УДК 517.5

Г. М. Губреев, канд. физ.-мат. наук,
Т. Р. Игнатенко, асп. (Одес. пед. ин-т)

Об одном классе ортогонализаторов семейств экспонент с вещественными частотами

Дается описание полных минимальных семейств экспонент, а также базисов Риса из экспонент, которые допускают ортогонализаторы специального вида. Получено описание всех ортогонализаторов рассматриваемого класса полного и минимального семейства экспонент, формулируется простое условие, обеспечивающее единственность ортогонализатора.

Дається опис повних мінімальних сімей експонент, а також базисів Ріса із експонент, які допускають ортогоналізатори спеціального вигляду. Одержано опис всіх ортогоналізаторів розглянутого класу повної та мінімальної сім'ї експонент, формулюється проста умова, що забезпечує єдиність ортогоналізатора.

1. Постановка задачи и формулировка результатов. В многочисленных работах по безусловной базисности семейств экспонент $\{e^{-i\lambda_k t} : \lambda_k \in \Lambda\}$ в пространстве $L_2(-\pi, \pi)$ прослеживается одна общая идея: такое семейство образует безусловный базис, в частности базис Риса, если оно «несильно уклоняется» от тригонометрической системы $\{e^{-int}: n \in \mathbb{Z}\}$. Отметим основные вехи развития этой идеи. Н. Винер и Р. Пэли, которые внесли крупный вклад в эту тематику, измеряли близость к тригонометрической системе с помощью величины $\sup\limits_n |\lambda_n| - n|$ [1]. Следующий принципиальный шаг был сделан Б. Я. Левиным в работе [2], где мера близости вводится с помощью понятия целой функции типа синуса. Работы [3, 4] посвящены объединению этих двух подходов к исследованию базисных свойств семейств экспонент. В цикле работ А. М. Седлецкого, итоги которого подведены в обзоре [5], при изучении базисов из экспонент в качестве меры отклонения успешно применялось свойство распространения сходимости квазиполиномов. И, наконец, Б. С. Павлов [6, 7] ввел операторную меру близости, формулируемую в терминах обратимости специального оператора Теплица с унимодулярным символом, которая позволила дать полное решение задачи о базисах из экспонент [7, 8].

В настоящей статье вводится новая операторная мера близости семейства экспонент с вещественными частотами к тригонометрической системе, основанная на понятии ортогонализатора. Обозначим через $\mathcal{F}$ класс всех операторов в пространстве $L_2(-\pi, \pi)$ вида

$$(Vh)(t) = h(t) + \frac{d}{dt}\int_{-\pi}^{\pi} F(t-u-\pi)\,h(u)\,du, \tag{1}$$

где F — произвольная 2π-периодическая функция, принадлежащая $L_2(-\pi, \pi)$. Если V неограничен, то он рассматривается на естественной области определения. Сдвижка на π в ядре здесь взята для удобства вычислений.

Легко видеть, что

$$(V^*h)(t) = h(t) - \frac{d}{dt}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{F(u-t-\pi)}\,h(u)\,du$$

и если

$$F(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{int}, \quad h(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{int},$$

то

$$(Vh)(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} (1 + 2\pi i(-1)^n n c_n)\, a_n e^{int}, \ (V^*h)(t) - \sum_{-\infty}^{\infty}(1 - 2\pi i(-1)^n n\bar{c}_n) a_n e^{int}. \tag{2}$$

Таким образом, $h \in D_V = D_{V^*}$ в том и только том случае, когда

$$\sum_{-\infty}^{\infty} n^2 |c_n|^2 |a_n|^2 < \infty. \tag{3}$$

Итак, для каждого оператора $V \in \mathcal{F}$ имеем

$$Ve^{-int} = \alpha_n e^{-int}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

и существуют такие V, что все $\alpha_n \neq 0$, т. е. система $\{Ve^{-int}: n \in \mathbb{Z}\}$ остается полной и ортогональной в $L_2(-\pi, \pi)$. Напомним [9], что оператор, переводящий полную минимальную систему векторов гильбертова пространства в полное ортогональное семейство называется ортогонализатором.

Определение 1. *Полное минимальное семейство экспонент $\{e^{-i\lambda_k t}: \lambda_k \in \Lambda\}$ в пространстве $L_2(-\pi, \pi)$ с вещественными показателями Λ называется $\mathcal{F}$-близким к тригонометрической системе $\{e^{-int}: n \in \mathbb{Z}\}$, если оно имеет ортогонализатор класса $\mathcal{F}$, т. е. если существует такой оператор $V \in \mathcal{F}$, что система $\{Ve^{-i\lambda_k t}: \lambda_k \in \Lambda\}$ будет полной и ортогональной в $L_2(-\pi, \pi)$.*

Определение 2. *Базис Риса $\{e^{-i\lambda_k t}: \lambda_k \in \Lambda \subset \mathbb{R}\}$ пространства $L_2(-\pi, \pi)$ называется базисом, $\mathcal{F}$-близким к тригонометрическому, если он имеет непрерывный и непрерывно обратимый ортогонализатор класса $\mathcal{F}$.*

Основная задача данной статьи заключается в описании $\mathcal{F}$-близких полных минимальных систем и $\mathcal{F}$-близких базисов Риса из экспонент с вещественными показателями. Отметим, что понятие ортогонализатора играет важную роль в теории безусловных базисов гильбертовых пространств. Более того, различные классы таких базисов (базисы Риса, базисы Бари, p-базисы) могут быть определены в терминах их ортогонализаторов. Например, почти нормированное семейство векторов гильбертова пространства является базисом Риса тогда и только тогда, когда оно имеет непрерывный и непрерывно обратимый ортогонализатор. Таким образом, в данной статье в в числе других результатов дается полное описание базисов Риса из экспонент с вещественными показателями, которые имеют ортогонализаторы специального вида.

Перейдем к формулировкам основных результатов. Мы будем использовать только полные минимальные системы экспонент в пространстве $L_2(-\pi, \pi)$. Поэтому последовательности показателей Λ совпадают с множеством корней (простых) целых функций Ψ экспоненциального типа, называемых порождающими, которые удовлетворяют условиям [10, с. 543]

$$(1+|\lambda|)^{-1}\Psi(\lambda) \in L_2(-\infty, \infty), \quad h_\Psi\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = \pi, \tag{4}$$

где через h_Ψ обозначен индикатор функции Ψ. В дальнейшем предполагается, что Ψ всегда нормирована условием $\Psi(0) = 1$.

