УДК 517.5

О. Д. Габисония, д-р физ.-мат. наук (Абхаз. ун-т, Сухуми)

О точках сильной суммируемости рядов Фурье

Найдены характеристики точек функции $f \in L$, в которых даны оценки скорости стремления к нулю сильных средних арифметических ее ряда Фурье и тригонометрически сопряженного ряда.

Знайдені характеристики точок функції $f \in L$, в яких дано оцінки швидкості прямування до нуля сильних середніх арифметичних її ряду Фур'є і тригонометрично спряженого ряду.

Пусть f — 2π-периодическая суммируемая со степенью $p \geqslant 1$ на $\Delta = [-\pi, \pi]$ функция, $f \in L_p$ и $S_n(f; x)$ — частная сумма порядка n ее ряда Фурье.

Понятие сильной суммируемости рядов Фурье введено Харди и Литлвудом в [1]. Говорят, что ряд Фурье функции $f \in L_1$ (H, q)-суммируем в точке x к $f(x)$, если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} |f(x) - S_\nu(f; x)|^q = 0, \quad q > 0. \tag{1}$$

В работе [2] Харди и Литлвуд показали, что, если $f \in L_p$, $p > 1$, то в каждой x-точке Лебега p-й степени, т. е. в точке x, где

$$\int_0^h |f(x \pm t) - f(x)|^p dt = o(h), \tag{2}$$

выполняется равенство (1) для любого $q > 0$. Таким образом, ряд Фурье функции $f \in L_p$, $p > 1$, (H, q)-суммируем почти всюду. Они же показали, что существует функция $f \in L_1$, ряд Фурье которой может не быть (H, q)-суммируемым в точке Лебега ни при каком $q > 0$.

Харди и Литлвуд поставили задачу: будет ли выполняться равенство (1) почти всюду при $f \in L_1$? Эту задачу при $q = 2$ положительно решил Марцинкевич [3], а при любом $q > 0$ — Зигмунд [4]. Но вопрос о характеристике точек (H, q) суммируемости рядов Фурье при $f \in L_1$ оставался открытым. В 1973 г. нами была дана характеристика точек $(H, 2)$-суммируемости рядов Фурье [5] при $f \in L_1$, а именно, было показано, что для любой суммируемой функции $f \in L_1$ $(H, 2)$-суммируемость рядов Фурье имеет место во всех точках x, в которых выполняется равенство

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{[2\pi n]} \left\{\frac{n}{\nu} \int_{(\nu-1)n^{-1}}^{\nu n^{-1}} (|f(x+t) - f(x)| + |f(x-t) - f(x)|)\, dt\right\}^\gamma = 0, \quad \gamma = 2, \tag{3}$$

где $[z]$ означает целую часть числа z.

В этой же работе было установлено, что равенство (3) выполняется почти всюду для любой суммируемой функции $f(x)$ при $\gamma > 1$.

Позже И. Я. Новиков и В. А. Родин показали [6], что (H, q)-суммируемость имеет место в точках x, где выполняется (3) при $1 < \gamma = p < 2$, $p + q = pq$.

Равенство (3) можно представить в эквивалентном виде

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{[2\pi n]} \left\{\frac{n}{\nu} \int_{(\nu-1)n^{-1}}^{\nu n^{-1}} |f(x \pm t) - f(x)|\, dt\right\}^\gamma = 0, \tag{4}$$

или

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{|\nu| \leqslant 2\pi n} \left[\frac{n}{|\nu| + 1} \int_{(\nu-1)n^{-1}}^{\nu n^{-1}} |f(x+t) - f(x)|\, dt\right\}^\gamma = 0. \tag{5}$$

Известно [7, с. 488], что из (H, q)-суммируемости следует (H, q')-суммируемость при $0 < q' < q$, поэтому достаточно исследовать (H, q)-суммируемость при больших q.

В данной работе получена оценка скорости стремления к нулю величин

$$\frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} |f(x) - S_\nu(f; x)|^q, \quad q > 0,$$

из которой следуют все приведенные выше результаты.

Обозначим

$$\Gamma_n(f; x, p) = \left\{\sum_k \left(\frac{n+1}{|k|+1} \int_{\Delta_k^{(n)}} |f(x+t) - f(x)|\, dt\right)^p\right\}^{1/p}, \tag{6}$$

где $\Delta_k^{(n)} = \left[\frac{\pi k}{n+1}, \frac{\pi(k+1)}{n+1}\right] \cap \Delta$, а $\sum\limits_k$ здесь и в дальнейшем означает, что суммирование производится в пределах $-(n+1) \leqslant k \leqslant n$.

Приведем некоторые свойства величин $\Gamma_n(f; x, p)$.

Свойство 1 [5]. *Если $f \in L_1$, то для любого $p > 1$ почти всюду справедливо равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \Gamma_n(f; x, p) = 0. \tag{7}$$

Свойство 2. *Если $f(x)$ — непрерывная функция с модулем непрерывности $\omega(f; \delta)$, то*

$$\Gamma_n(f; x, p) \leqslant 2\pi C_p \omega\left(f; \frac{1}{\sqrt[q]{n+1}}\right), \quad \left(C_p = \left\{\sum_k (|k|+1)^{-p}\right\}^{1/p}, \ p + q = pq\right). \tag{8}$$

Действительно,

$$\Gamma_n(f; x, p) \leqslant \left\{\sum_n \left(\frac{n+1}{|k|+1} \int_{\Delta_k^{(n)}} \omega(f; t)\, dt\right)^p\right\}^{1/p} \leqslant \left\{\sum_k \left(\frac{n+1}{|k|+1} \omega(f; (n+1)^{-1/q}\right) \times\right.$$

$$\left.\times \int_{\Delta_k^{(n)}} (\sqrt[q]{n+1}t + 1)\, dt\right)^p\Bigg\}^{1/p} \leqslant \omega(f; (n+1)^{-1/2}) \left\{\sum_k \left(\frac{n+1}{|k|+1} \times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times \frac{(|k|+1)\pi}{\sqrt[p]{n+1}} + \frac{\pi}{n+1}\right)^p\right\}^{1/p} \leqslant 2\pi C_p \omega(f; (n+1)^{-1/q}), \quad p > 1, \tag{9}$$

что и требовалось доказать.

