УДК 517.91

М. К. Спаравало, канд. техн. наук
(Киев. высш. воен. авиац. инж. уч-ще)

Устойчивость и управляемость движения динамических систем вдали от положений равновесия

Доказаны теоремы, устанавливающие связь между устойчивостью и управляемостью движения вдали от состояний равновесия и существованием в расширенном фазовом пространстве динамических систем однородных ω-аттракторов, ω-репеллеров, ω-шунтов.

Доведені теореми, що встановлюють зв'язок між стійкістю та керованістю руху у далечині від станів рівноваги та існуванням в розширеному фазовому просторі динамічних систем однорідних ω-аттракторів, ω-репелерів, ω-шунтів.

Пристальное внимание к изучению движения динамических систем вдали от положений равновесия вызвано тем, что именно здесь происходят процессы самоорганизации и адаптации в живой и неживой природе. Исследование движения в окрестности состояний равновесия обычно проводится с использованием методов линейной алгебры, а для случая движения вдали от состояний равновесия таким аппаратом может служить топологический анализ ω-инвариантных многообразий коразмерности один.

В настоящей работе продемонстрирована возможная техника применения указанного анализа к изучению устойчивости и управляемости подобных движений.

Пусть рассматриваемая при $t \geqslant t_0$ свободная динамическая система (СДС) с векторным полем $f(x, t)$ имеет расширенное фазовое пространство $R^{n+1}_{x,t}$, включающее либо отмеченное n-мерное инвариантное многообразие $M = \{\omega_k(x, t) = 0 \Rightarrow x_k = \psi_k(x^k, t)\}$ либо некоторое $n+1$-мерное множество $EM = \{x_k \geqslant \sigma_k(x^k, t) + \alpha_k\} \cap \{x_k \leqslant \sigma_k(x^k, t) + A_k\}$, где $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — фазовый вектор, $x^k = (x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n)$, $f \in C^{s-1}$, $\psi_k \in C^s$ и $\sigma_k \in C^s$ — однозначные функции, $s \geqslant 1$, $A_k \geqslant \alpha_k$ — действительные числа.

Приведем следующие определения, полагая, что для любой интегральной кривой x_t исходной СДС, принадлежащей некоторому $n+1$-мерному множеству V, при всех $t \geqslant t_0$ существует ортогональная к гиперплоскости $\{x_k = 0\}$ проекция на многообразие M.

Определение 1. *Инвариантное многообразие M называется n-мерным, однородным ω-аттрактором СДС (обозначается $A^{\omega-hom}$), если существует такая $n+1$-мерная окрестность V многообразия M, что $\forall x_{t_0} \notin M$ справедливы следующие условия:*

1) $x_t \subset V \ \forall t \geqslant t_0$;

2) *ω-предельная кривая x_t^{ω} интегральной кривой СДС x_t является подмножеством многообразия M (т. е. $x_t^{\omega} \subset M$);*

3) *$\forall t \geqslant t_0$ справедливо неравенство $\frac{d}{dt}\rho(x_t, M) < 0$, где x_{t_0} — начальное положение интегральной кривой СДС x_t, $\rho(x_t, M)$ — расстояние между x_t и ее ортогональной к гиперплоскости $\{x_k = 0\}$ проекцией на многообразие M.*

Определение 2. *Если многообразие M является $A^{\omega-hom}$ для СДС с векторным полем $-f(x, t)$, то для исходной СДС многообразие M называется n-мерным однородным ω-репеллером и обозначается $R^{\omega-hom}$.*

Определение 3. *Обозначим $V^+ = V \cap \mathrm{epi}\,\psi_k$, $V^- = V \cap \mathrm{hyp}\,\psi_k$, где* epi, hyp — *соответственно надграфик и подграфик функции $\psi_k(x^k, t)$, определяющей многообразие M. Если для любого начального состояния $x_{t_0} \in V^+ (V^-)$ многообразие M является $A^{\omega-hom}$, а для любого $x_{t_0} \in V^- (V^+)$ —*

— $R^{\omega-hom}$ *исходной СДС, то М называется **n-мерным**, однородным левым (правым) ω-шунтом и обозначается* $Sl^{\omega-hom}$ ($Sr^{\omega-hom}$).

