УДК 512.552.8

В. В. Бавула, канд. физ.-мат. наук (Киев. ун-т)

ПРОСТЫЕ $D[X, Y; \sigma, a]$-МОДУЛИ

Приведена классификация простых модулей над обобщенной алгеброй Вейля степени 1 с базисным кольцом D, являющимся коммутативной областью с ограниченным условием минимальности.

Наведена класифікація простих модулів над узагальненою алгеброю Вейля степеня 1 з базисним кільцем D, яке є комутативною областю з обмеженою умовою мінімальності.

Введение.

Определение 1 [1–3]. *Пусть D — некоторое кольцо, $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ — семейство коммутирующих автоморфизмов кольца D, т.е. $\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i$, $a = (a_1, \ldots, a_n)$ — множество ненулевых элементов центра $Z(D)$ кольца D, причем $\sigma_i(a_j) = a_j$ для любых $i \neq j$.*

Обобщенной алгеброй Вейля $A = D(\sigma, a)$ (сокращенно ОАВ) степени n с *базисным* кольцом D будем называть кольцо, которое получается присоединением к D $2n$ символов $X_1^+, \ldots, X_n^+$, $X_1^-, \ldots, X_n^-$, удовлетворяющих следующим определяющим соотношениям:

$$X_i^- X_i^+ = a_i,\ X_i^+ X_i^- = \sigma_i(a_i), \tag{1}$$

$$X_i^{\pm} \alpha = \sigma^{\pm 1}(\alpha) X_i^{\pm},\ \alpha \in D, \tag{2}$$

$$\left[X_i^-, X_j^-\right] = \left[X_i^+, X_j^+\right] = \left[X_i^+, X_j^-\right] = 0 \quad \forall i \neq j. \tag{3}$$

Множества a и σ будем называть соответственно *определяющими* элементами и *автоморфизмами* обобщенной алгебры Вейля A.

В настоящей работе изучаются простые (левые) A-модули над ОАВ степени 1 $A = D(\sigma, a) = D[X, Y; \sigma, a]$, $X = X_1^+$, $Y = X_1^-$, где D — коммутативная область с ограниченным условием минимальности (о.у.м.), т. е. для любого идеала $\mathcal{J} \neq 0 \subset D$ D-модуль $D/\mathcal{J}$ имеет конечную длину. А начиная с п.2 (соответственно п.3) определяющий автоморфизм σ кольца D удовлетворяет условию С): для любого максимального идеала $\mathfrak{p}$ кольца D и любого целого $n \neq 0$ $\sigma^n(\mathfrak{p}) \neq \mathfrak{p}$ (соответственно D — дедекиндова область). Примерами таких алгебр являются: алгебра Вейля $A_1 = A_1(K)$ над полем K, фактор-алгебра $U/(C - \lambda)$ универсальной обертывающей алгебры $U = U\mathrm{sl}(2, K)$ алгебры Ли $\mathrm{sl}(2)$ по центру (C — элемент Казимира, $\lambda \in K$), а также их квантовые аналоги и некоторые естественные деформации [2–4].

Аналогично [5, 6, 3, 4] задача классификации (с точностью до неразложимых элементов некоторого евклидова кольца) простых модулей над ОАВ A степени 1 разбивается на две части. Первая часть (легкая) — простые A-модули с D-кручением (теорема 1, в теории представлений алгебр Ли такие модули называются весовыми), вторая (трудная) — простые A-модули без D-кручения (теорема 5). В п. 2 (теорема 2) показано, что размерность Крулля алгебры A равна 1. В п. 4 разработанная техника применена к описанию простых модулей над "квантовой" алгеброй A_q. Последний пункт посвящен построению некоторых серий простых A-модулей и неразложимых элементов евклидовых колец.

1. Классификация простых A-модулей с D-кручением.

1.1. Приведем некоторые основные определения и факты локализации некоммутативных колец [6, 7]. Пусть A — некоторое кольцо с 1 и $S \subset A$ — мультипликативно замкнутое множество, содержащее 1. (Левой) локализацией кольца A по S называется кольцо $B = S^{-1}A$, содержащее A в качестве подкольца такое, что любой элемент из S имеет обратный в B и $B = \{s^{-1}a \mid s \in S, a \in A\}$. Кольцо B (если оно существует) единственно с точностью до изоморфизма. (Левая) локализация кольца A по S существует тогда и только тогда, когда выполнено (левое) условие Оре: для любых элементов $s \in S$ и $a \in A$: $A s \cap Sa = \varnothing$. Аналогично определяется правая локализация. Если для кольца A существует левая и правая локализация по S, то они изоморфны. Предположим, что кольцо $B = S^{-1}A$ существует, и M — некоторый A-модуль. Локализация $S^{-1}M$ определяется аналогично конструкции $S^{-1}A$; $S^{-1}M$ является B-модулем и канонически отождествляется с индуцированным модулем $B \underset{A}{\otimes} M$.

Канонический гомоморфизм φ: $M \to S^{-1}M$, $m \to 1 \otimes m$ инъективен тогда и только тогда, когда модуль M без S-кручения (из $sm = 0$ следует $m = 0$). Отображение ограничения B-подмодулей из $S^{-1}M$ на A-подмодули из M, задаваемое $N \to \varphi^{-1}(N)$, является инъективным, и его образ совпадает с множеством подмодулей L из M таких, что M/L — модуль без S-кручения. В частном случае, когда $M = {}_AA$ и $S^{-1}M = B$, отображение φ является вложением. Тогда для любого левого идеала N кольца B $\varphi^{-1}(N) = A \cap N$ и $S^{-1}(A \cap N) = N$. Отсюда отображение $N \to A \cap N$ левых идеалов кольца B в левые идеалы кольца A инъективно, его образ состоит из всех левых идеалов $\mathcal{J}$, для которых A-модуль $A/\mathcal{J}$ без S-кручения.

Пусть существует локализация кольца A по S, тогдаиз условия Оре следует, что для любого модуля M множество $\mathrm{tor}_S M = \{m \in M \mid sm = 0$ для некоторого $s \in S\}$ является A-подмодулем в M. Следовательно, если A-модуль M простой, то он либо с S-кручением ($M = \mathrm{tor}_S M$), либо без S-кручения ($\mathrm{tor}_S M = 0$).

Таким образом, задача описания простых A-модулей разбивается на две части: описание простых A-модулей с S-кручением и без S-кручения. В этом пункте для рассматриваемого класса ОАВ степени 1 опишем простые модули с S-кручением.

1.2. Вложение A в евклидовое кольцо. Напомним основные свойства ОАВ A [3]. Поскольку D — нетерова область, то A является нетеровой областью и по теореме Голди имеет тело частных. Алгебра $A = \bigoplus \{A_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ является $\mathbb{Z}$-градуированной ($A_n A_m \subset A_{n+m}$ $\forall\, n, m \in \mathbb{Z}$), где $A_n = Dv_n$, $v_n := X^n$ ($n > 0$), $v_n := Y^{-n}$ ($n < 0$), $v_0 := 1$. Причем ${}_DA$ и A_D — свободные D-модули с естественной системой образующих $\{v_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Для любых целых чисел i, j определим элементы (i, j) и $\langle i, j\rangle$ из D:

$$v_i v_j = (i, j) = v_{i+j}\langle i, j\rangle. \tag{4}$$

Очевидно, $(i, j) = \sigma^{i+j}(\langle i, j\rangle)$. Если $i > 0$ и $j > 0$, то несложно вычислить

$$i \geq j\colon (i, -j) = \Pi\left\{\sigma^k(a) \mid i - j + 1 \leq k \leq i\right\}, (-i, j) = \Pi\left\{\sigma^k(a) \mid -i + 1 \leq k \leq -i + j\right\},$$

$$i \leq j\colon (i, -j) = \Pi\left\{\sigma^k(a) \mid 1 \leq k \leq i\right\}, (-i, j) = \Pi\left\{\sigma^k(a) \mid -i + 1 \leq k \leq 0\right\}.$$

В остальных случаях $(i, j) = 1$.

Обозначим через k поле частных кольца D, т.е. $k = S^{-1}D$, где $S = D \setminus \{0\}$. Очевидно, $S \subset A$ — мультипликативно замкнутое множество, удовлетворяющее левому и правому условию Оре в A. Пусть $B := S^{-1}A$ — локализация A по S.

Пусть τ — автоморфизм поля k; *кольцом косых лорановских многочленов* $k[X, X^{-1}; \tau]$ называется совокупность формальных сумм $\sum\{\alpha_i X^i \mid i \in \mathbb{Z}$ и $\alpha_j = 0$ почти для всех $j\}$ с естественной операцией сложения (почленно) и произведением $(\sum \alpha_i X^i)(\sum \alpha_j X^j) = \sum \alpha_i \tau^i(\beta_j) X^{i+j}$. Кольцо косых лорановских многочленов является евклидовым (выполнено левое и правое деление с остатком) относительно отображения "длины" l: $l(\alpha_m X^m + \ldots + \alpha_n X^n) = n - m$, $m < \ldots < n$, $\alpha_n \neq 0$, $\alpha_m \neq 0$. Очевидно, $l(uv) = l(u) + l(v)$ для любых u, v. Кольцо косых лорановских многочленов изоморфно ОАВ $k(\tau, a = 1)$. Кольцо $k[X, X^{-1}; \tau]$ содержит подкольцо $k[X; \tau]$, которое называется *кольцом косых многочленов* и является тоже евклидовым кольцом относительно отображения "степени" deg: $\deg(\alpha_0 + \ldots \ldots + \alpha_n X^n) = n$, $\alpha_n \neq 0$. Очевидно, $\deg(uv) = \deg u + \deg v$ для любых u, v. Любое евклидовое кольцо E является областью главных левых и правых идеалов. Напомним, что E-модуль M является простым тогда и только тогда, когда $M \cong E/Eb$ для некоторого элемента $b \in E$, который неприводим (в обычном смысле если $b = cd$, то либо c либо d равно единице); $E/Eb \cong E/Ec$ — изоморфизм E-модулей в том и только в том случае, когда b и c подобны, т.е. существует $d \in E$ такой, что 1 является наибольшим общим правым делителем c и d, а bd — наименьшее левое кратное c и d.