Свойство 3. *Если $f \in \mathrm{Lip}_M \alpha$, $0 \leqslant \alpha < 1/q$, то*

$$\Gamma_n(f; x, p) < MC_{(1-\alpha)p}(n+1)^{-\alpha} = O((n+1)^{\alpha}). \tag{10}$$

Действительно, при $f \in \mathrm{Lip}_M \alpha$ имеем $|f(x+t) - f(x)| \leqslant M|t|^{\alpha}$ поэтому

$$\Gamma_n(f; x, p) \leqslant \left\{\sum_k \left(\frac{n+1}{|k|+1} M \left(\frac{|k|+1}{n+1}\right)^{\alpha} \frac{\pi}{n+1}\right)^p\right\}^{1/p} =$$

$$= M(n+1)^{-\alpha} \left\{\sum_k (|k|+1)^{(\alpha-1)p}\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant MC_{(1-\alpha)p}(n+1)^{-\alpha}, \quad (1-\alpha)p > 1, \tag{11}$$

что и требовалось доказать.

Свойство 4. *Если функция $f \in L_p$ $(p > 1)$, то равенство (7) выполняется во всех x точках Лебега p-й степени.*

Доказательство. Пусть x — точка Лебега p-й степени. В силу неравенства Гельдера имеем

$$\int_{\Delta k^{(n)}} |f(x+t) - f(x)|\, dt \leqslant \left(\frac{\pi}{n+1)}\right)^{\alpha} \left\{\int_{\Delta_k^{(n)}} |f(x+t) - f(x)^p dt\right\}^{\frac{1}{p}}, \quad p + q = pq. \tag{12}$$

Поэтому

$$\sum_k \left(\frac{n+1}{|k|+1} \int_{\Delta_k^{(n)}} |f(x+t) - f(x)|\, dt\right)^p \leqslant \sum_k \frac{\pi^{p-1}(n+1)}{(|k|+1)^p} \int_{\Delta_k^{(n)}} |f(x+t) - f(x)^p dt. \tag{13}$$

Используя преобразование Абеля, получаем

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n+1}{(k+1)^p} \int_{\frac{\pi k}{n+1}}^{\frac{\pi(k+1)}{n+1}} |f(x+t) - f(x)|^p dt = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{(k+1)^p} - \frac{1}{(k+2)^p}\right) \times$$

$$\times \sum_{r=0}^{k} (n+1) \int\limits_{\frac{r\pi}{n+1}}^{\frac{(r+1)\pi}{n+1}} |f(x+t)-f(x)|^p dt + \frac{n+1}{(n+1)^p} \sum_{r=0}^{n} \int\limits_{\frac{r\pi}{n+1}}^{\frac{(r+1)\pi}{n+1}} |f(x+t)-f(x)|^p dt \leqslant$$

$$\leqslant p \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n+1}{(k+1)^{p+1}} \int\limits_{-\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{(k+1)\pi}{n+1}} |f(x+t)-f(x)|^p dt + (n+1)^{1-p} \int\limits_{-\frac{\pi}{n+1}}^{\pi} |f(x+t)-$$

$$-f(x)|^p dt \leqslant p \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^{-\frac{p+1}{2}} \left\{ \frac{n+1}{(k+1)^{\frac{p+1}{2}}} \int\limits_{-\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{(k+1)\pi}{n+1}} |f(x+t)-f(x)|^p dt \right\} +$$

$$+ (n+1)^{\frac{1-p}{2}} \int\limits_{-\frac{\pi}{n+1}}^{\pi} |f(x+t)-f(x)|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant p \max_{0\leqslant k\leqslant n} \left\{ \frac{n+1}{(k+1)^{\frac{p+1}{2}}} \int\limits_{-\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{(k+1)\pi}{n+1}} |f(x+t)-f(x)|^p dt \right\} \left\{ \sum_{k=0}^{n} (k+1)^{-\frac{p+1}{2}} + 1 \right\}. \tag{14}$$

Аналогичное неравенство можно установить и при $-(n+1) \leqslant k \leqslant \leqslant -1$. Поэтому можно написать

$$\sum_k \left(\frac{n+1}{|k|+1} \int\limits_{\Delta_k^{(n)}} |f(x+t)-f(x)|\, dt \right)^p \leqslant C(p) \max_{0\leqslant k\leqslant n} \frac{n+1}{(k+1)^{\frac{p+1}{2}}} \times$$

$$\times \int\limits_{-\frac{(k+1)\pi}{n+1}}^{\frac{(k+1)\pi}{n+1}} |f(x+t)-f(x)|^p dt, \tag{15}$$

где $C(p)$ — константа, зависящая только от p.

Легко заметить, что во всех x-точках Лебега n-й степени

$$\sup_{\substack{n,k\\0\leqslant k\leqslant n}} \frac{n+1}{k+1} \int\limits_{-\frac{(k+1)\pi}{n+1}}^{\frac{(k+1)\pi}{n+1}} |f(x+t)-f(x)|^p dt = M(x) < +\infty. \tag{16}$$

Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное число $W_1 = W_1(x)$, что $M(x) < \varepsilon W_1^{\alpha}$, $\alpha = \dfrac{p-1}{2}$.