Следующее определение используется при изучении поведения СДС относительно неинвариантного многообразия M. Однако особое значение приведенное ниже определение имеет для динамических систем с управлением (ДСУ), так как они, как правило, не имеют общего для всех допустимых управлений n-мерного инвариантного многообразия.

Определение 4. *Множество ЕМ называется $n+1$-мерным однородным ω-аттрактором, если существует такая $n+1$-мерная окрестность V множества EM, что*

1) $x_t \subset V \ \forall t \geqslant t_0$;

2) *либо ω-предельная кривая x_t^{ω} кривой x_t является подмножеством многообразия* $(x_k = \sigma_k(x^k, t) + \alpha_k\}$ $(\{x_k = \sigma_k(x^k, t) + A_k\})$ *либо существует такой момент $\hat{t}$, что $\forall t \geqslant \hat{t}$ справедливо включение $x_t \subset EM$;*

3) $\forall t \geqslant t_0$ *либо* $\forall t \in [t_0; \hat{t}[$ *справедливо одно из двух неравенств:* $\dfrac{d}{dt}\rho(x_t, \{x_k = \sigma_k(x^k, t) + \alpha_k\}) < 0$, *если* $x_{t_0} \in \{x_k \leqslant \sigma_k(x^k, t) + \alpha_k\}$ *и* $\dfrac{d}{dt}\rho(x_t, \{x_k = \sigma_k(x^k, t) + A_k\}) < 0$, *если* $x_{t_0} \in \{x_k \geqslant \sigma_k(x^k, t) + A_k\}$.

Определение 5. *Если множество ЕМ является $A^{\omega-hom}$ для СДС с векторным полем $-f(x, t)$, то для исходной СДС множество ЕМ называется $n+1$-мерным однородным ω-репеллером.*

Формулирование определений 1, 2 производилось с учетом определений аттракторов и репеллеров, приведенных в примечании 2 в [1, с. 52, 53]. Идея введения шунтов взята из [2, с. 20]. В дальнейшей классы однородных ω-аттракторов, ω-репеллеров, левых и правых ω-шунтов для динамических систем обозначим как $[A^{\omega-hom}]$, $[R^{\omega-hom}]$, $[Sl^{\omega-hom}]$, $[Sr^{\omega-hom}]$ соответственно.

1. Устойчивость движения. Пусть задана СДС в виде

$$dx/dt = f(x, t), (x, t) \in X \times T, \tag{1}$$

где $X \subset R_x^n$, $\dim X = \dim x = n$, $T = [t_0; +\infty[$. Полагаем, что $x_t = \bigcap_{i=1}^{n} S_{x_i}$, где $S_{x_i} = \{\omega_i(x, t) = 0, (x, t) \in X \times T\}$ — n-мерные инвариантные многообразия СДС (1), причем преобразование

$$\{y = \omega(x, t) \Leftrightarrow x = \omega^{-1}(y, t)\} \tag{2}$$

является C^s-диффеоморфизмом, для всех $t \in T$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$. Указанное преобразование отображает:

1) СДС (1) на СДС

$$dy/dt = \varphi(y, t), (y, t) \in Y \times T; \tag{3}$$

2) $X \times T$ на $Y \times T \subset R_{x,t}^{n+1}$;

3) S_{x_i} на $S_{y_i} = \{y_i = 0, (y, t) \in Y \times T\}$, являющееся n-мерным инвариантным многообразием СДС (3);

4) x_t на $y_t = \bigcap_{i=1}^{n} S_{y_i}$ — интегральную кривую СДС (3).

