УДК 517.9

А. Ф. Иванов, канд. физ.-мат. наук (Ин-т математики АН Украины, **Киев),**
П. Марушияк, канд. физ.-мат. наук
(Ин-т инженеров транспорта и связи, Жилина, Чехо-Словакия)

Об осцилляции и асимптотическом поведении решений одной системы дифференциально-функциональных уравнений нейтрального типа

Приводятся условия осцилляции всех решений и наличия неосцилирующих решений с полиномиальным ростом на бесконечности для системы дифференциально-функциональных уравнений нейтрального типа

$$\frac{d^n}{dt^n}\,[x(t)+\lambda_1 x(t-\tau_1)] = p(t)\, f(y(\theta_1(t))),\quad \frac{d^n}{dt^n}\,[y(t)+\lambda_2 y(t-\tau_2)]\; q = (t)\, g(x(\theta_2(t))),$$

$$0 \leqslant |\lambda_1|,\quad |\lambda_2| < 1.$$

Наведено умови осциляції всіх розв'язків та існування неосцилюючих розв'язків з поліноміальним зростом на нескінченності для системи деференціально-функціональних

рівнянь нейтрального типу

$$\frac{d^n}{dt^n}[x(t)+\lambda_1 x(t-\tau_1)] = p(t) f(y(\theta_1(t))),\quad \frac{d^n}{dt^n}[y(t)+\lambda_2 y(t-\tau_2)] = q(t) g(x(\theta_2(t))),$$

$$0 \leqslant |\lambda_1|,\quad |\lambda_2| < 1.$$

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\frac{d^n}{dt^n}[x(t)+\lambda_1 x(t-\tau_1)] = p(t) f(y\,\theta_1(t))),$$

$$\frac{d^n}{dt^n}[y(t)+\lambda_2 y(t-\tau_2)] = q(t)\, g(x(\theta_2(t))) \tag{1}$$

при следующих предположениях:

а) $0 \leqslant \lambda_1, \lambda_2 < 1$, $\tau_1, \tau_2 > 0$, $n \in \mathbb{N}$;

б) $\theta_1, \theta_2 : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}$ — непрерывные функции, удовлетворяющие условию $\lim\limits_{t\to\infty} \theta_i(t) = \infty$, $i = 1, 2$;

в) $p, q : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}$ — непрерывные функции, не меняющие знак при $t \geqslant t_0$;

г) $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывные функции, удовлетворяющие условиям $zf(z) > 0$, $zg(z) > 0$, $z \neq 0$.

Под правильным решением системы (1) понимается пара функций $x(t)$, $y(t)$: $[a, \infty) \to \mathbb{R}$ такая, что $\sup\{|x(t)|, t \geqslant T\} > 0$, $\sup\{|y(t)|, t \geqslant T\} > 0$ для произвольного $T \geqslant a$, а выражения $x(t) + \lambda_1 x(t-\tau_1)$, $y(t) + \lambda_2 y(t-\tau_2)$ принадлежат классу C^1 и удовлетворяют системе при достаточно больших t. Предполагается, что система (1) допускает правильные решения.

Правильное решение будем называть неосциллирующим, если каждая из его компонент не меняет знак при достаточно больших t. В противном случае решение будем называть осциллирующим.

В настоящей работе предлагаются условия осцилляции всех решений системы (1) и (или) наличия неосциллирующих решений с определенным асимптотическим поведением.

Теорема 1. *Предположим, что выполняются условия* а) — г), $p(t)\,q(t) < 0$, $\int^{\infty} |p(t)|\, dt = \infty$, $\int^{\infty} |q(t)|\, dt = \infty$, *и* $\lim \inf_{|x|\to\infty} |f(x)| > 0$, $\lim \inf_{|x|\to\infty} |g(x)| > 0$. *Тогда все решения системы* (1) *осциллируют*.

Доказательство. В силу симметрии системы (1) можно считать, что $p(t) > 0$, $q(t) < 0$.