Лемма 1. *Локализация $B = S^{-1}A$ обобщенной алгебры Вейля A степени 1 по множеству $S = D \setminus \{0\}$ является евклидовым кольцом, изоморфным кольцу лорановских многочленов $B \cong k[X, X^{-1}; \sigma]$, где $k = S^{-1}D$ — поле частных кольца D.*

1.3. Отношение эквивалентности на Max D. На множестве максимальных идеалов $\mathfrak{M} = \operatorname{Max} D$ кольца D естественным образом действует группа $G = \langle\sigma\rangle$. Множество орбит $\hat{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M}/G$ разбивается на два непересекающихся класса $\hat{\mathfrak{M}} = \mathrm{Lin} \cup \mathrm{Cyc}$ — *линейные* и *циклические* орбиты, содержащие соответственно бесконечное и конечное количество элементов. Орбита называется *вырожденной*, если она имеет хотя бы один максимальный идеал, содержащий определяющий элемент алгебры (в противном случае — *невырожденной*). Тогда $\mathrm{Lin} = \mathrm{Linn} \cup \mathrm{Lind}$ и $\mathrm{Cyc} = \mathrm{Cycn} \cup \mathrm{Cycd}$ — разбиение множеств Lin и Cyc на невырожденные и вырожденные орбиты соответственно. Каждая линейная орбита каноническим образом изоморфна множеству целых чисел $\mathbb{Z}$, поэтому она естественно упорядочена; аналогично $\mathbb{Z}$ на линейной орбите вводятся понятия отрезка, полуоси и другие (этими понятиями и их обычными обозначениями будем пользоваться в дальнейшем без особого напоминания). Максимальные идеалы (возможно их бесконечное число) $\mathfrak{p}_1 < \ldots < \mathfrak{p}_s$, содержащие a, из орбиты $\mathcal{O} \in \mathrm{Lind}$ разбивают $\mathcal{O}$ на следующие непересекающиеся множества:

$$\Gamma_0 = (-\infty, \mathfrak{p}_1], \Gamma_1 = (\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2], \ldots, \Gamma_{s-1} = (\mathfrak{p}_{s-1}, \mathfrak{p}_s], \Gamma_s = (\mathfrak{p}_s, +\infty). \tag{5}$$

Если же $\mathcal{O} \in \mathrm{Cycd}$, то, используя аналогичные понятия, имеем разбиение (бесконечности "схлопываются")

$$\Gamma_1 = (\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2], \ldots, \Gamma_{s-1} = (\mathfrak{p}_{s-1}, \mathfrak{p}_s], \Gamma_s = (\mathfrak{p}_s, \mathfrak{p}_1]. \tag{6}$$

На множестве $\mathfrak{M}$ зададим отношение эквивалентности $\sim$: элементы $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \mathfrak{M}$ эквивалентны $\mathfrak{p} \sim \mathfrak{q}$, если они лежат либо на невырожденной орбите, либо принадлежат множеству вида Γ_i из (5) и (6). Положим $\hat{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M}/\sim$ — множество классов эквивалентности, $\Gamma(\mathfrak{p})$ и $\mathcal{O}(\mathfrak{p})$ — соответственно класс эквивалентности $\mathfrak{p}$ и орбита точки $\mathfrak{p}$. Обозначим через $\hat{A}$ множество классов изоморфизма простых (левых) A-модулей. Пусть Q — некоторое свойство простых A-модулей, инвариантное относительно изоморфизма; положим $\hat{A}(Q) = \{[M] \in \hat{A} \mid M$ имеет свойство $Q\}$.

1.4. Эпиморфизм A-модулей: $A(\mathfrak{p}) \to M$. Для каждого коммутативного кольца D отображение $\hat{D} \to \operatorname{Max} D$, $[M] \to \operatorname{ann} M := \{\alpha \in D \mid \alpha M = 0\}$ — аннулятор модуля M, является биекцией с обратным $\mathfrak{p} \to [k_{\mathfrak{p}}]$, где $k_{\mathfrak{p}} := D / \mathfrak{p}$ — поле вычетов кольца D по модулю $\mathfrak{p}$. Носителем $\operatorname{Supp} M$ D-модуля M называется совокупность максимальных идеалов $\mathfrak{p}$ кольца D таких, что $\operatorname{Hom}_D(M, k_{\mathfrak{p}}) \neq 0$. Если M — полупростой D-модуль с неизоморфными простыми слагаемыми, то своим носителем модуль M определяется однозначно, действительно, $M \cong \oplus \{k_{\mathfrak{p}} \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} M\}$.

В силу градуированности кольца A для любого идеала $\mathcal{J}$ из D существует канонический изоморфизм A-модулей:

$$A \underset{D}{\otimes} D / \mathcal{J} \to A / A\mathcal{J}, \ u \otimes (\alpha + \mathcal{J}) \to u\alpha + A\mathcal{J} \quad \forall u \in A, \alpha \in D. \tag{7}$$

В дальнейшем будем отождествлять эти модули.

Для каждого $\mathfrak{p} \in \operatorname{Max} D$ рассмотрим модуль $A(\mathfrak{p}) := A / A\mathfrak{p} = A \underset{D}{\otimes} k_{\mathfrak{p}} = \oplus\{A(\mathfrak{p})_i = v_i \otimes k_{\mathfrak{p}} \mid i \in \mathbb{Z}\}$, который является *градуированным* A-модулем $(A_i A(\mathfrak{p})_j \subset A(\mathfrak{p})_{i+j} \ \ \forall i, j \in \mathbb{Z})$ и полупростым D-модулем с носителем, равным орбите точки $\mathfrak{p}$: $\operatorname{Supp} A(\mathfrak{p}) = \mathcal{O}(\mathfrak{p}) = \{\sigma^i(\mathfrak{p}) \mid i \in \mathbb{Z}\}$.

Лемма 2. *Если $M \in \hat{A}$ (D-кручение), то для некоторого $\mathfrak{p} \in \operatorname{Max} D$ существует эпиморфизм A-модулей: $A(\mathfrak{p}) \to M$. Следовательно, ${}_D M$ — полупростой с носителем, целиком принадлежащим орбите точки $\mathfrak{p}$.*

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать только существование эпиморфизма. Пусть $u \neq 0 \in M$, тогда $M = Au$ и $Du \cong D / \mathcal{J}$ для некоторого ненулевого идеала $\mathcal{J}$ из D. В силу ограниченного условия минимальности кольца D существует $v \neq 0 \in Du$: $Dv \cong D / \mathfrak{p}$ — простой D-модуль для некоторого $\mathfrak{p} \in \operatorname{Max} D$. Тогда $A(\mathfrak{p}) \to M$, $b + A\mathfrak{p} \to bv$, — искомый эпиморфизм. Лемма доказана.

Очевидно, изоморфные простые A-модули с D-кручением имеют одинаковые носители; обратное, вообще говоря, неверно.

1.5. $K(\tau, 0)$^. Пусть τ — автоморфизм некоторого поля K, а $\Lambda = K(\tau, 0)$ — обобщенная алгебра Вейля степени 1 с нулевым определяющим элементом и образующими x и y. Тогда $\Lambda = \Lambda_+ + \Lambda_-$, где $\Lambda_+ := K[x; \tau]$ и $\Lambda_- := K[y; \tau^{-1}]$ являются кольцами косых многочленов. Обозначим через (x) и (y) двусторонние идеалы в Λ, порожденные элементами x и y соответственно. Тогда $\Lambda / (x) \cong \Lambda_-$ и $\Lambda / (y) \cong \Lambda_+$ — изоморфизмы колец и $(x)(y) = (y)(x) = 0$. Отсюда следует такая лемма.

Лемма 3. *Множество простых Λ-модулей состоит из объединения следующих (непересекающихся) множеств:* 1) $\Lambda / (x, y) = K$, $\hat{x} = \hat{y} = 0$; 2) $\hat{\Lambda}_+ (\hat{x} \neq 0)$, $\hat{x}$ *обратим*, $\hat{y} = 0$; 3) $\hat{\Lambda}_- (\hat{y} \neq 0)$, $\hat{x} = 0$, $\hat{y}$ *обратим*.

Автоморфизм τ поля K продолжается до автоморфизма τ: $\Lambda \to \Lambda$, $\tau(x) = x$, $\tau(y) = y$. Пусть F_+ и F_- являются простыми модулями, принадлежащими второму и третьему классу из предыдущей леммы. Тогда ${}_\Lambda F_+ = xF_+ \cong {}^{\tau^{-1}}F_+$ и ${}_\Lambda F_- = yF_- \cong {}^{\tau}F_-$, где ${}^{\tau^{\pm1}}F_\pm$ — подкрученные на автоморфизм $\tau^{\pm1}$ Λ-модули. Следовательно, при действии группы $\langle\tau\rangle$ на $\hat{\Lambda}$ каждая орбита состоит ровно из одной точки. Модуль $\Lambda/(x, y)$ будем называть *точечным*.

1.6. Простые индуцированные модули. Для любого $n \in \mathbb{N}$ в кольце A рассмотрим подкольцо $\Lambda_n :\doteq D\langle X^n, Y^n\rangle = \oplus\ \{D v_{jn} \mid j \in \mathbb{Z}\}$, которое является ОАВ степени 1 $\Lambda_n \cong D(\sigma^n, a')$ с определяющим элементом, равным $a' = \sigma^{-n+1}(a)\ldots a$. Пусть $\mathfrak{O}$ — циклическая орбита, содержащая $n = |\mathfrak{O}|$ элементов. Тогда для любого $\mathfrak{p} \in \mathfrak{O}$: $(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}\Lambda_n = \Lambda_n\mathfrak{p}$ — двусторонний идеал в Λ_n. Если орбита $\mathfrak{O}$ вырождена, то фактор-кольцо $\Lambda_n/(\mathfrak{p})$ изоморфно ОАВ степени 1 $k_\mathfrak{p}(\sigma^n, 0)$ с нулевым определяющим элементом; если орбита $\mathfrak{O}$ невырождена, то $\Lambda_n/(\mathfrak{p}) \cong k_\mathfrak{p}[x, x^{-1}; \sigma^n]$ — кольцо косых лорановских многочленов, $x = X^n + (\mathfrak{p})$. Изоморфизм полей $\sigma^i\colon k_\mathfrak{p} \to k_\mathfrak{q}$, $i \in \mathbb{Z}$, $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \mathfrak{O})$ очевидным образом продолжается до изоморфизма колец $\sigma^i\colon \Lambda_n/(\mathfrak{p}) \to \Lambda_n/(\mathfrak{q})$. Общий класс изоморфизма колец $\{\Lambda_n/(\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in \mathfrak{O}\}$ обозначим через $C_\mathfrak{O}$; тогда $\sigma \in \operatorname{Aut} C_\mathfrak{O}$. Очевидно, каждый простой $C_\mathfrak{O}$-модуль F изоморфен подкрученному модулю ${}^{\sigma^n}F$. Поэтому на множестве простых $C_\mathfrak{O}$-модулей $\hat{C}_\mathfrak{O}$ действует циклическая группа $\mathbb{Z}_n$. В доказательстве теоремы 1 показано: если F — простой неточечный $C_\mathfrak{O}$-модуль, то индуцированный A-модуль $\operatorname{ind} F := A \otimes_{\Lambda_n} F$ простой.