Согласно определению асимптотической устойчивости, приведенному в [3], справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Для асимптотической устойчивости x_t достаточно, чтобы все $S_{y_i} \in [A^{\omega-hom}]$, $i = (1, \ldots, n)$, и $\omega^{-1}(y, t)$ равномерно стремилась к $\omega^{-1}(0, t)$ на T при $y \to 0$.*

Доказательство. Пусть $\hat{x}_t = (\hat{x}(t, \hat{x}_0), t)$ — интегральная кривая СДС (1), отличная от x_t. C^s-диффеоморфизмом (2) она отображается на

$\hat{y}_t = (\hat{y}(t, \hat{y}_0), t)$, где $\hat{y}(t, \hat{y}_0) = \omega(\hat{x}(t, \hat{x}_0), t)$. Рассмотрим расстояние

$$\rho(\hat{x}_t, x_t) = \left\{\sum_{i=1}^{n} (\hat{x}_i(t, \hat{x}_0) - x_i(t, x_0))^2\right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{\sum_{i=1}^{n} (\omega_i^{-1}(\hat{y}(t, \hat{y}_0), t) - \omega_i^{-1}(0, t))^2\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{4}$$

По условию теоремы для любого $\Delta = \varepsilon/\sqrt{n} > 0$ найдется такая окрестность Y_0 точки $y_0 = 0$ в виде открытого шара с центром в y_0 и радиусом $\delta = \theta(\Delta) = \theta'(\varepsilon)$, что $\forall y \in Y_0$ и $t \in T$ справедливо неравенство $\| \omega_i^{-1}(y, t) - \omega_i^{-1}(0, t)) \| < \Delta$, $i = (1, \ldots, n)$. Так как $S_{y_i} \in [A^{\omega-hom}]$ $\forall i = 1, \ldots, n$, то

$$\frac{d}{dt} \| \hat{y}_i(t, \hat{y}_0) \| < 0, \quad \lim_{t\to\infty} \| \hat{y}_i(t, \hat{y}_0) \| = 0. \tag{5}$$

Из (5) следует, что если $\hat{y}_0 \in Y_0$, то и $\hat{y}(t, \hat{y}_0) \in Y_0$ $\forall t \in T$. Итак, для любого Δ найдется такое $\delta > 0$, являющееся радиусом открытого шара Y_0 с центром в точке y_0, что из условия $\hat{y}_0 \in Y_0$ следует неравенство $\| \omega_i^{-1}(\hat{y}(t, \hat{y}_0), t) - \omega_i^{-1}), (0, t)) \| < \Delta$ $\forall t \in T$ или с учетом (4)

$$\rho(\hat{x}_t, x_t) < \sqrt{n\Delta^2} = \varepsilon. \tag{6}$$

C^s-диффеоморфизм (2) отображает Y_0 на n-мерную окрестность X_{x_0} точки x_0. Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность X_{x_0} точки x_0 такая, что, из условия $x_0 \in X_{x_0}$ следует неравенство (6), а это есть условие устойчивости.

Далее, в силу равномерной сходимости функций имеем

$$\lim_{y\to 0} \Omega_i(y) = 0, \tag{7}$$

где $\Omega_i(y) = \sup_{t\in T} \| \omega_i^{-1}(y, t) - \omega_i^{-1}(0, t)) \|$. Согласно (5), (7) находим

$$\lim_{t\to\infty} \Omega_i(\hat{y}(t, \hat{y}_0)) = 0. \quad \text{Но}$$

$$\| \omega_i^{-1}(\hat{y}(t, \hat{y}_0), t) - \omega_i^{-1}(0, t)) \| \leqslant \Omega_i(\hat{y}(t, \hat{y}_0)) \quad \forall t \in T,$$

откуда окончательно получаем условие $\lim_{t\to\infty} \rho(\hat{x}_t, x_t) = 0$, т. е. x_t асимптотически устойчива.

Следующая теорема содержит достаточные условия неустойчивости x_t.