Далее, для того чтобы избежать некоторых исключений в формулировках основных результатов, всегда будем предполагать, что последовательности Ψ не содержат целых чисел.

Условимся каждый интервал вида $(n, n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$, называть целым. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Для того чтобы полное и минимальное в пространстве $L_2(-\pi, \pi)$ семейство $\{e^{i\lambda_k t} : \lambda_k \in \Lambda \subset \mathbb{Z}\}$ было F-близким к тригонометрической системе, необходимо и достаточно, чтобы каждый целый интервал содержал нечетное число элементов последовательности Λ, т. е.*

$$(-1)^n\Psi(n) > 0, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{5}$$

Из условий (4) вытекает, что порождающая функция Ψ допускает представление

$$\begin{gathered}\Psi(\lambda) = i\lambda(e^{-i\lambda t}, \quad G_\sigma(t)) + \sigma e^{-i\lambda\pi} + \bar{\sigma}e^{i\lambda\pi},\\ \overline{G_\sigma(-t)} = -G_\sigma(t), \qquad G_\sigma \in L_2(-\pi, \pi),\end{gathered} \tag{6}$$

в котором σ может быть произвольным комплексным числом с $\operatorname{Re}\delta = \frac{1}{2}$. Здесь и далее скобки обозначают скалярное произведение в $L_2(-\pi, \pi)$.

Нетрудно проверить, что для любых двух таких представлений

$$G_{\sigma_1}(t) - G_{\sigma_2}(t) \equiv \bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_2, \quad \operatorname{Re}\sigma_1 = \operatorname{Re}\sigma_2 = \frac{1}{2}.$$

Условие (5) гарантирует разрешимость при любом σ нелинейного интегрального уравнения

$$F_\sigma(t) - \overline{F_\sigma(-t)} - \frac{d}{dt}\int_{-\pi}^{\pi}\overline{F_\sigma(u-t-\pi)}\,F_\sigma(u)\,du = G_\sigma, \quad -\pi \leqslant t \leqslant \pi \tag{7}$$

в классе 2π-периодических функций, принадлежащих $L_2(-\pi, \pi)$. Следующий результат дает описание всех ортогонализаторов.

Теорема 2. *Пусть Ψ — порождающая функция $\mathcal{F}$-близкого к тригонометрической системе семейства экспонент, F_σ — произвольное решение уравнения (7), в котором G_σ взята из какого-нибудь представления (6). Тогда* *оператор V вида (1) с $F = F_\sigma$ является ортогонализатором этого семейства и других ортогонализаторов класса $\mathcal{F}$ нет.*

Сформулируем теперь ряд свойств ортогонализаторов заданного семейства экспонент.

Теорема 3. *Пусть оператор V вида (1) является ортогонализатором полного минимального в пространстве $L_2(-\pi, \pi)$ семейства экспонент с порождающей функцией Ψ. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} n^2 |(F, e^{-int})|^4 < \infty;$

2) *спектр каждого ортогонализатора этого семейства совпадает с замыканием комплексной последовательности $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$, причем*

$$|\mu_n|^2 = \Psi(n)(-1)^n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

3) *существует единственный ортогонализатор класса $\mathcal{F}$, на котором $\|F\|^2_{L_2(-\pi,\pi)}$ достигает своего минимума:*

$$\min_{V \in \mathcal{F}} \|F\|^2_{L_2(-\pi,\pi)} = \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{(1 - \sqrt{\Psi(n)(-1)^n})^2}{n^2}.$$

Описание всех базисов Риса, $\mathcal{F}$-близких к тригонометрическому, дает следующая теорема.

Теорема 4. *Для того чтобы семейство $\{e^{-i\lambda_k t}: \lambda_k \in \Lambda\}$ с существенными частотами Λ было базисом Риса пространства $L_2(-\pi, \pi)$, $\mathcal{F}$-близким к тригонометрическому, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

1) *Λ совпадает с множеством корней (простых) целой функции экспоненциального типа Ψ, удовлетворяющей требованиям (4);*

2) *существуют такие константы m, $M > 0$, что*

$$m \leqslant \Psi(n)(-1)^n \leqslant M, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

В следующей теореме строится один класс базисов Риса, $\mathcal{F}$-близких к тригонометрическому.

Теорема 5. *Пусть f — вещественнозначная интегрируемая по Риману функция на отрезке $[0, \pi]$, удовлетворяющая условиям*

$$\int_0^\pi |f(t)|\, dt \leqslant \frac{1}{2}, \quad \int_0^\pi f(t) \sin\frac{t}{2}\, dt = 0.$$

Обозначим через Λ множество корней целой функции

$$\Psi(\lambda) = \cos \pi\lambda - \int_0^\pi f(t) \sin\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) t dt,$$

которые вещественные и простые. Тогда семейство $\{e^{-i\lambda_k t}: \lambda_k \in \Lambda\}$ образует базис Риса пространства $L_2(-\pi, \pi)$, $\mathcal{F}$-близкий к тригонометрическому.

В заключение этого пункта отметим, что в основу данной статьи положены операторные методы, которые, начиная с работы [6], успешно применяются для изучения базисных свойств экспонент и других систем функций [7, 8, 11, 12].

2. Доказательство теорем 1—3. На протяжении всей статьи важную роль играет класс целых функций экспоненциального типа, представимых в виде

$$\Psi_\gamma(\lambda) = i\lambda(e^{-i\lambda t}, \quad F(t) - \overline{F(-t)}) + i\lambda(Se^{-i\lambda t}, \quad F(t)) + \gamma e^{-i\lambda\pi} + \bar{\gamma} e^{i\lambda\pi}, \quad (7)$$

где F — 2π-периодическая функция, принадлежащая $L_2(-\pi, \pi)$, γ — произвольное комплексное число с $\operatorname{Re}\gamma = 1/2$, а оператор S задается формулой

$$(Sf)(t) = \frac{d}{dt}\int_{-\pi}^{\pi} F(t-u-\pi) f(u)\,du. \tag{8}$$

Напомним, что скобки обозначают скалярное произведение в $L_2(-\pi, \pi)$.

Происхождение этих функций будет объяснено в п. 3.