Лемма 4. *Пусть F, F' — простые неточечные $C_\mathfrak{O}$-модули. Тогда A-модули $\operatorname{ind} F$ и $\operatorname{ind} F'$ изоморфны тогда и только тогда, когда $C_\mathfrak{O}$-модули F и ${}^{\sigma^i}F'$ изоморфны для некоторого $0 \le i \le n-1$.*

Доказательство. *Необходимость.* На индуцированном модуле $\operatorname{ind} F$ либо $\hat{X}$, либо $\hat{Y}$ — обратимые операторы (формулировка теоремы 1); пусть, для определенности, $\hat{X}$ обратим. Тогда $\operatorname{ind} F = \oplus\ \{X^i \otimes F \mid 0 \le i \le n-1\}$, и Λ_n-модуль $X^i \otimes F$ изоморфен Λ_n-модулю ${}^{\sigma^{-i}}F$, подкрученному на автоморфизм σ^{-i} кольца $C_\mathfrak{O}$. Ясно, что Λ_n-модули $X^i \otimes F$ и $X^j \otimes F$ изоморфны тогда и только тогда, когда $i = j$ (поскольку данные модули аннулируются различными максимальными идеалами из $\mathfrak{O}$). Тогда из существования изоморфизма $\operatorname{ind} F \cong \operatorname{ind} F'$ следует, что $F \cong X^j \otimes F'$ — изоморфизм Λ_n-модулей для некоторого $0 \le j \le n-1$. Но $C_\mathfrak{O}$-модули $X^j \otimes F'$ и ${}^{\sigma^{n-j}}F'$ изоморфны, следовательно, $F \cong {}^{\sigma^{n-j}}F'$.

Достаточность. Если $F \cong {}^{\sigma^i}F'$, то $\operatorname{ind} F \cong \operatorname{ind}({}^{\sigma^i}F') \cong \oplus\ \{X^j \otimes {}^{\sigma^i}F' \mid 0 \le j \le n-1\} \cong \operatorname{ind} F'$, поскольку $X^i \otimes {}^{\sigma^i}F' \cong F'$, $X^i \otimes \alpha \to \alpha$, — изоморфизм $C_\mathfrak{O}$-модулей. Лемма доказана.

Обозначим через $\tilde{C}_\mathfrak{O}$ множество орбит $\hat{C}_\mathfrak{O}/\mathbb{Z}_n$ без орбиты точечного $C_\mathfrak{O}$-модуля. Тогда в силу предыдущей леммы определено вложение

$$\bigcup_{\mathrm{Cyc}} \tilde{C}_\mathfrak{O} \hookrightarrow \hat{A}\ \ (D\text{-кручение}),\ [F] \to [\operatorname{ind} F].$$

1.7. Теорема 1 (*классификация простых A-модулей с D-кручением*). *Каждый простой A-модуль с D-кручением принадлежит либо* I *либо* II *классу,* *другими словами, отображения* (8) *и* (9) *являются вложениями, образы которых образуют разбиение множества* $\hat{A}$ (*D-кручение*).

I. *Модули, полностью определяющиеся своим носителем* (*основная серия*):

$$(\mathrm{Lin} \bigcup \mathrm{Cyc}) / \sim \; \hookrightarrow \hat{A} \; (D\text{-кручение}),\ \Gamma \to [L(\Gamma)], \tag{8}$$

причем $\mathrm{Supp}\, L(\Gamma) = \Gamma$, *где*:

1) *если* $\Gamma \in \mathrm{Linn}$, *то* $L(\Gamma) \cong A / A\mathfrak{p} \cong A \otimes_D k_{\mathfrak{p}} = \oplus\{v_i \otimes k_{\mathfrak{p}} \mid i \in \mathbb{Z}\}$ *для любого* $\mathfrak{p} \in \Gamma$ ($\hat{X}$ *и* $\hat{Y}$ — *обратимые операторы*);

2) *если* $\Gamma = (-\infty, \mathfrak{p}] \in \mathrm{Lind}$, *то* $L(\Gamma) = A / A(\mathfrak{p}, X) \cong \oplus\{v_i \otimes k_{\mathfrak{p}} \mid i \le 0\}$ ($\hat{X}$ — *сюръекция*, $\hat{Y}$ — *инъекция*, $\mathrm{Ker}\, \hat{X} = \mathrm{Coker}\, \hat{Y} = k_{\mathfrak{p}}$);

3) *если* $\Gamma = (\sigma^{-n}(\mathfrak{p}), \mathfrak{p}] \in \mathrm{Lind} \bigcup \mathrm{Cycd}$, *то* $L(\Gamma) = A / A(Y^n, \mathfrak{p}, X) \cong \oplus\{v_i \otimes k_{\mathfrak{p}} \mid -n-1 \le i \le 0\}$, $l_D L(\Gamma) = n < \infty$ ($\mathrm{Ker}\, \hat{X} = \mathrm{Coker}\, \hat{Y} = k_{\mathfrak{p}}$, $\mathrm{Coker}\, \hat{X} = \mathrm{Ker}\, \hat{Y} = k_{\mathfrak{q}}$, $\mathfrak{q} = \sigma^{-n+1}(\mathfrak{p})$);

4) *если* $\Gamma = (\mathfrak{p}, +\infty) \in \mathrm{Lind}$, *то* $L(\Gamma) = A / A(\sigma(\mathfrak{p}), Y) \cong \oplus\{v_i \otimes k_{\sigma(\mathfrak{p})} \mid 0 \le i\}$ ($\hat{X}$ — *инъекция*, $\hat{Y}$ — *сюръекция*, $\mathrm{Coker}\, \hat{X} = \mathrm{Ker}\, \hat{Y} = k_{\sigma(\mathfrak{p})}$).

II. *Модули, которые не определяются своим носителем (дополнительная серия):*

$$\bigcup_{\mathrm{Cyc}} \hat{C}_{\mathfrak{O}} \hookrightarrow \hat{A} \; (D\text{-кручение}),\ [F] \to [\mathrm{ind}\, F = A \otimes_{\Lambda_{|\mathfrak{O}|}} F], \tag{9}$$

причем для любого $[F] \in \hat{C}_{\mathfrak{O}}$: $\mathrm{Supp}(\mathrm{ind}\, F) = \mathfrak{O}$, $l_D(\mathrm{ind}\, F) = |\mathfrak{O}|\, l_D(F) < \infty$, *где*:

5) *если* $\mathfrak{O} \in \mathrm{Cycn}$, $n = |\mathfrak{O}|$, *то* $\mathrm{ind}\, F = \oplus\{X^i \otimes F \mid 0 \le i \le n-1\} = \oplus\{Y^i \otimes F \mid 0 \le i \le n-1\}$ ($\hat{X}$ *и* $\hat{Y}$ — *обратимые операторы*);

6) *если* $\mathfrak{O} \in \mathrm{Cycd}$, $n = |\mathfrak{O}|$, $[F] \in \hat{C}_{\mathfrak{O}}$ ($\hat{x} \ne 0$), *то* $\mathrm{ind}\, F = \oplus\{X^i \otimes F \mid 0 \le i \le n-1\}$ ($\hat{X}$ — *обратим*, $\mathrm{Ker}\, \hat{Y} = \oplus\{k_{\mathfrak{p}} \mid \mathfrak{p} \in \mathfrak{O}\colon \sigma(\mathfrak{p}) \ni a\}$, $\mathrm{Coker}\, \hat{X} = \oplus\{k_{\mathfrak{p}} \mid \mathfrak{p} \in \mathfrak{O}\colon \mathfrak{p} \ni a\}$);

7) *если* $\mathfrak{O} \in \mathrm{Cycd}$, $n = |\mathfrak{O}|$, $[F] \in \hat{C}_{\mathfrak{O}}$ ($\hat{y} \ne 0$), *то* $\mathrm{ind}\, F = \oplus\{Y^i \otimes F \mid 0 \le i \le n-1\}$ ($\hat{Y}$ — *обратим*, $\mathrm{Ker}\, \hat{X} = \oplus\{k_{\mathfrak{p}} \mid \mathfrak{p} \in \mathfrak{O}\colon \mathfrak{p} \ni a\}$, $\mathrm{Coker}\, \hat{X} = \oplus\{k_{\mathfrak{p}} \mid \mathfrak{p} \in \mathfrak{O}\colon \sigma(\mathfrak{p}) \ni a\}$).

Простой A-модуль M является D-модулем конечной длины ($l_D M < \infty$) *тогда и только тогда, когда M принадлежит одному из классов* [3, 5–7].

Доказательство. В силу очевидных свойств операторов $\hat{X}$ и $\hat{Y}$ приведенные модули не изоморфны. Покажем, что они просты. Пусть L — какой-нибудь модуль из [1–4] (соответственно [5–7]) и N — ненулевой подмодуль в L. Тогда ${}_D N$ полупрост и, поскольку все нетривиальные прямые слагаемые модуля L вида ${}_D(v_i \otimes k_{\mathfrak{p}}) \cong D / \sigma^{-i}(\mathfrak{p})$ (соответственно ${}_D(v_i \otimes F) \cong m_i D / \sigma^{-i}(\mathfrak{p})$ для некоторого $m_i \in \mathbb{N}$) не изоморфны как D-модули, то N содержит некоторое слагаемое вида $v_i \otimes k_{\mathfrak{p}}$ (соответственно $v_i \otimes F'$, где ${}_D F' \subset F$). Очевидно, $A(v_i \otimes k_{\mathfrak{p}}) = L$ (соответственно $A(v_i \otimes F') = L$, поскольку умножая на подходящее v_j, имеем $N \supset A(1 \otimes F') = A(1 \otimes \Lambda_* F') = A(1 \otimes F) = L$), следовательно, L — простой модуль.

Пусть M — простой A-модуль, покажем, что он принадлежит одному из множеств [1–7]. В силу леммы 2 для некоторого $\mathfrak{p} \in \mathrm{Max}\, D$ существует эпиморфизм A-модулей $A(\mathfrak{p}) \to M$. Если орбита $\mathcal{O}$ точки $\mathfrak{p}$ линейная, то, как несложно проверить, модуль $A(\mathfrak{p})$ имеет наибольший собственный подмодуль $N(\mathfrak{p})$ и его носитель равен $\mathcal{O} \setminus \Gamma$, где Γ — область эквивалентности, содержащая $\mathfrak{p}$. Тогда модуль $M \cong A(\mathfrak{p}) / N(\mathfrak{p})$ принадлежит одному из множеств [1–4].