Теорема 2. *Для неустойчивости x_t достаточно, чтобы хотя бы одно многообразие $S_{y_i} \in [R^{\omega-hom}]$ $([Sl^{\omega-hom}], [Sr^{\omega-hom}])$.*

Доказательство. Пусть $S_{y_i} \in [R^{\omega-hom}]$, тогда существует такое действительное число $c_i > 0$, что каждой $\hat{y}_t$, исходящей из точки $(\hat{y}_0, t_0) \notin S_{y_i}$, соответствует свой отрезок $[t_0; \hat{t}]$, на котором выполняются следующие условия:

а) функция $\hat{y}_i(t, \hat{y}_0)$ строго возрастает и в момент $\hat{t}$ достигает значения c_i, если $y_{i,0} \in]0; c_i[$;

б) функция $\hat{y}_i(t, \hat{y}_0)$ строго убывает и в момент $\hat{t}$ достигает значения $-c_i$, если $y_{i,0} \in]-c_i; 0[$.

Зададим три открытых n-мерных шара Y_0^1, Y_0^2, Y_0^3 с центром в точке $y_0 = 0$ и радиусами $\Delta^1 < \Delta^2 < \Delta^3 < c_i$ соответственно. Им соответствуют три трубчатые окрестности $Y_0^1 \times T \subset Y_0^2 \times T \subset Y_0^3 \times T$ интегральной кривой $y_t \equiv 0$ $\forall t \in T$. Из условий а) и б) следует, что для каждой кривой $\hat{y}_t$, исходящей из точки $(\hat{y}_0, t_0) \in \underline{Y_0^1,}$ найдется такой интервал $]t^2; t^3[\subset] t_0 t]$, на котором $\hat{y}_t \in Y_0^3 \times T \setminus \overline{Y_0^2 \times T}$, причем $\hat{y}_{t^2} \in S^n_{\Delta^2} \times T$, $\hat{y}_{t^3} \in S^n_{\Delta^3} \times T$, где $S^n_{\Delta^2}$, $S^n_{\Delta^3}$ — n-мерные сферы радиуса Δ^2, Δ^3 соответственно. Преобразование (2) отображает:

1) $\hat{y}_t$ на $\hat{x}_t$, $Y_0^1 \times T$ на $X^1_{x_0}(t)$, $Y_0^2 \times T$ на $X^2_{x_0}(t)$, $Y_0^3 \times T$ на $X^3_{x_0}(t)$, где $X_{x_0}(t) \subset X^2_{x_0}(t) \subset X^3_{x_0}(t)$ — $n+1$-мерные окрестности кривой x_t;

2) при $t = t_0$ $Y_0^{(1)}$ на $X^1_{x_0}(t_0)$, Y_0^2 на $X^2_{x_0}(t_0)$, Y_0^3 на $X^3_{x_0}(t_0)$, где $X^1_{x_0}(t_0) \subset \subset X^2_{x_0}(t_0) \subset X^3_{x_0}(t_0)$ — n-мерные окрестности точки x_0, представляющие собой сечения множеств $X^i_{x_0}(t)$, $i = 1, 2, 3$, гиперплоскостью $\{t = t_0\}$, причем $\hat{x}_0 \in X^1_{x_0}(t_0)$;

3) $Y_0^3 \times T \setminus \overline{Y_0^2 \times T}$ на $\underline{X^3_{x_0}(t) \setminus} \overline{X^2_{x_0}(t)}$, причем $S^n_{\Delta^2} \times T \cup S^n_{\Delta^3} \times T$ переводится на $F^2(t) \cup F^3(t) = \operatorname{Fr} \overline{X^3_{x_0}(t) \setminus X^2_{x_0}(t)}$.

Последнее условие означает, что на интервале $]t^2; t^3[$ кривая $\hat{x}_t \in X^3_{x_0}(t) \setminus \overline{X^2_{x_0}(t)}$ и $\hat{x}_{t^2} \in F^2(t)$, $\hat{x}_{t^3} \in F^3(t)$. Но для любого $t \in T$ справедливо условие

$$\rho\left(X^3_{x_0}(t) \setminus \overline{X^2_{x_0}(t)}, X^1_{x_0}(t)\right) \geqslant \inf_{\substack{a \in X^3_{x_0}(t) \setminus \overline{X^2_{x_0}(t)},\\ b \in X^1_{x_0}(t),\ t \in T}} \rho(a, b) = \alpha > 0,$$