Лемма 1. *Пусть Ψ_γ — какая-нибудь функция вида* (7), $V = I + S$. *Тогда для любых вещественных a и b выполняется равенство*

$$(Ve^{-iax}, Ve^{-ibx}) = \frac{2}{b-a}\{\sin\pi b\Psi_\gamma(a) - \sin\pi a\Psi_\gamma(b)\}, \quad \operatorname{Re}\gamma = \frac{1}{2}. \tag{9}$$

Доказательство немедленно вытекает из тривиального соотношения

$$(Ve^{-iax}, Ve^{-ibx}) = (e^{-iax}, e^{-ibx}) + (Se^{-iax}, e^{-ibx}) + (e^{-iax}, Se^{-ibx}) + \\ + (Se^{-iax}, Se^{-ibx})$$

и следующих равенств:

$$(Se^{-iax}, e^{-ibx}) = \frac{2}{b-a}\{-ia(e^{-iab}, \overline{F(-t)})\sin\pi b + ib(e^{-iat}, \overline{F(-t)})\sin\pi a\},$$

$$(e^{-iax}, Se^{-ibx}) = \frac{2}{b-a}\{ia(e^{-iat}, F(t))\sin\pi b - ib(e^{-iat}, F(t))\sin\pi a\},$$

$$(Se^{-iax}, Se^{-ibx}) = \frac{2}{b-a}\{ia(Se^{-iat}, F(t))\sin\pi b - ib(Se^{-ibt}, F(t))\sin\pi a\}.$$

Чтобы убедиться в справедливости, например, первого из них, заметим, что

$$Se^{-iax} = F(x)(e^{ia\pi} - e^{ia\pi}) - ia\int_{-\pi}^{\pi} F(x-u-\pi)e^{-iau}du. \tag{10}$$

Далее, интегрируя по частям и учитывая периодичность F, получаем следующее соотношение:

$$(Se^{-iax}, e^{-ibx}) = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{d}{dx}\int_{-\pi}^{\pi} F(x-u-\pi)e^{-iau}du e^{ibx}dx = e^{ib\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(-u)e^{-iau}du -$$

$$- e^{ib\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(-u)e^{-iau}du - \frac{b}{a}\int_{\pi}^{\pi} e^{ibx} ia \int_{-\pi}^{\pi} F(x-u-\pi)e^{-iau}dudx =$$

$$= (e^{-iat}, \overline{F(-t)})(e^{ib\pi} - e^{-ib\pi}) - \frac{b}{a}(F(t), e^{-ibt})(e^{ia\pi} - e^{-ia\pi}) +$$

$$+ \frac{b}{a}(Se^{-iax}, e^{-ibx}),$$

из которого вытекает требуемое равенство. Остальные равенства доказываются аналогично.

Замечание 1. Формула (9) верна и для всех комплексных a. В самом деле, после умножения на $(b-a)$ обе части ее являются целыми функциями аргумента a и равны при вещественных a.

Целые функции рассматриваемого класса характеризуются следующим важным свойством.

Лемма 2. *Для любой функции Ψ_γ вида* (7) *выполняется неравенство*

$$\Psi_\gamma(n)(-1)^n \geqslant 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Доказательство. Преобразуем каждое слагаемое в правой части равенства

$$\Psi_\gamma(n)(-1)^n = in(-1)^n(e^{-int}, F(t)-\overline{F(-t)}) + in(-1)^n(Se^{int}, F(t)) +$$
$$+(-1)^n(\gamma e^{-in\pi}+\bar\gamma e^{in\pi}).$$

Во-первых,

$$in(-1)^n(e^{-int}, F(t)-\overline{F(-t)}) = (-1)^n 2n \operatorname{Im}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\,e^{int}dt =$$
$$=(-1)^n 2n \operatorname{Im}(F, e^{-int}).$$

Далее, с учетом формулы (10) при $a=n$ получим

$$(-1)^n in(Se^{int}, F(t)) = (-1)^n n^2\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t-u-\pi)\,e^{inu}du\overline{F(t)}\,dt =$$

$$=(-1)^{2n}n^2\int_{-\pi}^{\pi}\int_{t-2\pi}^{t} F(y)\,e^{iny}dy\overline{F(t)}\,e^{-int}dt = n^2\int_{-\pi}^{\pi}\overline{F(t)}\,e^{-int}dt\int_{-\pi}^{\pi}F(y)\,e^{iny}dy =$$
$$=n^2|(F, e^{-int})|^2.$$

Принимая во внимание, что $(-1)^n(\gamma e^{-in\pi}+\bar\gamma e^{in\pi})=1$, получаем неравенство

$$\Psi_\gamma(n)(-1)^n = 1+2(-1)^n n\operatorname{Im}(F, e^{-int}) + n^2\{\operatorname{Im}(F, e^{-int})\}^2 +$$
$$+n^2\{\operatorname{Re}(F, e^{-int})\}^2 = \{(-1)^n + n\operatorname{Im}(F, e^{-int})\}^2 + n^2\{\operatorname{Re}(F, e^{-int})\}^2 \geqslant 0.$$

Напомним, что каждая полная и минимальная система $\{e^{-\lambda_k t}\lambda_k\in\Lambda\}$ в пространстве $L_2(-\pi, \pi)$ однозначно определяется своей порождающей функцией Ψ со свойствами (4). Считаются выполненными все предположения п.1 о последовательности Λ. Справедлива следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть $V=I+S$ — ортогонализатор класса $\mathcal{F}$ полной и минимальной в $L_2(-\pi, \pi)$ системы экспонент с порождающей функцией Ψ, Ψ_γ — функция вида* (7), *построенная по оператору S и некоторому комплексному числу γ с $\operatorname{Re}\gamma=\dfrac{1}{2}$. Если эти функции имеют хотя бы один общий корень, то $\Psi(\lambda)\equiv\Psi_\gamma(\lambda)$.*

Доказательство. Установим сначала, что множество корней Ψ содержится в множестве корней функции Ψ_γ. Пусть λ_0 — общий корень Ψ и Ψ_γ, о котором шла речь в формулировке леммы. Запишем формулу (9) для $a=\lambda_0$, $b=\lambda_k\in\Lambda$:

$$(Ve^{-i\lambda_0 x}, Ve^{-i\lambda_k x}) = \frac{2}{b-a}\{\sin\pi\lambda_k\Psi_\gamma(\lambda_0)-\sin\pi\lambda_0\Psi_\gamma(\lambda_k)\}.$$

Поскольку Υ ортогонализатор, $\Psi_\gamma(\lambda_0)=0$, $\sin\pi\lambda_0\neq 0$, то отсюда вытекает, что Ψ_γ обращается в нуль на последовательности Λ. Покажем, что Λ совпадает с множеством простых корней функции Ψ_γ. В самом деле, предположим, что μ — некоторый посторонний корень, т. е. $\Psi_\gamma(\mu)=0$, $\Psi(\mu)\neq 0$. Замечание 1 показывает, что в (9) можно положить $a=\mu$, $b=\lambda_k\in\Lambda$. Таким образом,

$$(Ve^{-i\mu x}, Ve^{-i\lambda_k x}) = \frac{2}{(\lambda_k-\mu)}\{\sin\pi\lambda_k\Psi_\gamma(\mu)-\sin\pi\mu\Psi_\gamma(\lambda_k)\}=0,\qquad \lambda_k\in\Lambda,$$

что в силу полноты $\{Ve^{-i\lambda_k x}\}$ возможно лишь в случае $Ve^{-i\mu x}=0$. Здесь мы получили противоречие, поскольку из того, что V имеет плотный образ и диагонализируем в тригонометрическом базисе (см. п. 1), вытекает плотность образа V^* в $(L_2-\pi, \pi)$.