1). Пусть n — нечетное и система (1) имеет неосциллирующее решение. Предположим сначала, что $x(t) > 0$, $y(t) > 0$. Введем обозначения $u(t) = x(t) + \lambda_1 x(t-\tau_1)$, $v(t) = y(t) + \lambda_2 y(t-\tau_2)$. Тогда из (1) и сделанных предположений следует $u(t) > 0$, $u^{(n)}(t) > 0$, $v(t) > 0$, $v^{(n)}(t) < 0$. Так как n нечетное, то $u'(t) > 0$, следовательно, $u(t) \geqslant u_0 > 0$. Далее имеем $x(t) = u(t) - \lambda_1 x(t-\tau_1) = u(t) - \lambda_1 u(t-\tau_1) + \lambda_1^2 x(t-2\tau_1) > (1-\lambda_1)\, u(t) > x_0 > 0$ для некоторого x_0 и больших t. Интегрируя второе уравнение системы (1), получаем

$$v^{(n-1)}(t) - v^{(n-1)}(t_0) = \int_{t_1}^{t} q(s)\, g(x(\tau_2(s)))\, ds \leqslant g_0 \int_{t_1}^{t} q(s)\, ds$$

для некоторой постоянной $g_0 > 0$ и $t_1 \geqslant t_2$. Устремляя в последнем неравенстве $t \to \infty$ и принимая во внимание условия теоремы, находим, что $v^{(n-1)}(t)$ отрицательно для больших t. Поскольку $v^{(n)}(t)$ также отрицательно, то приходим к противоречию с условием $v(t) = y(t) + \lambda_2 y(t-\tau_2) > 0$.

Рассмотрим теперь случай, когда неосциллирующее решение системы (1) удовлетворяет условию $x(t) > 0$, $y(t) < 0$. Тогда $u(t) > 0$, $u^{(n)}(t) < 0$, $v(t) < 0$, $v^{(n)}(t) < 0$. Так как n нечетное, то $v'(t) < 0$, следовательно, $v(t) \leqslant -v_0 < 0$. Далее имеем $y(t) = v(t) - \lambda_2 y(t-\tau_2) = v(t) - \lambda_2 v(t_2 - \tau_2) + \lambda_2^2 y(t-2\tau_2) < (1-\lambda_2)\, v(t) < -y_0 < 0$ для некоторого $y_0 > 0$ и больших t. Интегрируя первое уравнение системы (1), находим, что $u^{(n-1)}(t)$ отрицательно при больших t. Вместе с неравенством $u^{(n)}(t) < 0$ это противоречит условию $u(t) > 0$.

Предположим далее, что неосциллирующее решение системы (1) удовлетворяет условию $x(t) < 0$, $y(t) > 0$. Тогда $u(t) < 0$, $u^{(n)}(t) > 0$, $v(t) > 0$, $v^{(n)}(t) > 0$. Отсюда следует $v'(t) > 0$, и дальнейшие рассуждения аналогичны случаю $x(t) > 0$, $y(t) > 0$ (если u и v поменять местами).

Случай $x(t) < 0$, $y(t) < 0$ аналогичен в силу симметрии случаю $x(t) > 0$, $y(t) > 0$.

2). Пусть n — четное и система (1) имеет неосциллирующее решение такое, что $x(t) > 0$, $y(t) > 0$. Тогда функции $u(t) = x(t) + \lambda_1 x(t - \tau_1)$, $v(t) = y(t) + \lambda_2 y(t - \tau_2)$ удовлетворяют условиям $u(t) > 0$, $u^{(n)}(t) > 0$, $v(t) > 0$, $v^{(n)}(t) < 0$, и дальнейшие рассуждения повторяют случай $x(t) > 0$, $y(t) > 0$ части 1 доказательства. Случай $x(t) < 0$, $y(t) < 0$ в силу симметрии аналогичен.

Предположим далее, что неосциллирующее решение удовлетворяет условиям $x(t) > 0$, $y(t) < 0$. Тогда функция $u(t)$ положительна и удовлетворяет неравенству $u^{(n)}(t) < 0$. Ввиду четности n $u'(t) > 0$ и, следовательно, $u(t) > u_0 > 0$. Поскольку $x(t) = u(t) - \lambda_1 x(t - \tau_1) = u(t) - \lambda_1 u(t - \tau_1) + \lambda_1^2 x(t - 2\tau_1) \geqslant (1 - \lambda_1) u(t - \tau_1)$, то $x(t) \geqslant x_0 > 0$. Интегрируя второе уравнение системы (1), получаем

$$v^{(n-1)}(t) \leqslant v^{(n-1)}(t_2) + \delta \int_{t_1}^{t} q(s)\, ds \to -\infty \text{ при } t \to \infty,$$

для некоторых $\delta > 0$, $t_2 \geqslant t_0$. Последнее соотношение влечет

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = -\infty, \quad \lim_{t\to\infty} v'(t) = -\infty.$$

Поскольку $y(t) = v(t) - \lambda_2 v(t - \tau_2) + \lambda_2^2 y(t - 2\tau_2) < (1 - \lambda_2) v(t) < -y_0 < 0$ при больших t, то интегрирование первого уравнения системы (1) дает

$$u^{(n-1)}(t) \leqslant u^{(n-1)}(t_3) - \delta_1 \int_{t_3}^{t} p(s)\, ds \to -\infty \text{ при } t \to +\infty.$$

Следовательно, $u(t) \to -\infty$ при $t \to +\infty$, что противоречит условию $x(t) > 0$.