где α — действительное число. Отсюда на $]t^2; t^3[$ для любой кривой $\hat{x}_t$, исходящей из точки $(\hat{x}_0, t_0) \in X^1_{x_0}(t_0)$, справедливо неравенство $\rho(\hat{x}_t, x_t) \geqslant \alpha$. Согласно определению неустойчивости, приведенному в [3], x_t неустойчива. Теперь пусть $S_{y_i} \in [St^{\omega-hom}]$ $([Sr^{\omega-hom}])$. Шунт делит свою окрестность на два подмножества, причем по отношению ко всем x_t, принадлежащим одному из них, он ведет себя как $R^{\omega-hom}$. Далее структура доказательства повторяет случай $S_{y_i} \in [R^{\omega-hom}]$.

2. Управляемость движения. Пусть ДСУ задана в виде

$$dx/dt = f(x, u, t), (x, u, t) \in R^n_x \times U \times T, \tag{8}$$

где $\dim u = \dim U = p$, $(u(t), f(x, u, t)) \in C^{s-1}$. Обозначим через x_0 начальное состояние фазовой траектории $x(t, x_0, u)$ ДСУ (8), соответствующей $u(t) \in U$ $\forall t \geqslant t_0$, а через $G(x_0, \bar{t})$ — множество достижимости в фазовом пространстве ДСУ (8) за время $\bar{t} > t_0$ из x_0 [4].

Определение 6. *Если существует хотя бы одно значение $t > t_0$, для которого $x_0 \in \operatorname{Fr} G(x_0, t)$ либо $x_0 \notin G(x_0, t)$, то ДСУ (8) называется локально неуправляемой в точке x_0 фазового пространства. Если существует хотя бы одно $x_0 \in X \subset R^n_x$, в котором ДСУ (8) локально неуправляема, то она называется неуправляемой в области X, где $\dim X = n$.*

Обозначим $f_k(x, u, t) \dfrac{\partial \sigma_k(x^k, t)}{\partial t} - \dfrac{\partial \sigma_k(x^k, t)}{\partial x^k} f^k(x, u, t) = 0 \Rightarrow x^k = \sigma^e_k(x^k, u, t)$; $\Delta\sigma_k(x^k, u, t) = \sigma^e_k(x^k, u, t) - \sigma_k(x^k, t)$; $A_k = \sup \Delta\sigma_k(x^k, u, t)$, $\alpha_k = \inf \Delta\sigma_k(x^k, u, t)$ $\forall (x, u, t) \in R^n_x \times U \times T$; $ES^e_{x_k} = \{x_k \geqslant \sigma_k(x^k, t) + \alpha_k\} \cap \cap \{x_k \leqslant \sigma_k(x^k, t) + A_k\} \cap R^n_x \times T$, где функция $x_k = \sigma_k(x^k, t) \in C^s$, $f^k = (f_1, \ldots, f_{k-1}, f_{k+1}, \ldots, f_n)$.

Справедлива следующая теорема о неуправляемости ДСУ.

Теорема 3. *Пусть X — открытая область в R^n и $ES^e_x \subset X \times T$. Для неуправляемости ДСУ (8) в X достаточно, чтобы $ES^e_{x_k}$ принадлежало $[A^{\omega-hom}]$ $([R^{\omega-hom}])$ для всех $u(t) \in U$.*

1. *Палис Ж., ди Мелу В.* Геометрическая теория динамических систем.— М. : Мир, 1986.— 301 с.
2. *Эрроусмит Д., Плейс К.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями.— М. : Мир, 1986.— 243 с.
3. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости.— М. : Наука, 1967.— 472 с.
4. *Вахрамеев С. А., Сарычев А. В.* Геометрическая теория управления // Итоги науки и техники. Сер. Алгебра. Топология. Геометрия / ВИНИТИ.— 1983.— 23.— С. 197—280.

Получено 08.01.92