С другой стороны, во всех x-точках Лебега p-й степени будем иметь

$$\sup_{0\leqslant k\leqslant n} \frac{n+1}{(k+1)^{\frac{p+1}{2}}} \int\limits_{-\frac{(k+1)\pi}{n+1}}^{\frac{(k+1)\pi}{n+1}} |f(x+t)-f(x)|^p dt \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{0\leqslant k\leqslant N_1} \frac{n+1}{(k+1)^{\frac{p+1}{2}}} \int\limits_{-\frac{(k+1)\pi}{n+1}}^{\frac{(k+1)\pi}{n+1}} |f(x+t)-f(x)|^p dt +$$

$$+ \sup_{N_1\leqslant k<+\infty} \frac{n+1}{(k+1)^{\frac{p+1}{2}}} \int\limits_{-\frac{(k+1)\pi}{n+1}}^{\frac{(k+1)\pi}{n+1}} |f(x+t)-f(x)|^p dt \leqslant$$

$$\leqslant (n+1) \int\limits_{-\frac{(W_1+1)\pi}{n+1}}^{\frac{(W_1+1)\pi}{n+1}} |f(x+t) - f(x)|^p \, dt + \frac{M(x)}{W_1^{\alpha}} = o(1) + \varepsilon. \qquad (17)$$

Отсюда следует соотношение (7).

Теорема 1. *Для любой функции* $f \in L_1$ *имеем*

$$\left\{\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} |f(x) - S_k(f; x)|^q\right\}^{\frac{1}{q}} \leqslant 4e^{\pi}\Gamma_n(f; x, p), \quad q \geqslant 2, \quad p + q = pq. \qquad (18)$$

Доказательство. Пусть $\chi_{\Delta_k^{(n)}}(t)$ — характеристическая функция сегмента $\Delta_k^{(n)}$. Тогда

$$\left\{\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} |f(x) - S_k(f; x)|^q\right\}^{1/q} \leqslant \pi^{-1/q}\left\{\int\limits_{\Delta} \Big| \sum_{k} |f(x) - S_k(f; x)| \chi_{\Delta_k^{(n)}}(t)\Big|^p dt\right\}^{1/p} =$$

$$= \pi^{-1/q}\left\{\int\limits_{\Delta} \Big| \sum_{k} \Big| \int\limits_{\Delta} \varphi_x(t) D_k(r) \, dr \Big| \chi_{\Delta_k^{(n)}}(t) \Big|^q dt\right\}^{1/q}, \qquad (19)$$

где

$$\varphi_x(t) = f(x+t) - f(x), \quad D_k(r) = \frac{\sin(2k+1)\frac{r}{2}}{2\pi \sin\frac{r}{2}}.$$

Известно [7], с. 39], что для любой функции $F \in L_q$

$$\|F(t)\|_q = \left\{\int\limits_{\Delta} |F(t)|^q dt\right\}^{1/q} = \Big|\int\limits_{\Delta} F(t) G(t) \, dt\Big|, \quad q \geqslant 1, \quad p + q = pq, \qquad (20)$$

где $\|F(t)\|_q$ означает норму функции $F(t)$ в L_q,

$$G(t) = |F(t)|^{q-1} \operatorname{sign} F(t) \|F(t)\|_q^{1-q}. \qquad (21)$$

Легко заметить, что

$$\|G(t)\|_p \leqslant 1, \quad p > 1. \qquad (22)$$

Полагая в равенстве

$$F(t) = \sum_{k} \Big|\int\limits_{\Delta} \varphi_x(r) D_k(r) \, dr \chi_{\Delta_k^{(n)}}(t)\Big|, \qquad (23)$$

получаем

$$\|F(t)\|_q \leqslant \Big\| \sum_{k} \Big| \int\limits_{\Delta} \varphi_x(r) D_k(r) \, dr \chi_{\Delta_k^{(n)}}(t) \Big| G(t) \Big\|_1 = \Big| \sum_{k} \Big| \int\limits_{\Delta} \varphi_x(r) D_k(r) \, dr \Big| \times$$

$$\times \int\limits_{\Delta} \chi_{\Delta_k^{(n)}}(t) |G(t)| \, dt = \sum_{k} \int\limits_{\Delta} \varphi_x(r) D_k(r) \, dr \Big| \int\limits_{\Delta_k^{(n)}} |G(t)| \, dt =$$

$$= \sum_{k} \Big| \int\limits_{\Delta} \frac{\varphi_x(r)}{2\pi \sin\frac{r}{2}} \alpha_k \sin(2k+1)\frac{r}{2} \, dr \Big|, \qquad (24)$$

где

$$\alpha_k = \int\limits_{\Delta_k^{(n)}} |G(t)| \, dt. \qquad (25)$$

Из соотношений (19) и (24) следует

$$(2\pi)^{1+\frac{1}{q}} \left\{\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} |f(x) - S_k(f; k)|^q\right\}^{\frac{1}{q}} \leqslant \sum_{k} \Big| \int\limits_{\Delta} \varphi_x(r) \alpha_k D_k(r) \, dr \Big| =$$

$$= \sum_{k} \alpha_k \beta_k \int\limits_{\Delta} \varphi_x(r) D_k(r) \, dr, \qquad (26)$$

где

$$\beta_k = \operatorname{sign} \int\limits_{\Delta} \frac{\varphi_x(r)}{\sin \frac{r}{2}} \alpha_k \sin(2k+1) \frac{r}{2}\, dr.$$