Осталось доказать, что Ψ_γ, как и функция Ψ, имеет только простые корни. Для этого снова записав равенство (9) при $a=\lambda_k\in\Lambda$ и $b=\lambda_k+\varepsilon$, $\varepsilon>0$, получим

$$(Ve^{-i\lambda_k x}, Ve^{-i(\lambda_k+\varepsilon)x}) = \frac{-2}{\varepsilon}\sin\pi\lambda_k\Psi_\gamma(\lambda_k+\varepsilon) =$$

$$= -2\sin\pi\lambda_k\frac{\Psi_\gamma(\lambda_k+\varepsilon)-\Psi_\gamma(\lambda_k)}{\varepsilon}.$$

Так как $Ve^{-i\lambda_k x}\neq 0$ при каждом $\lambda_k\in\Lambda$ (что также немедленно следует из (9)), то, переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$, заключаем, что

$$\|Ve^{-i\lambda_k x}\|^2 = -2\sin\pi\lambda_k\Psi'_\gamma(\lambda_k)\neq 0,$$

т. е. кратные корни у Ψ_γ не появляются.

Обе целые функции Ψ и Ψ_γ принадлежат классу Картрайт [10, с. 324] и имеют одинаковые корни. Поэтому они связаны равенством $\Psi_\gamma(\lambda) = ce^{ia\lambda}\Psi(\lambda)$, где a, c — некоторые константы. Сразу же отметим, что $a = 0$, так как в противном случае из второго условия (4) вытекает, что индикаторная диаграмма функции Ψ_γ не содержится в отрезке $[-\pi i, \pi i]$. Однако, из (7) непосредственно следует, что индикаторная диаграмма содержится в этом отрезке. И, наконец, $c = 0$, поскольку $\Psi(0) = \Psi_\gamma(0) = 1$.

Доказательство теоремы 1. Необходимость. Пусть $V = I + S\in\mathcal{F}$-ортогонализатор семейства $\{e^{-i\lambda_k t}: \lambda_k\in\Lambda\}$. Как и в лемме 3 построим целую функцию Ψ_γ и распорядимся параметром γ так, чтобы функции Ψ и Ψ_γ имели какой-нибудь общий корень $\lambda_0\in\Lambda$. В самом деле, если записать условие $\Psi_\gamma(\lambda_0) = 0$, то получим равенство

$$2\,\mathrm{Im}\,\gamma\sin\lambda_0\pi = i\lambda_0(e^{-i\lambda_0 t}, F(t)-\overline{F(-t)}) + i\lambda_0(Se^{-i\lambda_0 t}, F(t)) + \cos\lambda_0\pi,$$
$$\sin\pi\lambda_0\neq 0,$$

из которого $\gamma = \dfrac{1}{2} + i\,\mathrm{Im}\,\gamma$ находится однозначно. Тогда согласно лемме 3 $\Psi = \Psi_\gamma$ и доказательство заканчивается применением леммы 2.

Достаточность. Итак, пусть $\Psi(n)(-1)^n > 0$, $n\in\mathbb{Z}$. Поскольку $\sum\limits_{n\neq 0}|\Psi(n)|n^{-2}<\infty$, то последовательность

$$y_n = (-1)^n n^{-1}(-1+\sqrt{\Psi(n)(-1)^n}),\quad n\neq 0,\quad n\in\mathbb{Z}$$

принадлежит пространству l_2. Обозначим через F функцию из $L_2(-\pi,\pi)$, коэффициенты Фурье которой определяются равенствами

$$(F, 1) = \frac{1}{2}(G_\sigma, 1),\quad (F, e^{-int}) = iy_n,\quad n\neq 0, \tag{11}$$

где G_σ взята из какого-нибудь представления (6) порождающей функции Ψ. Теперь по функции F построим оператор $V = I + S$ вида (1) и докажем, что он является ортогонализатором полной и минимальной системы $\{e^{i\lambda_k t}: \lambda_k\in\Lambda\}$.

Прежде всего отметим, что $F\in D_{S^*}$. Отправляясь от описания D_{S^*} (соотношения (2), (3)), замечаем, что достаточно установить сходимость ряда

$$\sum_{-\infty}^{\infty} n^2|(F, e^{-int})|^4 < \infty.$$

Это действительно так, поскольку из (11) и равенств

$$y_n^2 n = (-1)^n\Psi(n)n^{-1} - n^{-1} - 2(-1)^n y_n,$$

вытекает $\{ny_n^2\}\in l_2$.

Для доказательства необходимо в дальнейшем соотношения

$$F(t) - \overline{F(-t)} + (S^*F)(t) = G_\sigma(t) \tag{12}$$

покажем, что коэффициенты Фурье этих функций равны. Вычислим сначала

$$(e^{-int}, (S^*F)(t)) = (Se^{-int}, F(t)) = -in\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t-u-\pi)\,e^{-inu}du\overline{F(t)}\,dt =$$

$$= -in\int_{-\pi}^{\pi}\int_{t-2\pi}^{t} F(z)\,e^{-in(t-z-\pi)}dz\overline{F(t)}\,dt = (-1)^n(-in)\int_{-\pi}^{\pi}\overline{F(t)}\,e^{-int}dt\times$$

$$\times\int_{-\pi}^{\pi} F(z)\,e^{inz}dz = (-1)^n(-in)\,|(F, e^{-int})|^2. \qquad (13)$$

В силу (11) при всех $n \neq 0$ будем иметь

$$in(e^{-int}, F(t) - \overline{F(-t)} + (S^*F)(t)) = in\overline{(F, e^{-int})} - in(F, e^{-int}) +$$
$$+ (-1)^n n^2|(F, e^{-int})|^2 = 2ny_n + (-1)^n n^2 y_n^2.$$