Случай $x(t) < 0$, $y(t) > 0$ аналогичен рассмотренному.

Следующее утверждение относится к случаю, когда система (1) имеет неосциллирующие решения, удовлетворяющие соотношениям

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \text{const} \neq 0, \quad \lim_{t\to\infty} y(t) = \text{const} \neq 0. \tag{2}$$

Теорема 2. *Система* (1) *при условиях* а) — г) *имеет неосциллирующее решение, удовлетворяющее соотношениям* (2) *тогда и только тогда, когда*

$$\int^{\infty} t^{n-1} |p(t)|\, dt < \infty, \quad \int^{\infty} t^{n-1} |q(t)|\, dt < \infty.$$

Доказательство. Необходимость. Предположим, что система (1) имеет неосциллирующее решение с положительными компонентами $x(t)$, $y(t)$, удовлетворяющее условию (2). Тогда $\lim_{t\to\infty} x^{(i)}(t) = \lim_{t\to\infty} y^{(i)}(t) = 0$, $i = 1, \ldots, n$. Положив $u(t) = x(t) + \lambda_1 x(t - \tau_1)$, $v(t) = y(t) + \lambda_2 y(t - \tau_2)$ и проинтегрировав систему (1) на отрезке $[T, \infty)$, получим

$$(-1)^n [c_x (1 + \lambda_1) - u(T)] = \int_T^{\infty} \frac{(s-t)^{n-1}}{(n-1)!}\, p(s) f(y(\theta_1(s)))\, ds,$$

$$(-1)^n\,[c_y(1+\lambda_2)-v(T)]=\int\limits_T^\infty \frac{(s-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,q(s)\,g(x(\theta_2(s)))\,ds.$$

Так как в силу (2) и б) $|f(y(\theta_1(s)))|\geqslant\delta\,|\,g(x(\theta_2(s)))|\geqslant\delta$ для некоторого $\delta=\delta(T)>0$ и больших T, то из предшествующих равенств следует, что каждый из интегралов $\int\limits^\infty |p(t)|\,t^{n-1}\,dt$, $\int\limits^\infty |q(t)|\,t^{n-1}\,dt$ сходится.

Достаточность. Выберем достаточно большое $T>0$ так, чтобы

$$T_*=\min\{T-\tau_1,\ T-\tau_2,\ \inf_{t\geqslant T}\theta_1(t),\ \inf_{t\geqslant T}\theta_2(t)\}\geqslant t_0.$$

Пусть W — множество функций из $C\,[T_*,\infty)$, удовлетворяющих условиям $c\leqslant w(t)\leqslant c+\delta$ при $t\geqslant T$, $w(t)=\omega(T)$ при $T_*\leqslant t\leqslant T$. Легко видеть, что W — замкнутое выпуклое подмножество пространства Фреше $C\,[T_*,\infty)$. При фиксированных $0\leqslant\lambda<1$, $\tau>0$ каждому $w\in W$ поставим в соответствие функцию $\hat{w}_{\lambda\tau}: T_*,\ \infty)\to\mathbb{R}$, определяемую следующим образом:

$$\hat{w}_{\lambda,T}(t)=\sum_{j=1}^{n(t)-1}(-\lambda)^j\omega(t-j\tau)+\frac{(-\lambda)^{n(t)}w(T)}{1+\lambda},\quad t>T,$$

$$\hat{w}_{\lambda,\tau}(t)=\frac{w(T)}{1+\lambda},\quad T_*\leqslant t\leqslant T,$$

где $n(t)$ — наименьшее натуральное число такое, что $T_*\leqslant t-n(t)\tau\leqslant T$ определение функции $\hat{w}_{\lambda,\tau}(t)$ восходит к работе [3]). Непосредственно проверяется, что функция $\hat{w}_{\lambda,\tau}(t)$ непрерывна на $[T_*,\infty)$ и удовлетворяет уравнению

$$\hat{w}_{\lambda,\tau}(t)+\lambda\hat{w}_{\lambda,\tau}(t-\tau)=w(t),\quad t\geqslant T. \tag{3}$$

Поскольку $0\leqslant\lambda<1$ и ряд $\sum\limits_{j=0}^\infty(-\lambda)^j$ сходится, то для произвольного $c>0$ можно подобрать $\delta>0$ так, что условие $c\leqslant w(t)\leqslant c+\delta$ влечет неравенство $\hat{w}_{\gamma\tau}(t)>0$, более того, $c_1\leqslant\hat{\omega}(t)\leqslant c_1+\delta_1$ для некоторых $c_1>0$ и $\delta_1>0$.