Пусть орбита $\mathcal{O}$ точки $\mathfrak{p}$ циклическая и $n = |\mathcal{O}|$. Тогда $A(\mathfrak{p}) = \oplus \{A(\mathfrak{p}, j) | j \in \mathbb{Z}_n\}$, где $A(\mathfrak{p}, j) := \oplus\{v_i \otimes k_{\mathfrak{p}} \mid i \equiv j \pmod n\}$ — $\Lambda_n / \sigma^{-j}(\mathfrak{p})$-модуль и $v_k A(\mathfrak{p}, j) \subset A(\mathfrak{p}, j+k)$ $\forall\, k \in \mathbb{Z}$. Обозначим через M_j образ $A(\mathfrak{p}, j)$ в M. Тогда $M = \oplus\{M_j \mid j \in \mathbb{Z}_n\}$, поскольку каждый D-модуль $A(\mathfrak{p}, j)$ является полупростым, все факторы которого изоморфны $D / \sigma^{-j}(\mathfrak{p})$ и при различных $j \neq k \in \mathbb{Z}_n$ D-модули $D / \sigma^{-j}(\mathfrak{p})$ и $D / \sigma^{-k}(\mathfrak{p})$ неизоморфны. Поскольку $v_i M_j \subset M_{i+j}$ $\forall\, i \in \mathbb{Z}$, и модуль M простой, то, очевидно, каждое ненулевое слагаемое M_j является простым $\Lambda_n / (\sigma^{-j}(\mathfrak{p}))$-модулем. Тогда в силу универсальности индуцирования существует эпиморфизм A-модулей $\operatorname{ind} M_0 \to M$, являющийся изоморфизмом, если M_0 — не точечный $\Lambda_n / (\mathfrak{p})$-модуль, и следовательно, в этом случае модуль M принадлежит одному из множеств [5–7]. А если M_0 — точечный $\Lambda_n / (\mathfrak{p})$-модуль, а это возможно, когда $\mathcal{O} \in \mathrm{Cycd}$, то подмодуль $N := \oplus \{M_j \mid \sigma^{-j}(\mathfrak{p}) \notin \Gamma\}$ является наибольшим собственным подмодулем в $\operatorname{ind} M_0$ и модуль $(\operatorname{ind} M_0) / N \cong M$ принадлежит множеству [3]. Теорема доказана.

2. Размерность Крулля и критерий простоты алгебры A. Далее (если не оговорено противное) будем предполагать, что:

C) $\mathrm{Cyc} = \varnothing$, т.е. $\sigma^n(\mathfrak{p}) \neq \mathfrak{p}$, $\forall\, \mathfrak{p} \in \operatorname{Max} D$, $n \neq 0 \in \mathbb{Z}$.

Докажем следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{J}$ — ненулевой левый идеал кольца A. Тогда $A / \mathcal{J}$ — A-модуль конечной длины. Следовательно, размерность Крулля алгебры A равна $K - \dim A = 1$.*

2.1. Лемма 5. *Для любого целого числа $n \neq 0$ выполняется равенство*

$$\sum_{u \in D} D(u - \sigma^n(u)) = D. \tag{10}$$

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{J}$ сумму из (10) и пусть $\mathcal{J} \neq D$. Тогда $\mathcal{J} \subset \mathfrak{p}$ для некоторого максимального идеала $\mathfrak{p}$ кольца D. В силу условия C найдется элемент $u \in \mathfrak{p}$ такой, что $\sigma^n(u) \notin \mathfrak{p}$. Но $u - \sigma^n(u) \in \mathcal{J} \subset \mathfrak{p}$, следовательно, $\sigma^n(u) \in \mathfrak{p}$ (противоречие). Тогда $\mathcal{J} = D$. Лемма доказана.

Предложение 1. *Всякий содержащийся в A D-бимодуль однороден относительно градуировки. Следовательно, любой двусторонний идеал кольца A однороден.*

Доказательство. Пусть M — D-бимодуль из A и $v = v_n + \ldots + v_m \in M$ — произвольный элемент, $v_i \in A_i$, $n < \ldots < m$. Покажем, что $v_i \in M$ для любого $n \leq i \leq m$. Доказательство проведем индукцией по длине $l(v)$. Если $l(v) = 0$, то доказывать нечего. Пусть утверждение справедливо для всех элементов из M длины, строго меньшей $k > 0$, и $l(v) = m - n = k$. В силу предыдущей леммы существуют такие $\alpha_i, \beta_i \in D$, что

$$\sum \alpha_i \big(\sigma^n(\beta_i) - \sigma^m(\beta_i)\big) = 1.$$

Тогда $M \ni u := \sum \alpha_i \big(v\beta_i - \sigma^m(\beta_i) v\big) = u_n + \ldots + u_m$, причем $u_n = v_n$ и $u_m = 0$.

Следовательно, $l(u) < l(v)$ и по предположению индукции $v_n \in M$, а тогда $v_i \in \in M$ для всех i. Предложение доказано.

2.2. Пусть $\mathfrak{a}$ — идеал кольца A, тогда в силу предложения 1 $\mathfrak{a} = \oplus \{\mathfrak{a}_n v_n \mid n \in \in \mathbb{Z}\}$, где $\mathfrak{a}_n$ — идеал в D для любого $n \in \mathbb{Z}$. Для краткости $\mathfrak{a}_n$ будем называть (n-й) *компонентой* идеала $\mathfrak{a}$. Своими компонентами идеал определяется однозначно, и они очень сильно связаны друг с другом.

Лемма 6. *Пусть* $\{\mathfrak{a}_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ — *совокупность идеалов кольца* D, $\mathfrak{a} = \sum \mathfrak{a}_n v_n$. *Тогда* $\mathfrak{a}$ *является идеалом в* A *тогда и только тогда, когда для любых целых чисел* $m \geq 0$ *и* $n > 0$ *выполняются включения:*

$$\mathfrak{a}_{\pm m} + \sigma^{\pm 1}(\mathfrak{a}_{\pm m}) \subset \mathfrak{a}_{\pm(m+1)}, \tag{11}$$

$$\mathfrak{a}_n \sigma^n(a) + \sigma^{-1}(\mathfrak{a}_n) a \subset \mathfrak{a}_{n-1}, \tag{12}$$

$$\mathfrak{a}_{-n} \sigma^{-n+1}(a) + \sigma(\mathfrak{a}_{-n}) \sigma(a) \subset \mathfrak{a}_{-n+1}. \tag{13}$$

Доказательство очевидно в силу градуированности кольца A и вида определяющих соотношений.

Предложение 2. *Для любого идеала* $\mathfrak{a} \neq 0 \subset D$ *существует* $n \in \mathbb{N}$ *такое, что* $\mathfrak{a} + \sigma^i(\mathfrak{a}) = D$, *если* $|i| \geq n$, $i \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Любое коммутативное артиновое кольцо, например, $D / \mathfrak{a}$, содержит лишь конечное число максимальных идеалов. Обозначим через Q множество максимальных идеалов из D, содержащих $\mathfrak{a}$. Поскольку $|Q| < \infty$ и $\mathrm{Cyc} = \varnothing$, то существует натуральное n такое, что $Q \cap \sigma^i(Q) = \varnothing$ для любых $i \in \mathbb{Z} : |i| \geq n$. Следовательно, $\mathfrak{a} + \sigma^i(\mathfrak{a}) = D$. Предложение доказано.

Теорема 3 (*критерий простоты алгебры* A). *Пусть* A — *ОАВ степени* 1 *с базисным кольцом, являющимся коммутативной областью с о.у.м. Тогда* A — *простое кольцо* $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Cyc} = \varnothing$ *и в* $\mathrm{Max}\, D$ *нет конечных областей эквивалентности.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n\}$ — циклическая орбита, тогда $\mathfrak{a} := \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n \neq 0$, поэтому $A\mathfrak{a} = \mathfrak{a}A$ – собственный идеал кольца A.

Пусть $\Gamma = (\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_n]$ — конечная область эквивалентности, тогда $\mathcal{J} = \sum \mathcal{J}_i v_i$ — собственный идеал в A, где $\mathcal{J}_i = \mathfrak{p}_{i+1} \cdots \mathfrak{p}_n$ и $\mathcal{J}_{-i} = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_{m-i}$, если $1 \leq i \leq n-1$; $\mathcal{J}_j = D$, если $|i| \geq n$.

Достаточность. Поскольку $\mathrm{Cyc} = \varnothing$, то в силу предложений 1, 2 любой собственный идеал $\mathcal{J}$ из A (если он существует) однороден и содержит элементы X^n и Y^n при всех достаточно больших n. Следовательно, $l_D(A / \mathcal{J}) < \infty$ и поэтому существует конечная область эквивалентности в $\mathrm{Max}\, D$ (противоречие), следовательно, A — простое кольцо. Теорема доказана.

Теорема 4. *a).Существует натуральное число* N *такое, что для любого ненулевого идеала* $\mathfrak{a} \subset A : l_D(A / \mathfrak{a}) < N$. *b)*. *Если* D — *дедекиндовое кольцо, то в* A *существует лишь конечное число идеалов.*

Доказательство. *b)*. Положим $\alpha_n := v_n v_{-n} D + v_{-n} v_n D$ для любого целого $n > 0$. Тогда $\alpha_1 \supset \alpha_2 \supset \ldots$ — убывающая последовательность идеалов из D. Покажем, что она стабилизируется. В силу условия С и предложения 2 существует натуральное m такое, что $D\sigma^i(a) + D\sigma^j(a) = D$, если $|i - j| \geq m$. Поскольку $v_n v_{-n} = \sigma(a) \ldots \sigma^n(a)$ и $v_{-n} v_n = \sigma^{-n+1}(a) \ldots a$, то $\alpha_m = \alpha_{m+1} = \ldots$

(последовательность стабилизируется на m-м шаге).

Положим $\alpha(A) := \bigcap\{\alpha_i \mid i \geq 1\}$ — ненулевой идеал в D и $l := l_D(D / \alpha(A)) < \infty$. Пусть $\mathfrak{a} = \sum \mathfrak{a}_n v_n$ — любой ненулевой идеал в A. Тогда в силу (11) и условия С) почти все компоненты $\mathfrak{a}_n = D$ (за исключением конечного числа) и если $\mathfrak{a}_k \neq \neq D$ $(\mathfrak{a}_{-k} \neq D)$ для некоторого $k \geq 0$, то идеал $\mathfrak{a}_{k+1}$ (соответственно $\mathfrak{a}_{-k-1}$) строго содержит идеал $\mathfrak{a}_k$ (соответственно $\mathfrak{a}_{-k}$). Следовательно,

$$l_D(A / \mathfrak{a}) = \sum l_D(A / \mathfrak{a}_n) \leq l + 2\sum_{i=1}^{l-1} i = l^2 = \text{const}.$$

Кроме того, $\mathfrak{a}_0 \supset \alpha(A)$. Тогда из (11) следует конечность числа идеалов в A в случае *b)*. Теорема доказана.

Поскольку A — D-модуль бесконечной длины, то в силу предыдущей теоремы в A существует наименьший ненулевой идеал, равный пересечению ненулевых идеалов из A. Очевидно, он совпадает со своим квадратом.

2.3. Пусть $\mathcal{J}$ — ненулевой идеал кольца A. Для каждого целого положительного числа n рассмотрим идеал $\mathfrak{a}_n(\mathcal{J})$ (соответственно $\mathfrak{a}_{-n}(\mathcal{J})$) кольца D, состоящий из коэффициентов $\alpha \in D$ в разложении элементов из $\mathcal{J}$ вида $v_n\alpha + \ldots$ (соответственно $v_{-n}\alpha + \ldots$), где многоточием обозначены слагаемые меньшей (соответственно большей) градуированной степени. Очевидно, $\{\mathfrak{a}_n(\mathcal{J})\}$ и $\{\mathfrak{a}_{-n}(\mathcal{J})\}$ — возрастающие последовательности идеалов кольца D. В силу нетеровости D они стабилизируются на некотором шаге, и, соответственно, символами $\mathfrak{a}_+(\mathcal{J})$ и $\mathfrak{a}_-(\mathcal{J})$ обозначим их наибольшие элементы. Обозначим через $d(\mathcal{J})$ минимальную длину ненулевых элементов из $\mathcal{J}$. Из включения $\mathcal{J} \subset I$ левых идеалов следует, что $d(\mathcal{J}) \supset d(I)$, $\mathfrak{a}_+(\mathcal{J}) \subset \mathfrak{a}_+(I)$ и $\mathfrak{a}_-(\mathcal{J}) \subset \mathfrak{a}_-(I)$. Данные $(d(\mathcal{J}), \mathfrak{a}_+(\mathcal{J}), \mathfrak{a}_-(\mathcal{J}))$ довольно хорошо характеризуют левый идеал $\mathcal{J}$. Справедлива следующая лемма.