Обозначим

$$\mathcal{J} = (n+1) \Big\| \sum_i \alpha_i \chi_{\Delta_i^{(n)}}(t_1) \Big\|_p = (n+1) \Big\{ \sum_k \int\limits_{\Delta_k^{(n)}} \Big| \sum_i \alpha_i \chi_{\Delta_i^{(n)}}(t_1) \Big|^p dt_1 \Big\}^{\frac{1}{p}}. \qquad (27)$$

Так как $\Delta_k^{(n)} \cap \Delta_i^{(n)} = \varnothing$ при $k \neq i$, то внутренняя сумма в правой части соотношения (27) обращается в величину $\alpha_k \chi_{\Delta_k^{(n)}}(t_1)$. Следовательно,

$$\mathcal{J} = (n+1) \Big\{ \sum_k \int\limits_{\Delta_k^{(n)}} | \alpha_k \chi_{\Delta_k^{(n)}}(t_1) |^p dt_1 \Big\}^{\frac{1}{p}} = (n+1) \Big\{ \sum_k | \alpha_k |^p \int\limits_{\Delta_k^{(n)}} dt_1 \Big\}^{\frac{1}{p}} =$$

$$= (n+1)^{1-\frac{1}{p}} \pi^{\frac{1}{p}} \Big\{ \sum_k \alpha_k^p \Big\}^{\frac{1}{p}}. \qquad (28)$$

С другой стороны, в силу соотношений (25) и (27) имеем

$$\mathcal{J} = (n+1) \Big\| \sum_i \int\limits_{\Delta_i^{(n)}} | G(t) |\, dt \chi_{\Delta_i^{(n)}}(t_1) \Big\|_p =$$

$$= (n+1) \Big\| \sum_i \int\limits_{\Delta_i^{(n)}} \frac{\| F(t) |^{q-1} \operatorname{sign} F(t) |}{\| F \|_q^{q-1}}\, dt \chi_{\Delta_i^{(n)}}(t_1) \Big\|_p = (n+1) \| F \|_q^{1-q} \times$$

$$\times \Big\| \sum_i \int\limits_{\Delta_i^{(n)}} | F(t) |^{q-1} dt \chi_{\Delta_i^{(n)}}(t_1) \Big\|_p = (n+1) \| F \|_q^{1-q} \Big\| \sum_i \int\limits_{\Delta_i^{(n)}} \times$$

$$\times \Big(\sum_k \Big| \int\limits_{\Delta} \varphi_x(r) D_k(r)\, dr \chi_{\Delta_k^{(n)}}(t) \Big| \Big)^{q-1} dt \chi_{\Delta_i^{(n)}}(t_1) \Big\|_p. \qquad (29)$$

Так как $\Delta_i^{(n)} \cap \Delta_k^{(n)} = \varnothing$ при $i \neq k$, то во внутренней сумме правой части соотношения (29) останется только слагаемое

$$\Big| \int\limits_{\Delta} \varphi_x(r) D_i(r)\, dr \chi_{\Delta_i^{(n)}}(t) \Big|.$$

Следовательно, сумма (29) принимает вид

$$\mathcal{J} = (n+1) \| F \|_q^{1-q} \Big\| \sum_i \int\limits_{\Delta_i^{(n)}} \Big| \int\limits_{\Delta} \varphi_x(r) D_i(r)\, dr \chi_{\Delta_i^{(n)}}(t) \Big|^{q-1} dt \chi_{\Delta_i^{(n)}}(t_1) \Big\|_p =$$

$$= (n+1) \| F \|_q^{1-q} \Big\{ \sum_k \int\limits_{\Delta_k^{(n)}} \Big(\sum_i \int\limits_{\Delta_i^{(n)}} \Big| \int\limits_{\Delta} \varphi_x(r) D_i(r)\, dr \chi_{\Delta_i^{(n)}}(t) \Big|^{q-1} dt \times$$

$$\times \chi_{\Delta_i^{(n)}}(t_1) \Big)^p dt_1 \Big\}^{\frac{1}{p}}. \qquad (30)$$

В силу того, что $\Delta_k^{(n)} \cap \Delta_i^{(n)} = \varnothing$ при $k \neq i$, во внутренней сумме остается только слагаемое

$$\int\limits_{\Delta_k^{(n)}} \Big| \int\limits_{\Delta} \varphi_x(r) D_k(r)\, dr\, \chi_{\Delta_k^{(n)}}(t) \Big|^{q-1} dt \chi_{\Delta_k^{(n)}}(t_1).$$

Поэтому соотношение (30) примет вид

$$\mathcal{J}=(n+1)\|F\|_q^{1-q}\Big\{\sum_k\int\limits_{\Delta_k^{(n)}}\Big(\int\limits_{\Delta_k^{(n)}}\Big|\int\limits_{\Delta}\varphi_x(r)\,D_k(r)\,dr\,\chi_{\Delta_k^{(n)}}(t)\Big|^{q-1}\times$$

$$\times\,dt\chi_{\Delta_k^{(n)}}(t_1)\Big)^p dt_1\Big\}^{\frac{1}{p}}=(n+1)\|F\|_q^{1-q}\Big\{\sum_k\int\limits_{\Delta_k^{(n)}}\Big(\int\limits_{\Delta_k^{(n)}}\chi_{\Delta_k^{(n)}}^{q-1}(t)\,dt\times$$

$$\times\Big|\int\limits_{\Delta}\varphi_x(r)\,D_k(r)\,dr\Big|^{q-1}\chi_{\Delta_k^{(n)}}(t_1)\Big)^p dt_1\Big\}^{\frac{1}{p}}=$$