Для определенности будем считать, что n — нечетное, $p(t)\geqslant 0$, $q(t)\geqslant 0$ (другие случаи рассматриваются аналогично). Выберем указанные выше $T\geqslant t_0$, $c>0$, $\delta>0$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$c_1>0,$$

$$\max\{f(z),\ z\in[c_1,\ c_1+\delta]\}\int\limits_T^\infty p(t)\,dt\leqslant\delta/(n-1)!,$$

$$\max\{g(z),\ z\in[c_1,\ c_1+\delta]\}\int\limits_T^\infty q(t)\,dt\leqslant\delta/(n-1)!.$$

Пусть $x,\ y\in W$. Определим отображение $A: W\times W\to C\,[T_*,\ \infty)\times C\,[T_*,\infty)$ следующим образом:

$$Ax(t)=c+(-1)^{n-1}\int\limits_t^\infty\frac{(s-t)^{(n-1)}}{(n-1)!}\,p(s)\,f(\hat{y}_{\lambda_1,\tau_1}(\theta_1(s)))\,ds,$$

$$Ay(t)=c+(-1)^{(n-1)}\int\limits_t^\infty\frac{(s-t)^{(n-1)}}{(n-1)!}\,q(s)\,g(\hat{x}_{\lambda_2,\tau_2}(\theta_2(s)))\,ds,\quad t\geqslant T,$$

$$Ax(t)=c_x,\quad Ay(t)=c_y,\quad T_*\leqslant t\leqslant T,$$

где постоянные c_x, c_y выбраны так, чтобы $Ax(t)$, $Ay(t)$ были непрерывны при $t = T$.

Легко видеть, что из наложенных ранее условий следует $c \leqslant Ax(t) \leqslant c + \delta$, $c \leqslant Ay(t) \leqslant c + \delta$, $t \geqslant T^*$. Таким образом, A отображает $W \times W$ в себя. Очевидно, что A — непрерывный оператор, а множество $A(W \times W)$ относительно компактно в топологии пространства $C[T^*, \infty) \times C[T^*, \infty)$. Следовательно, согласно теореме Шаудера—Тихонова о неподвижной точке существует пара функций $x^*(t)$, $y^*(t)$ такая, что $(x^*(t), y^*(t)) = A(x^*(t), y^*(t))$. Учитывая (3), получаем

$$\hat{x}^*_{\lambda_1,\tau_1}(t) + \lambda_1 \hat{x}^*_{\lambda_1,\tau_1}(t - \tau_1) = c + (-1)^{n-1} \int_t^\infty \frac{(s-t)^{n-1}}{(n-1)!} p(s) f(\hat{y}^*_{\lambda_1,\tau_1}(\theta_1(s)))\, ds,$$

$$\hat{y}^*_{\lambda_2,\tau_2}(t) + \lambda_2 \hat{y}^*_{\lambda_2,\tau_2}(t - \tau_2) = c + (-1)^{n-1} \times$$

$$\times \int_t^\infty \frac{(s-t)^{n-1}}{(n-1)!} q(s) g(\hat{x}^*_{\lambda_2,\tau_2}(\theta_2(s)))\, ds, \quad t \geqslant T.$$

Вычисляя n-ю производную, видим, что $\hat{x}^*(t)$, $\hat{y}^*(t)$ — положительное (следовательно, неколеблющееся) решение системы (1). Теорема доказана.

Заметим, что аналог теоремы 2 хорошо известен для уравнений и систем ДФУ, отличных от нейтрального типа (см., например, [2]). Применяемая нами методика позволяет распространить его на системы уравнений нейтрального типа.

Т е о р е м а 3. *Предположим, что в дополнение к* а)—г) *выполняются условия*

$$f(x) \operatorname{sgn} x \leqslant \alpha |x|^\gamma, \quad g(x) \operatorname{sgn} x \leqslant \beta |x|^\delta$$

при больших $|x|$ *и некоторых постоянных* $\alpha, \beta, \gamma, \delta$,

$$\int^\infty |p(t)| t^{n-l-1} |\theta_1^{\gamma m}(t)|\, dt < \infty, \quad \int^\infty |q(t) t^{n-m-1} |\theta_2^{\delta l}(t)|\, dt < \infty$$

для некоторых целых неотрицательных чисел l *и* m.