С другой стороны, на основании (6) получаем

$$\Psi(n) = in(e^{-int}, G_\sigma) + (-1)^n,$$

т. е.

$$in(e^{-int}, G_\sigma) = \Psi(n) - (-1)^n = (-1)^n(1 + (-1)^n ny_n)^2 - (-1)^n =$$
$$= 2ny_n + (-1)^n n^2 y_n^2.$$

И, наконец, из соотношения $G_\sigma(t) = -\overline{G_\sigma(-t)}$ и равенства (13) при $n = 0$ вытекает

$$(1, F(t) - \overline{F(-t)} + (S^*F)(t)) = \frac{1}{2}\{(1, G_\sigma(t)) - (G_\sigma(-t), 1)\} = (1, G_\sigma).$$

После того, как установлено равенство (12), из (6) следует, что порождающая функция Ψ является одной из функций семейства (7). Поэтому на основании лемм 1 получаем

$$(Ve^{-i\lambda_k x}, Ve^{-i\lambda_j x}) = \frac{2}{(\lambda_j - \lambda_k)}\{\sin\pi\lambda_j\Psi(\lambda_k) - \sin\pi\lambda_k\Psi(\lambda_j)\} = 0, \quad \lambda_k, \lambda_j \in \Lambda,$$

т. е. система векторов $\{Ve^{-i\lambda_k x} : \lambda_k \in \Lambda\}$ ортогональна.

Осталось доказать полноту этого семейства векторов. Если предположить противное, то найдется такая функция $g \in L_2(-\pi, \pi)$, что целая функция экспоненциального типа $\Phi(\lambda) = (Ve^{-i\lambda t}, g)$, $g \neq 0$, обращается в нуль на последовательности Λ. Таким образом, функция

$$F(\lambda) = \Phi(\lambda)\,\Psi^{-1}(\lambda) \qquad (14)$$

также является целой.

Предположим, что F имеет корни и пусть μ — один из них. Тогда $\Phi_\mu(\lambda) = \Phi(\lambda)(\lambda - \mu)^{-1}$ — целая функция экспоненциального типа не выше π, которая обращается в нуль на последовательности Λ. Кроме того, из (10) легко следует, что $\Phi_\mu \in L_2(-\infty, \infty)$. По теореме Винера — Пэли

$$\Phi_\mu(\lambda) = (e^{-i\lambda t}, f(t)), \quad f \in L_2(-\pi, \pi)$$

и поскольку семейство $\{e^{-i\lambda_k t} : \lambda_k \in \Lambda\}$ полно в $L_2(-\pi, \pi)$, то приходим к противоречию.

Пусть теперь функция F не имеет корней. Из условий (4) и расположения индикаторной диаграммы Φ вытекает, что F — функция нулевой степени, т. е. $F(\lambda) \equiv c$. Поэтому (14) перепишется в виде

$$\Psi(\lambda) = (Ve^{-i\lambda t}, g_1),\ g_1 = c^{-1}g. \qquad (15)$$

Учитывая действие оператора V на тригонометрическом базисе (п. 1), получаем

$$(Ve^{-int},\ g_1) = (1-(-1)^n \operatorname{in}(F,\ e^{-int}))\ (e^{-int},\ g_1).$$

Из формул (11) вытекает

$$1-(-1)^n \operatorname{in}(F,e^{-int}) = 1+(-1)^n n y_n = \sqrt{\Psi(n)(-1)^n},\quad n\neq 0.$$

Поэтому (15) при $\lambda = n$ примет вид

$$\Psi(n) = \sqrt{|\Psi(n)|}\ (e^{-int},\ g_1)$$

и, стало быть, $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} |\Psi(n)| < \infty$. Таким образом, если $\{a_n\}$ — последовательность коэффициентов Фурье функции g_1, то

$$\sum_{n\neq 0} n^2 |(F,\ e^{int})|^2 |a_n|^2 = \sum_{n\neq 0} u^2 y_{-n}^2 \left(\frac{1}{2\pi}\right) \sqrt{|\Psi(-n)|}\Big)^2 =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n\neq 0}\ 1+\sqrt{|\Psi(-n)|})^2\ \ |\Psi(-n)| < \infty,$$

что равносильно включению $g_1 \in D_{S^*}$. Теперь из (15) вытекает $\Psi(\lambda) = (e^{-i\lambda t},\ V^* g_1)$ и мы снова приходим к противоречию.

При доказательстве теоремы была дана конструкция ортогонализатора. Теперь докажем, что все прочие ортогонализаторы строятся аналогичным образом.

Доказательство теоремы 2. Анализ доказательства теоремы 1 приводит к следующему наблюдению. Если оператор

$$V = I + S,\quad (Sf)(t) = \frac{d}{dt}\int_{-\pi}^{\pi} F(t-u-\pi)\, f(u)\, du,\quad V\in\mathcal{F}, \tag{16}$$

является ортогонализатором семейства экспонент с порождающей функцией

$$\Psi(\lambda) = i\lambda\,(e^{-i\lambda t},\ G_\sigma) + \sigma e^{-i\lambda\pi} + \bar{\sigma} e^{i\lambda\pi},\quad \operatorname{Re}\sigma = \frac{1}{2},$$

то найдется такое σ, что

$$\Psi(\lambda) = i\lambda\,(e^{-i\lambda t},\quad F(t) - \overline{F(-t)} + (S^*F)(t)) + \sigma e^{-i\lambda\pi} + \bar{\sigma} e^{i\lambda\pi}.$$

Другими словами, 2π-периодическая функция F при некотором σ ($\operatorname{Re}\sigma = 1/2$) является решением интегрального уравнения

$$F(t) - \overline{F(-t)} - \frac{d}{dt}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{F(u-t-\pi)}\, F(u)\, du = G_\sigma(t). \tag{17}$$

Обратно, при доказательстве достаточности теоремы 1 показано, что условие

$$\Psi(n)(-1)^n > 0,\quad n\in\mathbb{Z}$$

гарантирует разрешимость этого уравнения при любом σ в классе 2π-периодических функций, принадлежащих $L_2(-\pi,\ \pi)$. По каждому такому решению F с помощью формул (16) строится оператор $V\in\mathcal{F}$. Из леммы 1 вытекает, что система $\{Ve^{-i\lambda_k t} : \lambda_k \in \Lambda\}$ ортогональна в пространстве $L_2(-\pi,\ \pi)$, а для доказательства ее полноты можно использовать незначительную модификацию уже изложенных рассуждений. Таким образом, оператор V является ортогонализатором. (Тот факт, что V — ортогонализатор, сразу же будет вытекать из приведенной далее леммы 4.)