$$=(n+1)\|F\|_q^{1-q}\left\{\sum_k\int\limits_{\Delta_k^{(n)}}\left(\frac{\pi}{n+1}\Big|\int\limits_{\Delta}\varphi_x(r)\,D_k(r)\,dr\Big|^{q-1}\chi_{\Delta_k^{(n)}}(t_1)\right)^p dt_1\right\}^{\frac{1}{p}}=$$

$$=\pi\|F\|_q^{1-q}\Big\{\sum_k\int\limits_{\Delta}\Big|\int\limits_{\Delta}\varphi_x(r)\,D_k(r)\,dr\Big|^{q-1}\chi_{\Delta_k^{(n)}}^p(t_1)\,dt_1\Big\}^{\frac{1}{p}}=$$

$$=\pi\|F\|_q^{1-q}\Big\{\int\limits_{\Delta}\Big(\sum_k\Big|\int\limits_{\Delta}\varphi_x(r)\,D_k(r)\,dr\Big|^{q}\chi_{\Delta_k^{(n)}}^p(t_1)\Big)\,dt_1\Big\}^{\frac{1}{p}}\leqslant$$

$$\leqslant\pi\|F\|_q^{1-q}\Big\{\int\limits_{\Delta}\Big(\sum_k\Big|\int\limits_{\Delta}\varphi_x(r)\,D_k(r)\,dr\Big|\chi_{\Delta_k^{(n)}}(t_1)\Big)^q dt_1\Big\}^{\frac{1}{p}}=\pi\|F\|_q^{1-q}\|F\|_q^{\frac{q}{p}}=\pi. \tag{31}$$

Из неравенств (28) и (31) следует

$$(n+1)^{1-\frac{1}{p}}\Big\{\sum_k\alpha_k^p\Big\}^{\frac{1}{p}}\leqslant\pi^{\frac{1}{q}},\quad q\geqslant 2. \tag{32}$$

Используя соотношение (26), имеем

$$2\pi^{1+\frac{1}{q}}\left\{\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}|f(x)-S_k(f;x)|^q\right\}^{1/q}\leqslant\sum_k\Big(\int\limits_0^{\pi}+\int\limits_{-\pi}^{0}\Big)\frac{\varphi_x(r)}{\sin\frac{r}{2}}\alpha_k\beta_k\sin(2k+1)\times$$

$$\times\frac{r}{2}\,dr=\sigma_1+\sigma_2. \tag{33}$$

Величины σ_1 и σ_2 оцениваются одинаковыми методами, поэтому достаточно оценить σ_1. Легко заметить, что

$$|\sigma_1|\leqslant\Big|\sum_k\int\limits_{\Delta_0^{(n)}}\frac{\varphi_x(r)}{\sin\frac{r}{2}}\alpha_k\beta_k\sin(2k+1)\frac{r}{2}\,dr\Big|+$$

$$+\Big|\sum_k\int\limits_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi}\frac{\varphi_x(r)}{\sin\frac{r}{2}}\alpha_k\beta_k\sin(2k+1)\frac{r}{2}\,dr\Big|=\mathcal{J}_1+\mathcal{J}_2. \tag{34}$$

Учитывая соотношение (32), получаем

$$\mathcal{J}_1\leqslant(n+1)\int\limits_{\Delta_0^{(n)}}|\varphi_x(r)|\,dr\sum_k|\alpha_k\beta_k|\leqslant\Gamma_n(f;x,p)\Big\{\sum_k\alpha_k^2\Big\}^{\frac{1}{2}}\Big\{\sum_k|\beta_k|^2\Big\}^{\frac{1}{2}}\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{2\pi}\,\Gamma_n(f;x,p)\frac{1}{\sqrt{n+1}}\sqrt{n+1}=\sqrt{2\pi}\,\Gamma_n(f;x,p),\quad p\geqslant 1. \tag{35}$$

Теперь покажем, что если $T_n(r)$ — тригонометрический полином степени $(n+1)$ по r, то

$$\Big\| \sum_k \sup_{r\in\Delta_k^{(n)}} |T_n(r)|\, \chi_{\Delta_k^{(n)}}(t) \Big\|_q \leqslant e^{\pi} \| T_n(r) \|_q. \tag{36}$$

Действительно, пусть r_k такая, что $T_n(r_k) = \sup\limits_{r\in\Delta_k^{(n)}} |T_n(r)|$. Тогда выполняется неравенство

$$\Big\| \sum_k \sup_{r\in\Delta_k^{(n)}} |T_n(r)|\, \chi_{\Delta_k^{(n)}}(t) \Big\|_q \leqslant \Big\| \sum_k (|T_n(r_k) - T_n(t)| + |T_n(t)|)\, \chi_{\Delta_k^{(n)}}(t) \Big\|_q. \tag{37}$$

Учитывая, что $r_k \in \Delta_k^{(n)}$, $t \in \Delta_k^{(n)}$, по формуле Тейлора имеем

$$|T_n(r_k) - T_n(t)| = \left| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} \frac{\partial^{(i)} T_n(t)}{\partial t^i} (r_k - t)^i \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} \left| \frac{\partial^{(i)} T_n(t)}{\partial t^i} \right| \frac{\pi^i}{(n+1)^i}.$$

Тогда из (37) следует

$$\Big\| \sum_k \sup_{r\in\Delta_k^{(n)}} |T_n(t)|\, \chi_{\Delta_k^{(n)}}(t) \Big\|_q \leqslant \Big\| \Big(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\pi^i}{(n+1)^i} \left| \frac{\partial^{(i)} T_n(t)}{i!\, \partial t^i} \right| +$$

$$+ |T_n(t)| \Big) \sum_k \chi_{\Delta_k^{(n)}}(t) \Big\|_q = \Big\| \Big(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\pi^i}{i!\,(n+1)^i} \left| \frac{\partial^{(i)} T_n(t)}{\partial t^i} \right| + |T_n(t)| \Big) \Big\|_q. \tag{38}$$

В силу неравенств С. Н. Бернштейна $\left\| \dfrac{\partial^{(i)}}{\partial t^i} T_n(t) \right\|_q \leqslant (n+1)^i \| T_n(t) \|_q$, $q \geqslant 1$, и (38) имеем

$$\Big\| \sum_k \sup_{r\in\Delta_k^{(n)}} |T_n(r)|\, \chi_{\Delta_k^{(n)}}(t) \Big\|_q \leqslant \| T_n(t) \|_q \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\pi^i}{i!} + 1 \right) = e^{\pi} \| T_n(t) \|_q, \right.$$

что и требовалось доказать.

