tag{21}$$

кожен з множників, що містяться під знаком суми в правій частині рівності (20), зобразимо у вигляді

$$(-\dot{q}_i q_j + q_i\dot{q}_j) = r_{ij}^2\dot{\varphi}_{ij}. \tag{22}$$

Припустимо тепер, що положення рівноваги $q = \dot{q} = 0$ системи (1) стійке. Зауважуючи, що

$$\sum_{i<j} g_{ij}(-\dot{q}_i q_j + q_i\dot{q}_j) = \sum_{i<j} g_{ij} r_{ij}^2\dot{\varphi}_{ij},$$

з урахуванням (19) – (20) одержуємо рівність

$$\frac{dV}{dt} = -H\Sigma_0 - H\sum_{i<j} g_{ij} r_{ij}^2\dot{\varphi}_{ij}, \tag{23}$$

де Σ_0 означає вираз у квадратних дужках у правій частині рівності (19).

На підставі (23) маємо

$$V\big|_0^t \geq -H\left[\int_0^t \Sigma_0\, d\tau + \int_0^t \sum_{i<j}\alpha_{ij}\, d\varphi_{ij}\right], \quad \alpha_{ij} = \text{const}. \tag{24}$$

У відповідності з (21) отримуємо

$$\int_0^t \sum_{i<j}\alpha_{ij}\, d\varphi_{ij} = \int_0^t \sum_{i<j}\alpha_{ij}\frac{(q_i\, dq_j - q_j\, dq_i)}{q_i^2+q_j^2}. \tag{25}$$

Диференціальна форма під знаком інтеграла у правій частині рівності (25) на множині K^n при $n \geq 3$ є точною. Отже, на підставі умови 2 теореми другий інтегральний доданок у правій частині нерівності (24), включаючи і випадок $n = 2$, є обмеженим.

Оскільки при $t \to \infty$ перший інтегральний доданок у правій частині нерівності (24) прямує до нескінченності, а ліва частина нерівності на підставі (17) і припущення про стійкість рівноваги — скінченна, приходимо до суперечності, звідки випливає справедливість теореми 2.

3. Розглянемо голономну консервативну систему, лагранжіан якої має вигляд

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\left(\dot{q}_{2i-1}^2 + \dot{q}_{2i}^2\right) +$$

$$+\sum_{i=1}^{k}(-q_{2i}\dot{q}_{2i-1}+q_{2i-1}\dot{q}_{2i})+L_0(q), \quad \text{const}=\lambda_i>0. \tag{26}$$

Теорема 3. *Нехай* $L(q,\dot{q})\in C^1(D_q\times R^n)$ *і виконуються умови:*

1) $\lim\limits_{\|q\|\to 0}\left\|\dfrac{\partial L_0}{\partial q}\right\|\|q\|^{-1}=0;$

2) $L_0(q)=L_0^*(\rho),\ \rho=(\rho_1,\ldots,\rho_k)^T,\ \rho_i^2=q_{2i-1}^2+q_{2i}^2.$

Тоді положення рівноваги $q=\dot{q}=0$ *системи* (1), (26) *стійке.*

Доведення. Рівняння руху, що відповідають лагранжіану (26) і умовам теореми, зобразимо у вигляді

$$\lambda_i\ddot{q}_{2i-1}-2\dot{q}_{2i}=\frac{\partial L_0}{\partial q_{2i-1}}, \quad i=\overline{1,k},$$
$$\lambda_i\ddot{q}_{2i}+2\dot{q}_{2i-1}=\frac{\partial L_0}{\partial q_{2i}}. \tag{27}$$

Зробимо заміну змінних

$$x_i=\cos\omega_i t q_{2i-1}-\sin\omega_i t q_{2i},$$
$$y_i=\sin\omega_i t q_{2i-1}+\cos\omega_i t q_{2i}, \quad \omega_i=\lambda_i^{-1}. \tag{28}$$

В результаті замість (27) одержимо

$$\lambda_i\ddot{x}_i+\omega_i x_i=\frac{\partial L_0^*}{\partial x_i},$$
$$\lambda_i\ddot{y}_i+\omega_i y_i=\frac{\partial L_0^*}{\partial y_i}, \tag{29}$$

$$L_0^*=L_0^*(\rho^*), \quad \rho^*=\left(\rho_1^*,\ldots,\rho_k^*\right)^T, \quad {\rho_i^*}^2=x_i^2+y_i^2.$$

Отже, внаслідок перетворення (28) система з лагранжіаном (26) переходить у натуральну, інтеграл енергії якої має вигляд

$$T+\Pi=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\left(\dot{x}_i^2+\dot{y}_i^2\right)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\omega_i{\rho_i^*}^2-L_0^*(\rho^*)=h=\text{const}.$$

На підставі умови 1 теореми потенціальна енергія системи (29) має строгий локальний мінімум у точці $x=y=0$. Таким чином, положення рівноваги $q==\dot{q}=0$ системи (1), (26) стійке. Теорема 3 доведена.

Наслідок. *Нехай в теоремі* 3 *замість умови* 1 *в околі* s_ε *точки* $q=0$ *виконується рівність*

$$\left\|\frac{\partial L_0}{\partial q}\right\|=O(\|q\|).$$

Тоді положення рівноваги $q=\dot{q}=0$ *завжди можна стабілізувати за рахунок вибору сталих* λ_i.

Як бачимо, в умовах теореми 3 і її наслідку дія гіроскопічних сил є превалюючою щодо сил потенційних, оскільки стійкість рівноваги зумовлюється саме їх наявністю. Функція L_0 у розглядуваному випадку може і не мати локального максимуму в положенні рівноваги, що за відсутності гіроскопічних сил, як правило, супроводжується нестійкістю рівноваги.

Зауваження 2. Систему, що відповідає умовам теореми 3, можна інтерпретувати як сукупність k матеріальних точок з координатами (q_{2i-1}, q_{2i}), які рухаються в площині внаслідок дії силового поля. Вплив цього поля, вірніше його потенційної складової, на кожну з точок визначається відстанню останньої до фіксованого центру, що збігається з початком системи відліку.

1. *Thomson W., Tait P.* Treatise on natural phylosophy. V.1. – Oxford: Clarendon press, 1867. – 727 p.
2. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. – М.: Изд-во АН СССР, 1962. – 535 с.
3. *Карапетян А. В., Румянцев В. В.* Устойчивость консервативных и диссипативных систем // Итоги науки и техники. Общая механика. – М.: ВИНИТИ, 1983. – Т.6. – 132 с.
4. *Румянцев В. В., Сосницкий С. П.* О неустойчивости равновесия голономных консервативных систем // Прикл. математика и механика. – 1993. – **57**, вып. 6. – С. 144–166.
5. *Меркин Д. Р.* Гироскопические системы. – М.: Наука, 1974. – 344 с.
6. *Болотин С. В., Негрини П.* Асимптотические траектории гироскопических систем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. математика, механика. – 1993. – № 6. – С. 66–75.
7. *Немыцкий В. В., Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. – М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1949. – 550 с.
8. *Сосницкий С. П.* Об устойчивости равновесия натуральных систем // Математическое моделирование динамических процессов в системах тел с жидкостью. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1988. – С. 38–43.
9. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1964. – 830 с.

Одержано 27.11.95