Доказательство теоремы 3. 1). Если $V\in\mathcal{F}$ является ортогонализатором семейства экспонент с порождающей функцией Ψ, то при доказательстве необходимости теоремы 1 было установлено, что $\Psi = \Psi_\gamma$, где Ψ_γ — некоторая функция вида (7). Поэтому в силу (4)

$$\Psi_\gamma(\lambda)(1+|\lambda|)^{-1} \in L_2(-\infty, +\infty)$$

и, стало быть, $(Se^{-i\lambda t}, F) \in L_2(-\infty, +\infty)$. Следовательно, последовательность $\{(Se^{-int}, F)\}_{-\infty}^{+\infty} \in l_2$ и из (13) вытекает $\{n\,|(F, e^{-int})|^2\}_{-\infty}^{+\infty} \in l_2$.

2). В силу (2) спектр каждого ортогонализатора совпадает с замыканием последовательности $\mu_n = 1-(-1)^n in(F, e^{-int}), \quad n \in \mathbb{Z}$.

При доказательстве леммы 2 было проверено, что при любом $\gamma\left(\operatorname{Re}\gamma=\dfrac{1}{2}\right)$

$$|\mu_n|^2 = |1-(-1)^n\ in(F, e^{-int})|^2 = (1+(-1)^n n \operatorname{Im}(F, e^{-int}))^2 + \\ + n^2\{\operatorname{Re}(F, e^{-int})\}^2 = \Psi_\gamma(n)(-1)^n$$

и остается заметить, что $\Psi = \Psi_\gamma$ при некотором γ.

3). Если F порождает ортогонализатор, то из уравнения (17) получаем

$$in(e^{-int}, G_\sigma) = in(e^{-int}, F(t) - \overline{F(-t)} + (S^*F)(t))$$

при $n \neq 0$, а также

$$(1, G_\sigma) = (1, \overline{F(t)} - F(-t) + (S^*F)(t)).$$

Если учесть формулу (13), то первое равенство перепишется в виде

$$\Psi(n) - (-1)^n = in\,\overline{(F, e^{-int})} - in(F, e^{-int}) + (-1)^n n^2 |(F, e^{-int})|^2$$

или

$$\Psi(n)(-1)^n = n^2 x_n^2 + (ny_n + (-1)^n)^2, \quad n \neq 0,$$

где

$$(F, e^{-int}) = x_n + iy_n, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{18}$$

Снова с учетом (13) при $n=0$ получим

$$(1, G_\sigma) = (1, F) - (F, 1) = -2iy_0.$$

Далее, поскольку

$$(e^{-i\lambda t}, G_\sigma) = (i\lambda)^{-1}(\Psi(\lambda) - \sigma e^{-i\lambda\pi} - \bar\sigma e^{i\lambda\pi}), \quad \operatorname{Re}\sigma = \frac{1}{2},$$

то

$$(1, G_\sigma) = -i(\Psi'(0) + i\pi(\sigma - \bar\sigma)) = -i\Psi'(0) + 2\pi i \operatorname{Im}\sigma,$$

и поэтому

$$4y_0^2 = (\operatorname{Im}\Psi'(0))^2 + (2\pi\operatorname{Im}\sigma - \operatorname{Re}\Psi'(0))^2 = (2\pi\operatorname{Im}\sigma - \Psi'(0))^2.$$

Таким образом, последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ удовлетворяют системе уравнений

$$x_n^2 + \left(y_n + \frac{(-1)}{n}\right)^2 = \frac{\Psi(n)(-1)^n}{n^2}, \quad n \neq 0,$$

$$y_0 = \frac{1}{2}(\Psi'(0) - 2\pi\operatorname{Im}\sigma).$$

Обратно, каждое решение этой системы по формулам (16), (18) порождает ортогонализатор семейства экспонент. При этом

$$\|F\|^2_{L_2(-\pi,\pi)} = \frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty}(x_n^2 + y_n^2).$$

В силу теоремы 2 задача об отыскании ортогонализатора с минимальной $\|F\|^2_{L_2(-\pi,\pi)}$ сводится к минимизации величины $\Sigma(x_n^2+y_n^2)$ на всех решениях этой системы. Нетрудно видеть, что она достигает минимума на единственном решении

$$x_n = 0, \quad n \in \mathbb{Z}; \qquad y_n = (-1)^n n^{-1} (-1 + \sqrt{\Psi(n)(-1)^n}), \quad n \neq 0$$

и $y_0 = 0$ при $\operatorname{Im} \sigma = \frac{1}{2\pi} \Psi'(0)$.

2. Доказательство теорем 4, 5. Наш основной результат о $\mathcal{F}$-близких базисах из экспонент может быть доказан в рамках изложенных ранее построений. Однако здесь будет приведено другое доказательство, опирающееся на операторные соображения, которые и были положены в основу этой статьи. Этот операторный подход берет свое начало в работах [6—8], а в дальнейшем развивался в [11, 12]. В данном пункте будет раскрыто спектральное происхождение семейств $\{Ve^{i\lambda_k t} : \lambda_k \in \Lambda\}$ и целых функций вида (7). Оказывается, что эти семейства совпадают с множеством собственных векторов самосопряженных операторов с чисто дискретным спектром Λ. В свою очередь, эти самосопряженные операторы являются самосопряженными расширениями эрмитовых частей специальных операторов дифференцирования, которые были предметом рассмотрения работы [11].

Все изложенное выше отражено в следующей лемме.

Лемма 4. *Пусть F — 2π-периодическая функция из $L_2(-\pi, \pi)$ и такая,* что $F \notin W_2^1(-\pi, \pi)$. *Рассмотрим в пространстве $L_2(-\pi, \pi)$ линеал D, состоящий из функций вида*

$$U(t) = h(t) + (h(-\pi) - h(\pi)) F(t), \quad h \in W_2^1(-\pi, \pi)$$

и удовлетворяющих условию

$$(h', F) = \gamma h(\pi) + \bar{\gamma} h(-\pi), \quad \operatorname{Re} \gamma = \frac{1}{2}.$$