Неравенство (36) с коэффициентом 2 несколько более сложным методом доказано ранее В. А. Родиным и И. Я. Новиковым [6].

Оценим величину

$$\mathcal{J} = \left| \int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi} \frac{\varphi_x(r)}{\sin\frac{r}{2}} \sum_k \alpha_k \beta_k \sin(2k+1)\frac{r}{2}\, dr \right| = \left| \sum_{i\geqslant 1} \int_{\Delta_i^{(n)}} \frac{\varphi_x(r)}{\sin\frac{r}{2}} T_n(r)\, dr \right|, \tag{39}$$

где

$$T_n(r) = \sum_k \alpha_k \beta_k \sin(2k+1)\frac{r}{2} = \cos\frac{r}{2} T_n^{(1)}(r) + \sin\frac{r}{2} T_n^{(2)}(r),$$

$$T_n^{(1)}(r) = \sum_k \alpha_k \beta_k \cos kr, \quad T_n^{(2)}(r) = \sum_k \alpha_k \beta_k \sin kr. \tag{40}$$

Очевидно, что $T_n^{(\gamma)}(r)$, $\gamma = 1, 2$, тригонометрические полиномы степени $n+1$ по r.

Из соотношения (39) следует

$$\mathcal{J}_2 \leqslant 2\pi \sum_{i\geqslant 1} \max_{r\in\Delta_i^{(n)},\gamma} |T_n^{(\gamma)}(r)| \int_{\Delta_i^{(n)}} \frac{|\varphi_x(r)|}{r}\,dr =$$

$$= 2(n+1)\int_{\Delta} \sum_{i\geqslant 1} \max_{r\in\Delta_i^{(n)},\gamma} |T_n^{(\gamma)}(r)|\,\chi_{\Delta_i^{(n)}}(t) \int_{\Delta_i^{(n)}} \frac{|\varphi_x(r)|}{r}\,dr\chi_{\Delta_i^{(n)}}(t)\,dt \leqslant$$

$$\leqslant 2(n+1)\int_{\Delta} \sum_{i\geqslant 1} \max_{r\in\Delta_i^{(n)},\gamma} |T_n^{(\gamma)}(r)|\,\chi_{\Delta_i^{(n)}}(t) \sum_{i\geqslant 1}\int_{\Delta_i^{(n)}} \frac{|\varphi_x(r)|}{r}\,dr\chi_{\Delta_i^{(n)}}(t)\,dt \leqslant$$

$$\leqslant 2(n+1)\left\| \sum_{i\geqslant 1} \max_{r\in\Delta_i^{(n)},\gamma} |T_n^{(\gamma)}(r)|\,\chi_{\Delta_i^{(n)}}(t)\right\|_q \left\| \sum_{i\geqslant 1}\int_{\Delta_i^{(n)}} \frac{|\varphi_x(r)|}{r}\,dr\chi_{\Delta_i^{(n)}}(t)\right\|_p,$$

$$p+q=pq. \tag{41}$$

В силу неравенства (36) находим

$$\left\| \sum_{i\geqslant 1} \max_{r\in\Delta_i^{(n)}} |T_n^{(\gamma)}(r)|\,\chi_{\Delta_i^{(n)}}(t)\right\|_q \leqslant e^{\pi} \| T_n^{(\gamma)}(r) \|, \quad \gamma = 1, 2 \tag{42}$$

По теореме Хаусдорфа — Юнга [8, с. 211] при $q \geqslant 2$ имеем

$$\| T_n^{(\gamma)}(r) \|_q \leqslant \left\{ \sum_k \alpha_k^p \right\}^{\frac{1}{p}} (2\pi)^{\frac{1}{q}}.$$

Отсюда, учитывая соотношения (32), получаем

$$\| T_n^{(\gamma)}(r) \|_q \leqslant 2^{\frac{1}{q}} \pi^{\frac{2}{q}} (n+1)^{\frac{1}{p}-1}, \quad \gamma = 1, 2; \quad q \geqslant 2. \tag{43}$$

Из неравенств (41), (42) и (43), учитывая, что $r \geqslant \dfrac{\pi(k+1)}{2(n+1)}$, имеем

$$\mathcal{J}_2 \leqslant \pi^{\frac{2}{q}} 2^{1+\frac{1}{q}} (n+1)^{\frac{1}{p}} e^{\pi} \left\| \sum_{i\geqslant 1} \int_{\Delta_i^{(n)}} \frac{|\varphi_x(r)|}{r}\,dr\chi_{\Delta_i^{(n)}}(t) \right\|_p \leqslant$$

$$\leqslant 2^{1+\frac{1}{q}} \pi^{\frac{2}{q}} (n+1)^{\frac{1}{p}} e^{\pi} \left\{ \sum_k \int_{\Delta_k^{(n)}} \left| \sum_{i\geqslant 1} \int_{\Delta_i^{(n)}} \frac{|\varphi_x(r)|}{r}\,dr\chi_{\Delta_i^{(n)}}(t) \right|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}} =$$