Тогда система (1) *имеет неосциллирующее решение* $x(t)$, $y(t)$, *удовлетворяющее условию*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{x(t)}{t^l} = \text{const} \neq 0, \quad \lim_{t\to\infty} \frac{y(t)}{t^m} = \text{const} \neq 0.$$

Доказательство теоремы 3 аналогично доказательству теоремы 2, и мы приведем здесь только его основные моменты. Для определенности будем считать, что $n - l$ и $n - m$ — нечетные (другие случаи полностью аналогичны). Рассматриваются множества W_1 и W_2 функций, удовлетворяющих условиям $c_1 \leqslant x(t) \leqslant c_1 + \delta_1 (t - T)^l$ и $c_2 \leqslant y(t) \leqslant c_2 + \delta_2 (t - T)^m$ при $t \geqslant T$, $x(t) = c_1$, $y(t) = c_2$ при $T_* \leqslant t \leqslant T$ соответственно. Для $x(t) \in W_1$, $y(t) \in W_2$ определяется оператор

$$Bx(t) = c_1 + d_1 (t - T)^l + (-1)^{n-l-1} \int_T^t \frac{(s-t)^{l-1}}{(l-1)!} \times$$

$$\times \int_s^\infty \frac{(r-s)^{n-l-1}}{(n-l-1)!} p(r) f(\hat{y}_{\lambda_1,\tau_1}(\theta_1(r)))\, dr ds,$$

$$By(t) = c_2 + d_2 (t - T)^m + (-1)^{n-m-1} \int_T^t \frac{(s-T)^{m-1}}{(m-1)!} \times$$

$$\times \int_s^r \frac{(r-s)^{n-m-1}}{(n-m-1)!}\, q(s)\, g(\hat{x}_{\lambda_2,\tau_2}(\theta_2(r)))\, dr ds, \quad t \geqslant T,$$

$$Bx(t) = c_1, \quad By(t) = c_2, \quad T_* \leqslant t \leqslant T.$$

В силу сходимости интегралов, фигурирующих в условии теоремы, постоянные c_1, c_2, d_1, d_2, δ_1, δ_2 и $T > t_0$ можно подобрать так, что оператор B будет отображать $W_1 \times W_2$ в себя. Следовательно, B имеет неподвижную точку $(x^*(t),\ y^*(t)) \in W_1 \times W_2$, а тогда $\hat{x}^*(t)$, $\hat{y}^*(t)$ является неосциллирующим решением системы (1).

Замечание 1. При выполнении условий а) — г) и ограниченности функций $f(x)$, $g(x)$, а также сходимости интегралов $\int^\infty |p(t)|\, dt < \infty$, $\int^\infty |q(t)|\, dt < \infty$ система (1) имеет неосциллирующие решения, допускающие асимптотическое представление $x(t) \sim d_1 t^{n-1}$, $y(t) \sim d_2 t^{n-1}$, $d_1, d_2 \neq 0$. При доказательстве этого факта используются операторы

$$Bx(t) = c_1 + \frac{1}{(n-2)!} \int_T^t (t-s)^{n-2} p(s) f(\hat{y}_{\lambda_1,\tau_1}(\theta_1(s)))\, ds,$$

$$By(t) = c_2 + \frac{1}{(n-2)!} \int_T^t (t-s)^{n-2} q(s)\, g(\hat{x}_{\lambda_2,\tau_2}(\theta_2(s)))\, ds,$$

а само доказательство аналогично приведенному для теоремы 3.

Замечание 2. Теоремы 2, 3 переносятся без каких-либо изменений в формулировках и доказательстве на случай $-1 < \lambda_1, \lambda_2 \leqslant 0$. Аналог теоремы 1 для этого случая нам неизвестен.

1. *Иванов А. Ф., Кусано Т.* Колеблемость решений одного класса функционально-дифференциальных уравнений первого порядка нейтрального типа // Укр. мат. журн.— 1989.— **41**, № 10.— С. 1370—1375.
2. *Marusiak P.* Oscillation of solutions of nonlinear delay differential equations // Mat. časopis— 1974.— N 4.— P. 371—380.
3. *Kuan J.* Types and criteria of nonoscillatory solutions for second order linear neutral differential difference equations // Chin. Ann. Math. Ser. A.— 1987.— 8.— P. 114—124.

Получено 15.11.90