На линеале D зададим оператор

$$(KU)(t) = ih'(t), \quad U \in D.$$

Тогда K является самосопряженным оператором, имеет чисто дискретный спектр, совпадающий с последовательностью Λ корней функции

$$\Psi_\gamma(\lambda) = i\lambda (e^{-i\lambda t}, F(t) - \overline{F(-t)}) + i\lambda (Se^{-i\lambda t}, F) + \gamma e^{-i\lambda\pi} + \bar{\gamma} e^{i\lambda\pi}, \quad (19)$$

$$(Sf)(t) = \frac{d}{dt} \int_{-\pi}^{\pi} F(t - u - \pi) f(u)\, du.$$

При этом если Ψ_γ имеет простые и нецелые корни, то соответствующие собственные векторы имеют вид

$$Ve^{-i\lambda kt}, \quad \lambda_k \in \Delta, \quad V = I + S.$$

Доказательство. С помощью простых рассуждений, которые мы опускаем, нетрудно проверить, что оператор K замкнут, линеал D плотен в пространстве $L_2(-\pi, \pi)$, и

$$(Ku_1, u_2) = (u_1, Ku_2)$$

при всех $u_1, u_2 \in D$. Рассмотрим теперь уравнение

$$(K - \lambda I) u = f, \quad u \in D, \quad f \in L_2(-\pi, \pi).$$

Для гладкой составляющей h функции и получаем дифференциальное уравнение

$$h' + i\lambda h = -if - i\lambda (h(-\pi) - h(\pi)) F(t), \quad h \in W_2^1(-\pi, \pi),$$

$$(h', F) = \gamma h(\pi) + \bar{\gamma} h(-\pi), \quad \operatorname{Re} \gamma = \frac{1}{2},$$

решая которое, получаем формулу для резольвенты оператора K:

$$(R_\lambda f)(t) = -i\int_{-\pi}^{t} e^{i\lambda(x-t)} f(x)\,dx + \frac{(f, k_1)}{2i\sin\lambda\pi}\,e^{-i\lambda t} -$$

$$-\frac{1}{2i\sin\lambda\pi\Psi_\gamma(\lambda)}\{2i\sin\lambda\pi(f, k_2) + (i\lambda(e^{-i\lambda t}, F) + e^{i\lambda\pi})(f, k_1)\}\,Ve^{-i\lambda t}, \quad (20)$$

где Ψ_γ определена равенством (19) и введены обозначения

$$K_1(t, \lambda) = ie^{-i\lambda(t-\pi)}, \quad k_2(t, \lambda) = -iF(t) + \lambda\int_{t}^{\pi} F(x)\,e^{i\lambda(x-t)}\,dx.$$

Таким образом, особенности резольвенты могут лежать лишь в корнях функции $\sin\lambda\pi\Psi_\gamma(\lambda)$ и, стало быть, оператор K самосопряжен.

Докажем, что $\lambda = n$, $n \in Z$, являются ложными полюсами резольвенты, т. е. целые числа не принадлежат спектру K (при условии, что Ψ_γ не имеет целых корней). При $\lambda = n$ интересующие нас слагаемые в (20) имеют вид

$$(f, k_1)\,e^{-int}\Psi_\gamma(n) - \{2i\sin n\pi(f, k_2) + (in(e^{int}, F) + e^{in\pi})(f, k_1)\}\,Ve^{-int} =$$

$$= (f, k_1)\{\Psi_\gamma(n)\,e^{-int} - (in(e^{int}, F) + e^{in\pi})(e^{-int} + Se^{-int})\} =$$

$$= (f, k_1)\,e^{-int}\{\Psi_\gamma(n) - (in(e^{int}, F) - (-1)^n)(1 - in)(-1)^n(F, e^{-int})\} =$$

$$= (f, k_1)\,e^{-int}\{\Psi_\gamma(n) - in(e^{int}, F) - (-1)^n - (-1)^n n^2\,|(F, e^{-int})|^2 +$$

$$+ in(F, e^{-int})\} = 0,$$

поскольку из (19) вытекает

$$\Psi_\gamma(n) = (-1)^n + in(e^{int}, F) - in(F, e^{-int}) + (-1)^n n^2\,|(F, e^{-int})|^2.$$

Таким образом, в целых точках резольвента имеет устранимые особенности.

Предполагая теперь, что Ψ_γ имеет только простые корни, найдем соответствующие собственные функции оператора K. Для этого вычислим ортопроектор $P\lambda_k$, отвечающий собственному числу $\lambda_k \in \Lambda$. Имеем

$$(P_{\lambda_k} f)(t) = \lim_{\lambda\to\lambda_k}(\lambda - \lambda_k)(R_\lambda f)(t) =$$

$$= \frac{1}{\Psi_\gamma'(\lambda_k)\,2i\sin\lambda_k\pi}\{2i\sin\lambda_k\pi(f, k_2) + (i\lambda_k(e^{-i\lambda_k t}, F) + e^{i\lambda_k\pi})(f, k_1)\}\,Ve^{-i\lambda_k t}.$$

Отметим, что $P_{\lambda_k} \neq 0$, поскольку из условия $F \notin W_2^1(-\pi, \pi)$ немедленно вытекает, что функции $k_2(t, \lambda_k)$ и $k_1(t, \lambda_k)$ линейно независимы и $Ve^{-i\lambda_k t} \neq 0$. Итак, функции $Ve^{-i\lambda_k t}$, $\lambda_k \in \Lambda$, являются собственными для оператора K.

Отметим, что самосопряженный оператор с аналогичными свойствами можно построить и в том случае, когда $F \in W_2^1(-\pi, \pi)$.

Доказываемую ниже полноту семейства $\{Ve^{-i\lambda_k t} : \lambda_k \in \Lambda\}$ можно было бы вывести из довольно тонких теор... теории функций. При операторном подходе она немедленно вытекает из простых вычислений (лемма 4).

Доказательство теоремы 4. Необходимость. Пусть семейство $\{e^{-i\lambda_k t} : \lambda_k \in \Lambda\}$ с порождающей функцией Ψ образует базис пространства $L_2(-\pi, \pi)$, $\mathcal{F}$-близкий к тригонометрическому. Тогда это семейство имеет непрерывный и непрерывно обратимый ортогонализатор $V \in \mathcal{F}$. Поэтому в силу теоремы 1 $\Psi(n)(-1)^n > 0$, а на основании теоремы 3 найдутся такие константы m, $M > 0$, что

$$m \leqslant |\Psi(n)| \leqslant M, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Достаточность. Пусть порождающая функция Ψ удовлетворяет условиям теоремы. Снова определим функцию F равенствами (11) и по ней построим оператор $V = I + S$ вида (1). При доказательстве достаточности теоремы 1 было проверено, что система функций

$$\{Ve^{-i\lambda_k t} : \lambda_k \in \Lambda\} \tag{21}$$

является ортогональной в пространстве $L_2(-\pi, \pi)$. При этом было установлено, что порождающая функция Ψ допускает представление

$$\Psi(\lambda) = i\lambda(e^{-i\lambda t}, F(t) - \overline{F(-t)}) + i\lambda(Se^{-i\lambda t}, F(t)) + \sigma e^{-i\lambda\pi} + \sigma e^{i\lambda\pi}; \ \operatorname{Re}\sigma = \frac{1}{2}. \tag{22}$$

Докажем теперь полноту семейства (21). Предположим, что $F \notin W_2^1(-\pi, \pi)$. Тогда по функции F и по $\gamma = \sigma$ построим оператор K, о котором идет речь в лемме 4. Функции системы (21) являются собственными векторами самосопряженного оператора K с чисто дискретным спектром Λ и, стало быть, образуют полную в $L_2(-\pi, \pi)$ систему.