Лемма 7. *Пусть $\mathcal{J} \subset I$ — ненулевые левые идеалы из A такие, что $d(I) = = d(\mathcal{J})$, $\mathfrak{a}_+(I) = \mathfrak{a}_+(\mathcal{J})$ и $\mathfrak{a}_-(I) = \mathfrak{a}_+(\mathcal{J})$. Тогда $I / \mathcal{J}$ — D-модуль конечной длины.*

Доказательство. Достаточно заметить, что $I / \mathcal{J}$ — конечнопорожденный D-модуль с кручением (для любого $u \in I / \mathcal{J}$ существует $\alpha \neq 0 \in D$: $\alpha u = 0$), следовательно, имеет конечную длину, поскольку кольцо D с о.у.м. Лемма доказана.

2.4. Доказательство теоремы 2. В силу нетеровости кольца A достаточно показать, что любая убывающая последовательность левых идеалов из A вида $\mathcal{J}_1 \supset \mathcal{J}_2 \supset \ldots \supset \mathcal{J}$ стабилизируется. Поскольку фактор-кольца $D/\mathfrak{a}_-(\mathcal{J})$ и $D / \mathfrak{a}_+(\mathcal{J})$ артиновы, то существует натуральное число n такое, что $d(\mathcal{J}_n) = = d(\mathcal{J}_m)$, $\mathfrak{a}_-(\mathcal{J}_n) = \mathfrak{a}_+(\mathcal{J}_m)$ и $\mathfrak{a}_+(\mathcal{J}_n) = \mathfrak{a}_+(\mathcal{J}_m)$ для любого $m \geq n$. Если A — простое кольцо, то ненулевой A-модуль с D-кручением имеет бесконечный носитель, следовательно, в силу леммы 7 последовательность $\{\mathcal{J}_k\}$ стабилизируется на n-м шаге.

Пусть A — не простое кольцо, тогда в нем содержится наименьший (относительно включения) собственный двусторонний идеал $\mathfrak{a}$ алгебры A. В силу нетеровости A левый идеал $\mathcal{J}_n$ имеет конечное число образующих, например s. В силу леммы 7 аннулятор $\operatorname{ann}_A(\mathcal{J}_n / \mathcal{J}_m) \supset \mathfrak{a}$ для любого $m \geq n$, следовательно,

$$l_D(\mathcal{J}_n / \mathcal{J}_m) \leq s l_D(A / \mathfrak{a}) = \text{const} < \infty,$$

поскольку $l_D(A / \mathfrak{a}) < \infty$ (теорема 4). Таким образом, последовательность $\{\mathcal{J}_k\}$ стабилизируется на некотором шаге. Теорема доказана.

3. Простые A-модули без D-кручения. В дальнейшем D — дедекиндовое кольцо с условием C).

3.1. Функторы S^{-1} и Soc. Пусть $B := S^{-1}A$ — локализация A по мультипликативно замкнутому множеству $S = D \setminus \{0\}$. Согласно лемме 1 B — евклидовое кольцо, поэтому каждый его левый (и правый) идеал главный. Если M — простой A-модуль без D-кручения, то $S^{-1}M$ — простой B-модуль. Следовательно, определено каноническое отображение, которое тоже будем обозначать

$$S^{-1}\colon \hat{A} \text{ (без } D\text{-кручения)} \to \hat{B},\ [M] \to [S^{-1}M]. \tag{14}$$

Каждый A-модуль M без D-кручения отождествим со своим образом в $S^{-1}M$. Тогда M — существенный A-подмодуль в $S^{-1}M$, т.е. M имеет нетривиальное пересечение с любым ненулевым A-подмодулем из $S^{-1}M$.

Пусть N — простой B-модуль и $n \in N$ — произвольный ненулевой элемент. Тогда $\mathcal{J} := \operatorname{ann}_A(n) = \{v \in A\colon vn = 0\} \neq 0$. В силу теоремы 2 A-модуль $An \cong$ $\cong A / \mathcal{J}$ имеет конечную длину, следовательно, содержит некий простой A-модуль M. Отсюда $N \cong S^{-1}M$ — изоморфизм B-модулей (а также A-модулей), тогда $\operatorname{Soc}_A N \cong \operatorname{Soc}_A(S^{-1}M)$ — изоморфизм A-модулей, где $\operatorname{Soc}_A N$ — цоколь A-модуля, который равен по определению сумме простых A-модулей в N. Так как A-модуль M является простым и существенным в $S^{-1}M$, то $\operatorname{Soc}_A(S^{-1}M) = M$. Отсюда $\operatorname{Soc}_A N$ — простой A-модуль без D-кручения. Следовательно, определено отображение

$$\operatorname{Soc}\colon \hat{B} \to \hat{A} \text{ (без } D\text{-кручения)},\ [N] \to [\operatorname{Soc}_A N]. \tag{15}$$

Лемма 8. *Канонические отображения* (14) *и* (15) *взаимно обратны.*

Доказательство. Любой модуль $M \in \hat{A}$ (без D-кручения) является простым существенным A-подмодулем в $S^{-1}M$, следовательно, $\operatorname{Soc}_A(S^{-1}M) = M$.

Обратно, пусть N — простой B-модуль, тогда он изоморфен B-модулю $B / \mathfrak{m}$ для некоторого левого максимального идеала $\mathfrak{m} \subset B$. В силу теоремы 2 $L :=$ $:= A / A \cap \mathfrak{m}$ — A-подмодуль конечной длины в $B / \mathfrak{m}$ $(A \cap \mathfrak{m} \neq 0)$, поэтому L содержит некоторый простой A-подмодуль M. Тогда из универсальности функтора локализации и простоты B-модуля N вытекает изоморфизм B-модулей $S^{-1}M \cong N$, следовательно, $M \cong \operatorname{Soc}_A N$. Отсюда $S^{-1}(\operatorname{Soc}_A N) \cong N$. Лемма доказана.

Поскольку B — область главных левых (и правых) идеалов (B — евклидовое кольцо), то левые максимальные идеалы — это левые идеалы вида Bb, где $b \in B$ — неразложимый элемент. Причем левый максимальный идеал $\mathfrak{m} \subset B$ однозначно с точностью до умножения слева на обратимый элемент кольца B определяется неразложимым элементом $b \in B$ таким, что $\mathfrak{m} = Bb$. Каждый простой B-модуль изоморфен модулю вида B / Bb для некоторого неразложимого $b \in B$. Причем простые B-модули B / Bb и B / Bc изоморфны тогда и только тогда, когда b и c подобны [8], т.е. существует $u \in B$ такой, что $Bu +$ $+ Bc = B$ и $Bu \cap Bc = Bbu$; другими словами, наибольшим общим правым делителем u и c является 1, а наименьшим общим левым кратным — bu. Пусть $\mathfrak{m} = Bb$ — левый максимальный идеал кольца B, обозначим через $M_{\mathfrak{m}}$ (либо сокращенно M_b) A-модуль $M_{\mathfrak{m}} := A / A \cap \mathfrak{m}$.

Предложение 3. *Каждый простой A-модуль без D-кручения имеет вид*

$M_{\mathfrak{m}} = A / A \cap \mathfrak{m}$ *для некоторого левого максимального идеала* $\mathfrak{m} = Bb$ *из* B, $b \in B$.

Пусть $\mathfrak{n} = Bc$ *— левый максимальный идеал кольца* B, $c \in B$, *тогда* A*-модули* $M_{\mathfrak{m}}$ *и* $M_{\mathfrak{n}}$ *изоморфны тогда и только тогда, когда* b *и* c *подобны* (B*-модули* $B / \mathfrak{m}$ *и* $B / \mathfrak{n}$ *изоморфны*).

Доказательство. Пусть M —простой A-модуль без D-кручения, тогда $S^{-1}M$ — простой B-модуль, изоморфный B-модулю $B / \mathfrak{m}$ для некоторого левого максимального идеала $\mathfrak{m}$ кольца B. Отождествим M со своим вложением $B / \mathfrak{m}$, тогда $M = A / A \cap \mathfrak{m}$.

Из изоморфизма A-модулей $M_{\mathfrak{m}} \cong M_{\mathfrak{n}}$ в силу свойств функтора локализации следует изоморфизм B-модулей $S^{-1}M_{\mathfrak{m}} \cong B / \mathfrak{m}$ и $S^{-1}M_{\mathfrak{n}} \cong B / \mathfrak{n}$. Это равносильно тому, что b и c подобны.

Обратно, пусть B-модули $B / \mathfrak{m}$ и $B / \mathfrak{n}$ изоморфны. Тогда они изоморфны и как A-модули, следовательно, их цоколи $\mathrm{Soc}_A(B / \mathfrak{m})$ и $\mathrm{Soc}_A(B / \mathfrak{n})$ тоже изоморфны. Но в силу леммы 8 $\mathrm{Soc}_A(B / \mathfrak{m}) \cong \mathrm{Soc}_A(S^{-1}M) \cong M_{\mathfrak{m}}$ и $\mathrm{Soc}_A(B / \mathfrak{n}) \cong$ $\cong M_{\mathfrak{n}}$. Лемма доказана.

3.2. Условия простоты A-модуля $M_{\mathfrak{m}}$.

Лемма 9. *Пусть* $\mathfrak{m}$ *— левый максимальный идеал кольца* B. *Тогда* A*-модуль* $M_{\mathfrak{m}} = A / A \cap \mathfrak{m}$ *простой в том и только в том случае, когда* $\mathrm{Hom}_A(M_{\mathfrak{m}}, N) = 0$ *для любого простого* A*-модуля* N *с* D*-кручением.*

Доказательство. *Необходимость* очевидна, так как $[M_{\mathfrak{m}}] \in \hat{A}$ (без D-кручения).

Достаточность. Предположим, что $M_{\mathfrak{m}}$ — не простой A-модуль, тогда $A \cap \mathfrak{m}$ строго содержится в некотором левом максимальном идеале $\mathcal{J}$ кольца A. Очевидно, $S^{-1}\mathcal{J} = B$, ибо в противном случае ввиду максимальности $\mathfrak{m}$ имеем $S^{-1}\mathcal{J} = \mathfrak{m}$, откуда $\mathcal{J} \subsetneq A \cap S^{-1}\mathcal{J} = A \cap \mathfrak{m}$ (противоречие). Следовательно, $\mathcal{J} \cap S \neq$ $\neq \varnothing$ и A-модуль $N = A / \mathcal{J}$ является простым с D-кручением. Естественный эпиморфизм A-модулей $M_{\mathfrak{m}} \to N$, $u + A \cap \mathfrak{m} \to u + \mathcal{J}$ не является нулевым. Тогда $\mathrm{Hom}_A(M_{\mathfrak{m}}, N) \neq 0$. Лемма доказана.