$$= 2^{1+\frac{1}{q}} \pi^{\frac{2}{q}} (n+1)^{\frac{1}{p}} e^{\pi} \left\{ \sum_{k\geqslant 1} \int_{\Delta_k^{(n)}} \left| \int_{\Delta_k^{(n)}} \frac{|\varphi_x(r)|}{r}\,dr\chi_{\Delta_k^{(n)}}(t) \right|^p dt^{\frac{1}{p}} =$$

$$= 2^{1+\frac{1}{q}} \pi^{\frac{2}{q}} e^{\pi} \left\{ \sum_{k\geqslant 1} \left| \int_{\Delta_k^{(n)}} \frac{|\varphi_x(r)|}{r}\,dr \right|^p \right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant 4\sqrt{2\pi}\, e^{\pi} \Gamma_n(f; x, p). \tag{44}$$

Из неравенств (34), (35) и (44) следует

$$|\sigma_1| \leqslant (4\sqrt{2\pi}\, e^{\pi} + \sqrt{2\pi})\, \Gamma_n(f; x, p) \leqslant 4\pi e^{\pi} \Gamma_n(f; x, p).$$

Теорема 1 доказана.

Пусть

$$\tilde{f}_{\frac{1}{n}}(x) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi}\frac{f(x+t)-f(x-t)}{\operatorname{tg}\frac{t}{2}}\,dt, \quad \tilde{f}_0(x) = \tilde{f}(x),$$

а $\tilde{S}_n(f;x)$ — частная сумма тригонометрически сопряженного ряда для ряда Фурье функции $f(x)$. Известно [8, с. 528], что если $f \in L_1$, то $\tilde{f}(x)$ существует почти всюду.

Теорема 2. *Если $f \in L_1$, то при $q \geqslant 2$ имеем*

$$\left\{\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\left|\tilde{f}_{\frac{1}{n}}(x) - \tilde{S}_k(f;x)\right|^q\right\}^{\frac{1}{q}} \leqslant 12e^{\pi}\Gamma_n(f;x,p), \quad p+q = pq. \tag{45}$$

Доказательство. Введем обозначения

$$\tilde{S}_{k,n}(f;x) = = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi}\psi_x(t)\frac{\cos\frac{t}{2} - \cos(2k+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\,dt,$$

$$\psi_x(t) = f(x+t) - f(x-t), \qquad \tilde{S}_{k,\infty}(f;x) = \tilde{S}_k(f;x).$$

Тогда [9] при $p \geqslant 1$ имеем

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{n+1}}\varphi_x(t)\frac{\cos\frac{t}{2} - \cos(2k+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\,dt\right| = |\tilde{S}_k(f;x) - \tilde{S}_{k,n}(f;x)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{n+1}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{n+1}}|\psi_x(t)|\,dt \leqslant 2\Gamma_n(f;x,p), \quad k \leqslant n. \tag{46}$$

Кроме того,

$$\tilde{S}_{k,n}(f;x) - \tilde{f}_{\frac{1}{n}}(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi}\psi_x(t)\frac{\cos(2k+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\,dt. \tag{47}$$

Поэтому, учитывая соотношения (46) и (47), можем записать

$$\left\{\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\left|\tilde{f}_{\frac{1}{n}}(x) - \tilde{S}_k(f;x)\right|^q\right\}^{\frac{1}{q}} \leqslant \left\{\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\left(|\tilde{f}_{\frac{1}{n}}(x) - \tilde{S}_{k,n}(f;x)| + \right.\right.$$

$$\left.\left. + |\tilde{S}_{k,n}(f;x) - \tilde{S}_k(f;x)|\right)^q\right\}^{\frac{1}{q}} \leqslant 2\left\{\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\left|\int\limits_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi}\psi_x(r)\frac{\cos(2k+1)\frac{r}{2}}{2\pi\sin\frac{r}{2}}\,dr\right|^q\right\}^{\frac{1}{q}} +$$

$$+ 4\Gamma_n(f;x,p) \leqslant 2\pi^{-\frac{1}{q}}\left\|\sum_{k=1}^{n}\left|\int\limits_{\Delta}\tilde{\psi}_x(r)\tilde{D}_k(r)\,dr\,\chi_{\Delta_k^{(n)}}(t)\right\|_q + 4\Gamma_n(f;x,p), \tag{48}$$

где

$$\tilde{D}_k(r) = \frac{\cos(2k+1)\frac{r}{2}}{2\pi\sin\frac{r}{2}}, \qquad \tilde{\psi}_x(r) = \begin{cases}\psi_x(r), & \frac{\pi}{n+1} \leqslant r \leqslant \pi, \\ 0, & -\pi \leqslant r < \frac{\pi}{n+1}.\end{cases}$$

Далее, имеем

$$\Big\{\int\limits_{\Delta}\sum_k\Big|\int\limits_{\Delta}\tilde\psi_x(r)\,\tilde D_k(r)\,dr\chi_{\Delta_k^{(n)}}(t)\Big|^q dt\Big\}^{\frac{1}{q}}=\Big|\int\limits_{\Delta}\sum_k\Big|\int\limits_{\Delta}\tilde\psi_x(r)\,\tilde D_k(r)\,dr\chi_{\Delta_k^{(n)}}(t)\Big|\times$$

$$\times\tilde G(t)\,dt\Big|\leqslant\sum_k\int\limits_{\Delta}\Big|\frac{\tilde\psi_x(r)}{2\pi\sin\frac{r}{2}}\tilde\alpha_k\cos(2k+1)\frac{r}{2}\Big|dr=$$

$$=\sum_k\int\limits_{\Delta}\frac{\tilde\psi_x(r)}{2\pi\sin\frac{r}{2}}\tilde\alpha_k\tilde\beta_k\cos(2k+1)\frac{r}{2}\,dr=$$

$$=\sum_k\int\limits_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi}\frac{\psi_x(r)}{2\pi\sin\frac{r}{2}}\tilde\alpha_k\tilde\beta_k\cos(2k+1)\frac{r}{2}\,dr=\tilde{\mathcal{J}}_2,\tag{49}$$