Пусть теперь $F \in W_2^1(-\pi, \pi)$. Тогда оператор S ограничен и

$$(Sf)(t) = \frac{d}{dt}\int_{-\pi}^{\pi} F(t-u-\pi) f(u)\, du = (F(-\pi) - F(\pi)) f(t) + \int_{-\pi}^{\pi} F'(t-u-\pi) f(u)\, du.$$

Поэтому представление (22) можно проинтегрировать по частям, после чего оно примет вид

$$\Psi(\lambda) = (e^{-i\lambda t}, G_1) + \mu e^{-i\lambda\pi} + \nu e^{i\lambda\pi}, \ G_1 \in L_2(-\pi, \pi). \tag{23}$$

Так как функция Ψ принимает вещественные значения на вещественной оси, то $\mu = \bar{\nu}$. Отметим также, что $|\mu| = |\nu| \neq 0$, ибо в противном случае вытекала бы сходимость ряда $\Sigma|\Psi(n)|^2 < \infty$, что несовместимо с условиями теоремы. Теперь из (23) следует, что Ψ является функцией типа синуса [2] и, стало быть, семейство $e^{-i\lambda_k t} : \lambda_k \in \Lambda\}$ полно и минимально в $L_2(-\pi, \pi)$. Рассуждения, приведенные в конце доказательства теоремы 1, показывают, что система (21) полна и в этом случае.

Итак, оператор $V \in \mathscr{F}$ ортогонализирует семейство экспонент, а в силу теоремы 3 он непрерывен и непрерывно обратим.

Доказательство теоремы 5. Тот факт, что Ψ имеет лишь только вещественные корни, доказан в [13, с. 79]. Кроме того, эти корни простые. В самом деле, если при некотором $\lambda_0 \in R$

$$\Psi(\lambda_0) = \cos\pi\lambda_0 - \int_0^{\pi} f(t)\sin\left(\lambda_0 + \frac{1}{2}\right)t\,dt = 0,$$

$$\Psi'(\lambda_0) = -\pi\sin\pi\lambda_0 - \int_0^{\pi} f(t)\, t\cos\left(\lambda_0 + \frac{1}{2}\right)t\,dt = 0,$$

то получаем противоречие

$$1 = |\cos\pi\lambda_0 + i\sin\pi\lambda_0| = \left|\int_0^{\pi} f(t)\sin\left(\lambda_0 + \frac{1}{2}\right)t\,dt - \frac{i}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos\left(\lambda_0 + \frac{1}{2}\right)t\,dt\right| \leqslant \int_0^{\pi}|f(t)|\,dt + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t\,|f(t)|\,dt < 1.$$

Кроме того, функция Ψ удовлетворяет условиям (4). И, наконец, поскольку

$$(-1)^n\Psi(n) = 1 - (-1)^n\int_0^{\pi} f(t)\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t\,dt, \quad n \in \mathbb{Z},$$

то $1/2 \leqslant (-1)^n\Psi(n) \leqslant 3/2$. Остается воспользоваться теоремой 4.

В заключение отметим, что аналогичные операторные соображения можно использовать для описания семейств экспонент, которые допускают ортогонализаторы других классов. Например, речь может идти об операторах вида (1), где F продолжается за пределы интервала $[-\pi, \pi]$ периодически в среднем (по Дельсарту). Такое продолжение определяется некоторой последовательностью чисел, которые являются корнями характеристического уравнения Дельсарта. Отметим, что в этом смысле последовательность $\mathbb{Z}$ задает периодическое продолжение, чем и объясняется то обстоятельство, что она фигурирует в формулировках теорем.

1. *Винер Н., Пэли Р.* Преобразование Фурье в комплексной области.— М. : Наука, 1964.— 262 с.
2. *Левин Б. Я.* О базисах из показательных функций в L_2 // Зап. мат. отд-ния физ.-мат. фак. Харьк. ун-та и Харьк. мат. о-ва.— 1961.— **27**, сер. 4.— С. 39—48.
3. *Кацнельсон В. Э.* О базисах из показательных функций в L_2 // Функцион. анализ и его прил.— 1971.— **5**, вып. 1.— С. 37—47.
4. *Авдонин С. А.* К вопросу об базисах Рисса из экспонент в L_2 // Вест. Ленингр. ун-та. Сер. мат.— 1974.— **13**.— С. 5—12.
5. *Седлецкий А. М.* Биортогональные разложения функций в ряды экспонент на интервалах вещественной оси // Успехи мат. наук.— 1982.— **37**, вып. 5.— С. 50—95.
6. *Павлов Б. С.* Спектральный анализ дифференциального оператора с «размазанным» граничным условием // Пробл. мат. физики.— 1973.— Вып. 6.— С. 101—119.
7. *Павлов Б. С.* Базисность систем экспонент и условие Макенхаупта // Докл. АН СССР.— 1979.— **247**, № 1.— С. 37—40.
8. *Hruscov S. V., Nikol'skii N. K., Pavlov B. S.* Unconditional base of exponentials and of reproducing kernels // Lect. Notes Math.— 1981.— **864**.— P. 214—335.
9. *Никольский Н. К.* Лекции об операторе сдвига.— М. : Наука, 1980.— 383 с.
10. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций.— М. : Гостехтеоретиздат, 1956.— 632 с.
11. *Губреев Г. М.* Спектральный анализ биортогональных разложений функций в ряды экспонент // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1989.— **53**, № 6.— С. 1236—1267.
12. *Губреев Г. М.* Базисность семейств функций типа Миттаг—Леффлера, преобразования Джрбашяна и весовые оценки интервалов типа Коши // Изв. АН АрмССР. Сер. мат.— 1988.— **23**, № 3.— С. 237—269.
13. *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа : В 2-х т.— М. : Наука, 1978.— Т. 2.— 821 с.

Получено 04.07.90