Следующая лемма является достаточным условием простотыA-модуля $M_{\mathfrak{m}}$.

Лемма 10. *Пусть* $\mathfrak{m}$ *— левый максимальный идеал кольца* B. *Если существует элемент* $v \neq 0 \in A \cap \mathfrak{m}$, *действующий инъективно на любом простом* A*-модуле с* D*-кручением, то* A*-модуль* $M_{\mathfrak{m}}$ *— простой.*

Доказательство. Пусть $M_{\mathfrak{m}}$ — не простой, тогда в силу леммы 9 существует ненулевой A-гомоморфизм φ из $M_{\mathfrak{m}}$ в некоторый A-модуль N с D-кручением. Поскольку A-модуль $M_{\mathfrak{m}}$ циклический с образующими $u = 1 +$ $+ A \cap \mathfrak{m}$ и $\varphi \neq 0$, то $n = \varphi(u) \neq 0 \in N$. Тогда $vn = \varphi(v + A \cap \mathfrak{m}) = 0$ (противоречие). Лемма доказана.

Пусть A-модуль $M_{\mathfrak{m}}$ не простой для некоторого левого максимального идеала $\mathfrak{m} \subset B$; цоколь $\mathrm{Soc}_A(M_{\mathfrak{m}})$ — наименьший собственный A-подмодуль в $M_{\mathfrak{m}}$. Это равносильно существованию наименьшего левого идеала $\mathcal{J}$ кольца A, строго содержащего $A \cap \mathfrak{m}$. Аналогично доказательству леммы 9 (где $\mathcal{J}$ — максимальный идеал) имеем $\mathcal{J} \cap S \neq \varnothing$, следовательно, $\mathcal{J} \cap D$ — собственный идеал кольца D.

Лемма 11. *Пусть* $M_{\mathfrak{m}}$ *— не простой* A*-модуль для некоторого левого максимального идеала* $\mathfrak{m}$ *кольца* B, $\mathcal{J}$ *— наименьший из левых идеалов кольца* A, *строго содержащих* $\mathfrak{n} := A \cap \mathfrak{m}$. *Положим* $\mathfrak{a} = \mathcal{J} \cap D$ *(собственный идеал кольца* D*). Тогда нулевой элемент* $\alpha \in D$ *принадлежит* $\mathfrak{a}$ *тогда и только тогда, когда* $M_{\mathfrak{m}\alpha^{-1}}$ *— простой* A*-модуль. Причем для любого* $\alpha \neq 0 \in \mathfrak{a}$ *имеет место изоморфизм* A*-модулей*:

$$M_{\mathfrak{m}\alpha^{-1}} \cong \mathcal{J} / \mathfrak{n} \, (= \mathrm{Soc}_A(M_{\mathfrak{m}})) \cong (A\alpha + \mathfrak{m}) / \mathfrak{m}.$$

Доказательство. Для любого $\alpha \neq 0 \in D$ положим $I(\alpha) = \mathfrak{n} + A\alpha$. Поскольку длина любого ненулевого элемента из $\mathfrak{n}$ строго больше нуля, то $\alpha \notin \mathfrak{n}$ и включение $I(\alpha) \supset \mathfrak{n}$ строгое, следовательно, в силу определения $\mathcal{J}$ выполняется включение $I(\alpha) \supseteq \mathcal{J}$ для любого $\alpha \neq 0 \in D$. Очевидно, левые идеалы $I(\alpha)$ и $\mathcal{J}$ равны в том и только в том случае, когда $\alpha \in \mathfrak{a}$. В силу изоморфизма A-модулей $(I(\alpha) / \mathfrak{n} \cong A\alpha / A\alpha \cap \mathfrak{m} \cong A / A \cap \mathfrak{m}\alpha^{-1} = M_{\mathfrak{m}\alpha^{-1}})$ и простоты A-модуля $\mathcal{J} / \mathfrak{n} = \mathrm{Soc}_A(M_{\mathfrak{m}})$, доказательство леммы очевидно. Действительно, если $\alpha \neq 0 \in \mathfrak{a}$, то $I(\alpha) = \mathcal{J}$ и тогда $M_{\mathfrak{m}\alpha^{-1}} \cong \mathcal{J} / \mathfrak{n}$ — простой A-модуль. Обратно, если $M_{\mathfrak{m}\alpha^{-1}}$ — простой A-модуль, то в силу определения $\mathcal{J}$ имеем равенство $I(\alpha) = \mathcal{J}$ и, следовательно, $\alpha \in \mathfrak{a}$. В силу очевидной цепочки изоморфизмов A-модулей $I(\alpha) / \mathfrak{n} \cong A\alpha / A\alpha \cap \mathfrak{m} \cong (A\alpha + \mathfrak{m}) / \mathfrak{m}$ лемма доказана.

3.3. Нормальные элементы. В кольце D введем отношение $<$: $\alpha < \beta$, если $\mathfrak{p} < \mathfrak{q}$ для любых, принадлежащих одной орбите, максимальных идеалов $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{q}$, содержащих соответственно α и β. Для любых $\alpha, \beta \in D$ легко найти натуральное положительное s такое, что $\sigma^{-s}(\alpha) < \beta$.

Определение 2. *Элемент* $b = v_m\beta_m + \ldots + \beta_0 \in A$, $\beta_i \in D$, $m \leq i \leq 0$, *называется нормальным, если* $\beta_0 < \beta_m$ *и* $\beta_0 < a$.

Непосредственно из определения нормального элемента и классификации простых A-модулей с D-кручением вытекает следующая лемма.

Лемма 12. *Каждый нормальный элемент кольца* A *действует инъективно на любом простом* A*-модуле с* D*-кручением.*

Из леммы 10 следует, что если левый максимальный идеал $\mathfrak{m}$ кольца B содержит нормальный элемент, то A-модуль $M_{\mathfrak{m}}$ простой. Следующая лемма показывает, что нормальных элементов, вообще говоря, “много”, и существует в некотором смысле каноническая (и вполне вычислимая) процедура превращения любого элемента в нормальный. Как будет показано, лемма 13 полезна при построении простых A-модулей без D-кручения.

Лемма 13. *Для любого элемента* $b = v_{-m}\beta_{-m} + \ldots + \beta_0 \in A$ *длины* $m > 0$, $\beta_i \in D$, $-m \leq i \leq 0$, *существуют ненулевые* $\alpha, \beta \in D$ *такие, что* $\beta b \alpha^{-1} \in A$ *— нормальный элемент. При этом достаточно положить* $\alpha = \Pi\{\sigma^i(\beta_0) \mid -s \leq i \leq 0\}$, $\beta = \Pi\{\sigma^j(\beta_0) \mid -m - s \leq j \leq 1\}$, *где* $0 \leq s \in \mathbb{N}$ *такое, что* $\sigma^{-s}(\beta_0) < \beta_{-m}$, $\sigma^{-s}(\beta_0) < a$, $\sigma^{-s}(\beta_0) < \beta_0$.

Доказательство. Очевидная проверка показывает, что элемент $c := \beta b \alpha^{-1} = v_{-m}\gamma_{-m} + \ldots + \gamma_0$ принадлежит A и

$$\gamma_0 = \Pi\left\{\sigma^i(\beta_0) \mid -m - s \leq i < -s\right\}, \; \gamma_{-m} = \beta_{-m}\Pi\left\{\sigma^i(\beta_0) \mid 0 < i < m\right\}.$$

Непосредственно из явного вида γ_0 и γ_{-m} следует, что c — нормальный элемент. Лемма доказана.

3.4. Основная теорема, $\hat{A}$ (без D-кручения).

Теорема 5. *Пусть $b \in B$ — неразложимый элемент длины $m > 0$ вида $b = v_{-m}\beta_{-m} + \ldots + \beta_0$, где $\beta_i \in D$ для любого $-m \le i \le 0$; α такой, как в лемме 13. Тогда $(A\alpha + Bb)/Bb$ — простой A-модуль без D-кручения $(= \mathrm{Soc}_A(B/Bb))$. С точностью до изоморфизма каждый простой A-модуль без D-кручения получается таким образом, элемент b при этом определен однозначно с точностью до подобия.*

Доказательство. В силу выбора элемента α и лемм 10, 12 A-модуль $M := A / A \cap \beta b\alpha^{-1}$ простой без D-кручения (так как левый идеал $A \cap \beta b\alpha^{-1}$ содержит нормальный элемент). Из явного изоморфизма A-модулей $(A\alpha + Bb)/Bb \cong A\alpha / A\alpha \cap Bb \cong M$ следует, что A-модуль $(A\alpha + Bb)/Bb$ — простой и равен $\mathrm{Soc}_A(B/Bb)$ в силу леммы 8.

Пусть N — некоторый простой A-модуль без D-кручения, тогда B-модуль $S^{-1}N$ изоморфен B-модулю B/Bb для некоторого неразложимого элемента $b \in B$, определенного однозначно с точностью до подобия. Так как элементы X и Y обратимы в B, то элемент b всегда можно считать таким, как в условии настоящей теоремы. Из леммы 8 вытекает изоморфизм A-модулей N и $\mathrm{Soc}_A(B/Bb) = (A\alpha + Bb)/Bb$. Теорема доказана.

4. Простые A_q-модули.

4.1. В качестве приложения применим разработанную технику к одной "квантовой" алгебре A_q, которая очень похожа на квантовую универсальную обертывающую $U_q\,\mathrm{sl}(2)$ [9, 10]. Пусть алгебра

$$A_q = A := K\left[C, H, H^{-1}\right]\left[X^+, X^-; a = C - H\right]$$

является ОАВ степени 1, базисное кольцо равно $K\left[C, H, H^{-1}\right]$, определяющий автоморфизм σ: $\sigma(H) = qH$, $\sigma(C) = C$; определяющий элемент $a = a(C, H) = C - H$. Для простоты полагаем основное поле K алгебраически замкнутым, хотя все результаты с использованием пп. 1–3 легко обобщаются на случай произвольного поля. Тогда на простом модуле центральный элемент C действует скалярно, следовательно, задача описания простых A_q-модулей эквивалентна такой же задаче для фактор-алгебры $A(\lambda) := A/(C - \lambda)$, $\lambda \in K$. Более подробно $\hat{A}_q = \bigcup\{\hat{A}(\lambda) \mid \lambda \in K\}$. Очевидно, $A(\lambda) = D[X, Y; \sigma, a_\lambda = \lambda - H]$ — ОАВ степени 1 с базисным дедекиндовым кольцом $D = K[H, H^{-1}]$, определяющим автоморфизмом σ кольца D: $\sigma(H) = qH$ (для удобства мы обозначили одной и той же буквой σ два различных автоморфизма), определяющим элементом $a_\lambda = a(\lambda, H) = \lambda - H$. Локализация $B = S^{-1}A(\lambda)$ алгебры $A(\lambda)$ по мультипликативно заданному множеству $S = D \setminus \{0\}$ изоморфна кольцу косых лорановских многочленов $B = K(H)[X, X^{-1}; \sigma]$, где $K(H)$ — кольцо рациональных функций одной независимой переменной; $K(H) = S^{-1}D$ — поле частных кольца D, поэтому автоморфизм $\sigma: D \to D$ однозначно продолжается до автоморфизма поля $K(H)$.