где

$$\tilde\alpha_k=\int\limits_{\Delta_k^{(n)}}|G(t)|\,dt,\qquad\tilde\beta_k=\operatorname{sign}\int\limits_{\Delta}\frac{\tilde\psi_x(r)}{2\pi\sin\frac{r}{2}}\cos(2k+1)\frac{r}{2}\,dr.$$

Выражение $\tilde{\mathcal{J}}_2$ оценивается так же, как $\mathcal{J}_2$; при замене полинома $T_n(r)$ на $\tilde T_n(r)\sum\limits_k\tilde\alpha_k\tilde\beta_k\cos(2k+1)\frac{r}{2}$.

Таким образом, получаем

$$|\tilde{\mathcal{J}}_2|\leqslant 2e^{\pi}\Big\{\sum_k\Big(\frac{n+1}{k+1}\int\limits_{\Delta_k^{(n)}}|f(x+t)-f(x-t)|\,dt\Big)^p\Big\}^{\frac{1}{p}}\leqslant 4e^{\pi}\Gamma_n(f;x,p).\tag{50}$$

Из соотношений (48)—(50) следует (45). Теорема 2 доказана.

Из теорем 1 и 2 и приведенных свойств величины $\Gamma_n(f;x,p)$ вытекает ряд следствий.

Следствие 1. *Если $f\in L_1$, то при $p>1$, $p+q=pq$, $q\geqslant p$ справедливы равенства*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}|f(x)-S_k(f;x)|^q=0,\tag{51}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|\tilde f_{\frac{1}{n}}(x)-\tilde S_k(f;x)|^q=0\tag{52}$$

во всех точках x, где выполняется соотношение (7), *т. е. почти всюду.*

Следствие 2. *Для любой функции $f\in L_1$ при $p>1$ $p+q=pq$, $q\geqslant p$ справедливо равенство*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|\tilde f(x)-\tilde S_k(f;x)|^q=0$$

во всех точках x, где существует функция $\tilde f(x)$ и выполняется соотношение (7), *т. е. почти всюду.*

Следствие 3. *Если функция f из класса L_p, $p>1$, то при $p+q=pq$, $q\geqslant p$ равенства* (51), (52) *выполняются во всех x точках Лебега p-й степени.*

Следствие 4. *Если f — непрерывная функция с модулем непрерывности $\omega(f;\delta)$, то при $p+q=pq$, $p>1$, $q\geqslant p$ справедливы неравенства*

$$\left\{\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}|f(x)-S_k(f;x)|^q\right\}^{\frac{1}{q}}\leqslant 8\pi e^{\pi}C_p\omega\left(f;\frac{1}{\sqrt[q]{n+1}}\right),$$

$$\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|\tilde{f}_{\frac{1}{n}}(x)-\tilde{S}_k(f;x)|^q\right\}^{\frac{1}{q}}\leqslant 24\pi e^{\pi}C_p\omega\left(f;\frac{1}{\sqrt[q]{n+1}}\right).$$

Следствие 5. *Если* $f\in \mathrm{Lip}_M\alpha$, $0\leqslant\alpha<\dfrac{1}{q}$, *то при* $p>1$, $p+q=pq$, $q\geqslant p$ *имеем*

$$\left\{\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}|f(x)-S_k(f;x)|^q\right\}^{\frac{1}{q}}\leqslant 4e^{\pi}C_{(1-\alpha)p}(n+1)^{-\alpha},$$

$$\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|\tilde{f}_{\frac{1}{n}}(x)-\tilde{S}_k(f;x)|^q\right\}^{\frac{1}{q}}\leqslant 12e^{\pi}C_{(1-\alpha)p}(n+1)^{-\alpha}.$$

1. *Hardy G. H., Littlewood J. E.* Sur la serie de Fourier dúne fonction a carre' Sommable // Comput. Revs. Acad. Sci.— 1913.— **153**.— P. 1307—1309.
2. *Hardy G. H., Littlewood J. E.* On the strong summability of Fourier series // Proc. London Math. Soc.— 1926.— P. 273—286.
3. *Maccinkievicz J.* Sur la summabilite (H, k)-des series de Fourier // C. v. Acad. sci. 1939.— **208**.— P. 782—784.
4. *Zugmund A.* On the convergence and summability of pover series on the circle of convergence // Proc. London Math. Soc.— 1942.— 47.— P. 326—350.
5. *Габисония О. Д.* О точках сильной суммируемости рядов Фурье // Мат. заметки.— 1973.— **14**, вып. 5.— С. 615—626.
6. *Новиков И. Я., Родин В. А.* Характеризация точек p-сильной суммируемости тригонометрических рядов // Изв. вузов.— 1988.— **9**.— С. 58—62.
7. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2-х т.— М. : Изд-во иностр. лит., 1965.— Т. 1.— 615 с.
8. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды.— М. : Физматгиз, 1961.— 936 с.
9. *Габисония О. Д.* Точки сильной суммируемости рядов сопряженных с рядами Фурье // Мат. заметки.— 1984.— **36**, № 5.— С. 661—671.

Получено 19.06.90