Имеется два качественно различных случая: параметр q является корнем из единицы или нет. Если q не является корнем из единицы, то дедекиндово кольцо D удовлетворяет условию C) п.2 и поэтому все полученные результаты п.3 применимы в этом случае.

4.2. $q^n = 1$ (q — первообразный корень n-й степени из 1). В этом случае центр алгебры $A(\lambda)$ равен $K\langle X^n, Y^n\rangle$, следовательно, на любом простом модуле M элементы X^n и Y^n действуют умножением на некоторые (вообще говоря, взаимозависимые) скаляры ν и η соответственно; M является простым модулем над конечномерной алгеброй $A(\lambda) / \langle X^n - \nu, Y^n - \eta \rangle$. Следовательно,

$$\hat{A}(\lambda) = \hat{A}(\lambda) \ (D\text{-кручение}), \tag{16}$$

т.е. всякий простой $A(\lambda)$-модуль является модулем с D-кручением.

Множество максимальных идеалов кольца D $\mathfrak{M} = \{H - \mu \mid \mu \neq 0 \in K\}$ естественным образом отождествляется с множеством $K^* = K \setminus \{0\}$, $H - \mu \leftrightarrow \mu$. При этом отождествлении группа $\mathbb{Z}_n = \langle \sigma \rangle$ действует на K^* умножением на число q^{-1}, $\sigma \cdot \mu = \mu / q$. Множество орбит $\hat{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M} / \mathbb{Z}_n = K^* / \mathbb{Z}_n$ состоит только из циклических орбит длины n, $\hat{\mathfrak{M}} = \mathrm{Cyc}$, при этом существует лишь одна вырожденная орбита $\mathfrak{C} := \{q^i \lambda \mid i \in \mathbb{Z}_n\}$ в случае, когда $\lambda \neq 0$. Поскольку $\sigma^n = \mathrm{id}$, то в обозначениях п.2 кольцо $\Lambda_n \cong D(\sigma^n = \mathrm{id}, a'_\lambda)$ является коммутативным, $a'_\lambda = \Pi\{\lambda - q^i H \mid 1 \leq i \leq n\}$. Очевидно, кольцо $C_{\mathfrak{O}}$ изоморфно кольцу $K[x, x^{-1}]$, если $\mathfrak{O}$ — невырожденная орбита ($\mathfrak{O} = \mathfrak{C}$); и кольцу $C_{\mathfrak{O}} \cong K[x]$, если $\mathfrak{O} = \mathfrak{C}$ — вырожденная орбита. Аналогично случаю $\mathfrak{M}$ множество $\tilde{C}_{\mathfrak{O}}$ в обоих случаях отождествляется с фактор-группой $K^* / \mathbb{Z}_n$. В силу (16) и теоремы 1 получаем следующую классификацию.

Классификация простых A_q-модулей (q — первообразный корень n-й степени из единицы). Каждый простой A_q-модуль является изоморфным одному из следующих модулей и наоборот:

3) $\lambda \in K^*$: $L(\lambda) := A(\lambda) / (H - \lambda, Y^n, X)$;

5) $(\lambda, [\mu], [\nu]) \in K \otimes K^* / \mathbb{Z}_n \otimes K^* / \mathbb{Z}_n$, $\lambda \notin [\mu] := \{q^i \mu \mid 1 \leq i \leq n\}$: $L(\lambda, [\mu], [\nu]) := A(\lambda) \underset{\Lambda_n}{\otimes} K_{\mu, \nu}$, где $K_{\mu, \nu} = Kv$ — одномерный Λ_n-модуль: $Hv = \mu v$, $X^n v = \nu v$, $Y^n v = \nu^{-1} a'_\lambda(\mu) v$;

6) $(\lambda, [\nu]) \in K^* \otimes K^* / \mathbb{Z}_n$: $L^+(\lambda, [\nu]) := A(\lambda) \underset{\Lambda_n}{\otimes} K^+_\nu$, где $K^+_\nu = Kv$ — одномерный Λ_n-модуль: $Hv = \lambda v$, $X^n v = \nu v$, $Y^n v = 0$;

7) $(\lambda, [\nu]) \in K^* \otimes K^* / \mathbb{Z}_n$: $L^-(\lambda, [\nu]) := A(\lambda) \underset{\Lambda_n}{\otimes} K^-_\nu$, где $K^-_\nu = Kv$ — одномерный Λ_n-модуль: $Hv = \lambda v$, $X^n v = 0$, $Y^n v = \nu v$;

4.3. q — не корень из единицы. Как и прежде, отождествим $\mathfrak{M}$ с K^*, тогда на $\mathfrak{M} = K^*$ действует группа $\mathbb{Z} = \langle \sigma \rangle$ умножением на число q^{-1}, $\sigma \cdot \mu = \mu / q$, $\mu \in K^*$. Множество орбит $\hat{\mathfrak{M}} = K^* / \mathbb{Z}$ состоит только из линейных орбит $\hat{\mathfrak{M}} = \mathrm{Lin}$, причем если $\lambda \neq 0$, то существует единственная вырожденная орбита $\mathfrak{C} := \{q^i \lambda \mid i \in \mathbb{Z}\}$. Согласно теореме 1 существует биекция

$$\mathrm{Lin} / \sim \ \leftrightarrow \hat{A}(\lambda) \ (D\text{-кручение}),$$

исходя из которой получаем следующую классификацию.

Классификация простых A_q-модулей с D-кручением (q — не корень из единицы). Каждый простой A_q-модуль с D-кручением изоморфен одному из следующих модулей и наоборот:

1) $(\lambda, [\mu],) \in K \otimes K^* / \mathbb{Z}$, $\lambda \notin [\mu] := \{q^i \mu \mid i \in \mathbb{Z}\}$: $L(\lambda, [\mu]) := A(\lambda) / (H - \mu)$;

2) $\lambda \in K^*$: $L^-(\lambda) := A(\lambda) / (H - \lambda, X)$;

4) $\lambda \in K^*$: $L^+(\lambda) := A(\lambda) / (qH - \lambda, Y)$.

Непосредственно из леммы 8 и теоремы 5 следует такая классификация.

Классификация простых A_q-модулей без D-кручения (q — не корень из единицы).

1. Для каждого $\lambda \in K$ каноническое отображение

$$S^{-1}\colon \hat{A}(\lambda) \text{ (без } D\text{-кручения)} \to \hat{B},\ [M] \to [S^{-1}M]$$

является биекцией, с обратным $\mathrm{Soc}\colon [N] \to [\mathrm{Soc}_{A(\lambda)}N]$, где $\mathrm{Soc}_{A(\lambda)}N$ — цоколь $A(\lambda)$-модуля N.

2. A_q-модуль M простой без D-кручения $\Leftrightarrow M \cong M_{\lambda, b} := (A(\lambda)\alpha + Bb) / Bb$, где $\lambda \in K$ и $b \in A(\lambda)$ неразложимый в $B = K(H)[X, X^{-1}; \sigma]$ (и однозначно с точностью до подобия определенный) элемент такой, что $\beta b \alpha^{-1}$ — нормальный элемент для некоторых $\alpha, \beta \in D$ (например, как в лемме 13). Модули $M_{\lambda, b}$ и $M_{\mu, c}$ изоморфны тогда и только тогда, когда $\lambda = \mu$ и b, c подобны в B.

5. Неразложимые элементы. Все обозначения и соглашения пп. 1–3 сохраняются. В этом пункте D — область главных идеалов.

5.1. Решение “функциональных” уравнений. Введем ряд определений. Пусть $\mathbb{Z}^\infty = \prod_{i\in\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$ — прямое произведение групп; $\mathbb{Z}_-^\infty$ (соответственно $\mathbb{Z}_+^\infty$) — подгруппа в $\mathbb{Z}^\infty$, состоящая из таких элементов (z_i), что $z_i = 0$ для всех достаточно малых (соответственно больших) i, $\mathbb{Z}_\infty = \mathbb{Z}_+^\infty \cap \mathbb{Z}_-^\infty$. Тогда $\sigma\colon \mathbb{Z}^\infty \to \mathbb{Z}^\infty$, $(\sigma z)_i = z_{i-1}$ — автоморфизм группы $\mathbb{Z}^\infty$ (“сдвиг вправо”, специально введено обозначение σ для двух различных автоморфизмов, такое отождествление будет полезным в дальнейшем). Очевидно, σ переводит все рассмотренные выше подгруппы в себя.

Лемма 14. *a). Пусть* $\xi = \sigma - 1$ (*соответственно* $\xi = \sigma + 1$), $m = (m_i) \in \mathbb{Z}_\infty$. *Тогда последовательность абелевых групп* $0 \to \mathbb{Z}_\infty \xrightarrow{\xi} \mathbb{Z}_\infty \xrightarrow{\eta} \mathbb{Z} \to 0$ *точна*, $\eta(m) = \sum m_j$ (*соответственно* $\eta(m) = \sum (-1)^j m_j$).

b). Пусть $\xi = 1 + \sigma + \ldots + \sigma^n$, $n \geq 1$. *Тогда последовательность групп* $0 \to \mathbb{Z}_\infty \xrightarrow{\xi} \mathbb{Z}_\infty \xrightarrow{\eta} \mathbb{Z}^n \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0$ *точна*, $\varepsilon(z_1, \ldots, z_n) = z_1 + \ldots + z_n$, $\eta = (I, I\sigma, \ldots, I\sigma^{n-1})$, $I(m) = \sum (m_{(n+1)j} - m_{(n+1)j-1})$.

Поскольку D — область главных идеалов, то каждый простой идеал $\mathfrak{p}$ из D однозначно (с точностью до обратимых элементов) характеризуется своим неразложимым элементом, который для удобства будем обозначать через $\mathfrak{p}$. Любой ненулевой элемент из области главных идеалов однозначно (с точностью до обратимых элементов) разлагается в произведение неразложимых сомножителей. Поэтому для любого $\alpha \in R$ (поле частных D) однозначно определено так называемое *орбитное* разложение

$$\alpha = \alpha^* \prod_{\mathcal{O} \in \mathfrak{M}} \alpha_{\mathcal{O}}, \tag{17}$$

где в сомножитель $\alpha_{\mathcal{O}} \in R$ входят все неразложимые элементы, принадлежащие орбите $\mathcal{O}$, $\alpha^* \in D^*$.

Пусть $L: D_* \to D_*$ — гомоморфизм мультипликативной полугруппы $D_* = D \setminus \{0\}$ кольца D такой, что $\operatorname{Ker} L \subset D^*$ — множество обратимых элементов и $(L(\alpha))_{\mathfrak{O}} = L(\alpha_{\mathfrak{O}})$ для всех орбит $\mathfrak{O}$ и $\alpha \in D_*$. Такие гомоморфизмы будем называть *сильными*. Очевидно, $L(\alpha) = \sigma^i(\alpha) \ldots \sigma^j(\alpha)$ — сильный гомоморфизм для любых $i \le \ldots \le j$. Если существует решение уравнения $L(h) = \alpha$, $\alpha \in R^*$, то оно единственное (с точностью до обратимых элементов) и имеет вид $h = h^* \Pi h_{\mathfrak{O}}$ — орбитное разложение, где $L(h_{\mathfrak{O}}) = \alpha_{\mathfrak{O}}$ для любой орбиты $\mathfrak{O} \in \mathfrak{O}(\alpha)$, $L(h^*) = \alpha^*$. Пусть $[\mathfrak{O}] := \{\alpha \in R^* / D^* \mid \alpha = \alpha_{\mathfrak{O}}$ либо $\alpha = 1\} < R^* / D^*$ для любой орбиты $\mathfrak{O}$. Тогда $L[\mathfrak{O}] \subset [\mathfrak{O}]$ для любого сильного гомоморфизма L. Обозначим через $\nu(\mathfrak{p}, \alpha)$ кратность вхождения неразложимого элемента $\mathfrak{p}$ в несократимую дробь $\alpha \in R^*$. Тогда

$$[\mathfrak{O}] \to \mathbb{Z}_\infty,\ \alpha \to \tilde{\alpha} = \left(\nu(\sigma^i(\mathfrak{p})), \alpha\right) \tag{18}$$

— изоморфизм абелевых групп, $\mathfrak{p} \in \mathfrak{O}$ — некоторый фиксированный элемент, $i \in \mathbb{Z}$. В силу (18) сильному гомоморфизму $L(h) = \sigma^i(h) \ldots \sigma^j(h)$ соответствует гомоморфизм $\tilde{L}$ группы $\mathbb{Z}_\infty$: $\tilde{L}(\tilde{h}) = (\sigma^i + \ldots + \sigma^j)(\tilde{h})$. Уравнению $\sigma(h)h^{\pm 1} = \alpha$ соответствует уравнение $(\sigma \pm 1)(\tilde{h}) = (\tilde{\alpha})$. Тогда в силу леммы 14 справедливы леммы 15, 16. Через $\mathfrak{O}(\alpha)$ обозначим совокупность орбит, на которых лежат простые сомножители из несократимой записи элемента $\alpha \neq 0 \in R$.

Лемма 15. *Пусть* $\alpha \neq 0 \in R$. *Тогда решение уравнения* $\sigma(h)h = \alpha$ (*соответственно* $\sigma(h)h^* = \alpha$) *существует тогда и только тогда, когда существует решение при* $\alpha = \alpha^*$ *и для любой орбиты* $\mathfrak{O} \in \mathfrak{O}(\alpha)$

$$\langle \alpha, \mathfrak{O} \rangle := \textstyle\sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \nu(\sigma^i(\mathfrak{p}), \alpha) = 0,\ \mathfrak{p} \in \mathfrak{O}, \tag{19}$$

(*соответственно*

$$\langle \alpha, \mathfrak{O} \rangle := \textstyle\sum_{i \in \mathbb{Z}} \nu(\sigma^i(\mathfrak{p}), \alpha) = 0\,); \tag{20}$$

при этом решение h *имеет вид*

$$h = h^* \textstyle\prod_{\mathfrak{O} \in \mathfrak{O}(\alpha)} \prod_{\mathfrak{p} \in \mathfrak{O}} \mathfrak{p}^{\Sigma(\mathfrak{p})} \tag{21}$$

где $\sum(\mathfrak{p}) = \sum\limits_{i \ge 0} (-1)^i \nu(\sigma^i(\mathfrak{p}), \alpha)$ (*соответственно* $\sum(\mathfrak{p}) = -\sum\limits_{i \ge 0} \nu(\sigma^i(\mathfrak{p}), \alpha)$).

Лемма 16. *Пусть* $\alpha \neq 0 \in R$, $n \ge 1$. *Тогда решение уравнения*

$$\sigma^n(h) \ldots \sigma(h)h = \alpha$$

существует тогда и только тогда, когда существует решение при $\alpha = \alpha^*$ *и для любой орбиты* $\mathfrak{O} \in \mathfrak{O}(\alpha)$ *и любого* $0 \le i \le n$:

$$\textstyle\sum_{i \in \mathbb{Z}} \left(\nu(\sigma^{i-(n+1)j}(\mathfrak{p}), \alpha) - \nu(\sigma^{i-1-(n+1)j}(\mathfrak{p}), \alpha)\right) = 0, \tag{22}$$

при этом решение имеет вид (21), *где*

$$\sum(\mathfrak{p}) = \sum_{j \ge 0} \left(\nu(\sigma^{-(n+1)j}(\mathfrak{p}), \alpha) - \nu(\sigma^{-1-(n+1)j}(\mathfrak{p}), \alpha)\right).$$

5. 2. Изоморфизм модулей вида $M_{(Y+\mathcal{J})}$. Пусть $\mathcal{J}$ — ненулевой левый идеал в B; применим функтор $\operatorname{Hom}_B(\cdot, B / \mathcal{J})$ к последовательности $0 \to B\,b \to \to B \to B / Bb \to 0$, $b \in B$, имеем точную последовательность

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 \to & \mathrm{Hom}(\frac{B}{Bb}, \frac{B}{\mathcal{J}}) & \to & \mathrm{Hom}(B, \frac{B}{\mathcal{J}}) & \to & \mathrm{Hom}(Bb, \frac{B}{\mathcal{J}}) & \to & \mathrm{Ext}^1(\frac{B}{Bb}, \frac{B}{\mathcal{J}}) & \to 0 \\
& \wr & & \wr & & \wr & & \wr & \\
0 \to & \mathrm{Ker}\Delta & \to & \frac{B}{\mathcal{J}} & \xrightarrow{\Delta} & \frac{B}{\mathcal{J}} & \to & \mathrm{Coker}\Delta & \to 0
\end{array}
$$

где $\Delta: x + \mathcal{J} \to bx + \mathcal{J}$. Пусть $I = B(Y + f)$, $\mathcal{J} = B(Y + g)$ для некоторых $f, g \in k^*$. Тогда $B / I \cong k \cong B / \mathcal{J}$ как k-модуль. Пусть $h \in k^*$, тогда $\Delta(h) = (Y + f)h = \sigma^{-1}(h)(Y + g - g) + fh = \sigma^{-1}(h)g + fh \pmod{\mathcal{J}}$. Отсюда в силу леммы 15 (в случае σ^{-1}) следует такая лемма.

Лемма 17. *Пусть $I = B(Y + f)$, $\mathcal{J} = B(Y + g)$ для некоторых $f, g \in k^*$. Тогда следующие утверждения равносильны:* 1) *B-модули B / I и $B / \mathcal{J}$ изоморфны;* 2) $f = g\sigma^{-1}(h) / h$ *для некоторого* $h \in k^*$; 3) *для любой орбиты* $\mathcal{O} \in \mathcal{O}(f/g)$ *выполняется* (20), *т.е.* $\langle f/g, \mathcal{O}\rangle = 0$ *и* $f^* = g^*\sigma^{-1}(h^*) / h^*$.

Следствие 1. *Пусть A-модули $M_{(Y+f)}$ и $M_{(Y+g)}$ простые* (*это так, если $Y + f$ и $Y + g$ — нормальные элементы*). *Тогда A-модули $M_{(Y+f)}$ и $M_{(Y+g)}$ изоморфны тогда и только тогда, когда выполнена предыдущая лемма.*

5. 3. Неразложимые элементы $X^n + f$, $n = 2, 3$. Задача нахождения неразложимых элементов в кольце B довольно трудная. Отметим, что хотя неразложимые элементы колец A и B не совпадают, несложно построить неразложимый элемент из A, который разложим в B. Хотя для A можно написать аналог критерия Эйзенштейна (аналогично [11]), но с его помощью не всегда получаются неразложимые элементы в B. Приведем некоторые примеры неразложимых элементов в B.

Лемма 18. *Пусть $u = X^n + f$, $v = X + \alpha$, $w = X + \sigma^{n-1}(\alpha)$, $f \in k^*$, $n \geq 1$. Следующие утверждения равносильны:* 1) *u делится справа на v;* 2) *u делится слева на w;* 3) $\sigma^{n-1}(\alpha) \dots \sigma(\alpha)\alpha = = (-1)^{n-1}f$.

На основании лемм 16 – 18 справедливо такое следствие.

Следствие 2. *Элементы $X^n + f$ и $Y^n + f$, $n = 2, 3, f \in k^*$ неразложимы тогда и только тогда, когда выполняются равенства* (22) *из леммы* 16.

Пусть $Y^n + f$ из следствия 2 является нормальным, тогда A-модуль $M_{(Y^n+f)}$ простой.

1. *Бавула В. В.* Обобщенные алгебры Вейля и их представления: Дис. ... канд. физ.-мат. наук.– Киев, 1990.– 111 с.
2. *Бавула В. В.* Конечномерность Ext^n-ов и Tor_n-ов простых модулей над одним классом алгебр // Функцион. анализ и его прил.– 1991.– **25**, вып. 3.– С. 80–82.
3. *Бавула В. В.* Обобщенные алгебры Вейля и их представления // Алгебра и анализ.– 1992.– **4**, вып. 1.– С. 74–95.
4. *Бавула В. В.* Классификация простых sl (2)-модулей и конечномерность модуля расширений простых sl (2)-модулей // Укр. мат. журн.– 1990.– **42**, №9.– С. 1174–1180.
5. *Block R. E.* Classification of the irreducible representations of sl (2, $\mathbb{C}$) // Bull. Amer. Math. Soc.– 1979.– **1**.– P.247–250.
6. *Block R. E.* The irreducible representations of the Lie algebra sl (2) and of the Weyl algebra // Adv. Math.– 1981.– **39**.– P. 69–110.
7. *Диксмье Ж.* Универсальные обертывающие алгебры.– М.: Мир, 1978.– 407 с.
8. *Джекобсон Н.* Теория колец.– М.: Изд-во иностр. лит., 1947.– 287 с.
9. *Склянин Е. К.* Об одной алгебре, порожденной квадратичными соотношениями // Успехи мат. наук.– 1985.– **40**, вып.2.– С. 214.
10. *討Ваксман Л. Л., Сойбельман Л.С.* Алгебра функций на квантовой группе $SU(2)$ // Функцион. анализ и его прил.– 1988.– **22**, вып.3.– С. 1–14.
11. *Бавула В. В.* О некоторых обобщениях критерия Эйзенштейна // Укр. мат. журн.– 1990.– **42**, №7.– С. 983–985.

Получено 20.06.91