УДК 519.41/47

Я. Д. Половицкий, канд. физ.-мат. наук (Перм. ун-т)

Группы с условием слойной минимальности

Рассматриваются некоторые обобщения условия минимальности. Одно из них — условие слойной минимальности — позволяет получить новую характеризацию групп с черниковскими слоями в классе локально конечных групп.

Розглядаються деякі узагальнення умови мінімальності. Одне з них — умова шарової мінімальності — дає можливість одержати нову характеризацію груп з черніковськими шарами у класі локально скінченних груп.

Одним из важнейших условий конечности является условие минимальности. Изучение групп с условием минимальности для подгрупп (условием min) и многими его обобщениями неразрывно связано с именем С. Н. Черникова (см., например [1]). В 1958 г. С. Н. Черников предложил автору рассмотреть одно из таких обобщений — условие π-минимальности. Ряд результатов о группах с этим условием получен в [2, 3].

Важным частным случаем условия π-минимальности является условие p-min (p — простое число). Для периодических групп это условие можно определить следующим образом.

Определение 1. *Периодическая группа удовлетворяет условию p-min, если в любой убывающей цепочке ее подгрупп*

$$G_1 \geqslant G_2 \geqslant \ldots \geqslant G_i \geqslant G_{i+1} \geqslant \ldots \tag{1}$$

не более конечного числа разностей

$$G_i \setminus G_{i+1} \tag{2}$$

содержат p-элементы ($i = 1, 2, \ldots$).

Наиболее интересным оказался класс периодических групп, удовлетворяющих условию p-min для всех простых p (такие группы названы в [2] группами с условием примарной минимальности). В [2] показано, что широкий класс групп с этим условием (включающий в себя класс периодических почти локально разрешимых групп) совпадает с классом групп с черниковскими слоями, т. е. групп, в которых каждое множество элементов одного и того же порядка порождает черниковскую подгруппу *.

В дальнейшем в [4] было доказано, что любая локально конечная группа с условием примарной минимальности почти локально разрешима, т. е. в силу указанного выше результата является группой с черниковскими слоями. Аналогичный результат позже был получен В. П. Шунковым и его учениками для некоторых более широких классов периодических групп.

В настоящей работе рассматривается условие, близкое к условию примарной минимальности,— условие слойной минимальности. Основным результатом работы является теорема, определяющая новую характеризацию групп с черниковскими слоями.

Определение 2. *Будем говорить, что группа удовлетворяет условию p-слойной минимальности* (*короче — условию* l_p-min), *если в любой убывающей цепочке* (1) *ее подгрупп для каждого натурального n не более конечного числа разностей* (2) *содержат элементы порядка p^n* .

Условие l_p-min является естественным обобщением условия p-min.

Определение 3. *Группу G, удовлетворяющую условию* l_p-min *для любого p, назовем группой с условием слойной минимальности* (*короче — с условием* l-min).

Легко видеть, что условия l_p-min и l-min переносятся на подгруппы.

Лемма 1. *Если порядки p-элементов периодической группы G с условием* l_p-min *ограничены в совокупности, то группа G удовлетворяет условию* p-min.

Действительно, если p^m—максимальный порядок p-элементов группы G, то в каждой убывающей цепочке (1) ее подгрупп ввиду условия l_p-min не более конечного числа разностей (2) может содержать элементы каждого из порядков $p, p^2, \ldots p^m$ и потому в ней лишь конечное число этих разностей может содержать p-элементы. По определению 1 группа G удовлетворяет условию p-min. Очевидно, что из выполнимости условия p-min следует и выполнимость условия l_p-min. Поэтому из леммы 1 вытекает такое следствие.

Следствие. *Для периодических групп с ограниченными в совокупности порядками p-элементов условия* l_p-min *и* p-min *равносильны.*

Очевидно, что периодическая группа с условием примарной минимальности удовлетворяет и условию l-min. Автору неизвестно, справедливо ли обратное утверждение.

---

* В [2] и некоторых других работах автора группы с черниковскими слоями назывались слойно экстремальными.

Основной частью настоящей работы является доказательство равносильности условий l-min и примарной минимальности в классе локально конечных групп.

Лемма 2. *Локально конечная p-группа P тогда и только тогда удовлетворяет условию l_p-min, когда P — черниковская группа.*

Доказательство. Достаточность очевидна. Докажем необходимость. Пусть группа P удовлетворяет условию l_p-min и A — ее произвольная абелева подгруппа. Из условия l_p-min легко получить, что нижний слой подгруппы A конечен, а тогда, как известно [1], A — черниковская группа. Значит, локально конечная группа P удовлетворяет условию минимальности для абелевых подгрупп, и потому, как показано С. Н. Черниковым [1], является черниковской группой. Лемма доказана.

Следствие. *Для локально конечных p-групп равносильны условия l_p-min и p-min (соответственно l-min и примарной минимальности).*

Теорема 1. *Локально конечная группа тогда и только тогда удовлетворяет условию l-min, когда она является группой с черниковскими слоями.*

Достаточность утверждения теоремы очевидна, так как группа с черниковскими слоями удовлетворяет условию примарной минимальности и тем более условию l-min.

Докажем необходимость. Пусть G — локально конечная группа с условием l-min. В силу леммы 2 для каждого $p \in \pi(G)$ все силовские p-подгруппы группы G черниковские. Как показано в работах [5, 6] (см. также [7]), такая группа почти локально разрешима. Из теоремы 2 работы [8] следует, что группа G является расширением полной абелевой группы A с помощью группы с конечными силовскими p-подгруппами (по всем p).

Зафиксируем простое $p \in \pi(G)$ и обозначим через A_p силовскую p-подгруппу группы A. Очевидно, A_p — полная черниковская группа, нормальная в G. Из результатов работы [8] (см. теорему 4) следует, что $G/O_{p'}(G)$ — черниковская группа, причем, как видно из определения подгруппы $O_{p'}(G)$, полная часть $S/O_{p'}(G)$ этой группы является p-группой. Из конечности фактор-группы G/S вытекает, что $A_p \subset S$. Так как фактор-группа G/A не содержит, как отмечено выше, бесконечных p-подгрупп, то в G/A_p все силовские p-подгруппы (по выбранному p) конечны. Поэтому $S/A_p \cdot O_{p'}(G)$ — конечная p-группа. Отсюда и из полноты группы $S/O_{p'}(G)$ следует

$$S = A_p \cdot O_{p'}(G). \tag{3}$$

Как отмечалось выше, G/S — конечная группа. Обозначим через T подгруппу, порожденную взятыми по одному представителями всех смежных классов G по S. Группа T конечна и $G = ST$. Отсюда и из (3) получаем

$$G = (A_p \cdot O_{p'}(G))\, T = A_p (O_{p'}(G) \cdot T).$$

Обозначим

$$Q = O_{p'}(G) \cdot T. \tag{4}$$

Тогда

$$G = A_p Q. \tag{5}$$

Из конечности фактор-группы $Q/O_{p'}(G)$ (см. (4)) и того, что в $O_{p'}(G)$ нет (по определению) p-элементов, отличных от 1, следует, что в группе Q все силовские p-подгруппы конечны. Так как ввиду локальной конечности группы Q они сопряжены, то в силу леммы 1 группа Q удовлетворяет условию p-min. Всякая квазиполная (т. е. не имеющая истинных подгрупп конечного индекса) подгруппа группы Q в силу доказанного в [8] абелева, и потому по теореме 2 из [2] множество всех p-элементов группы Q порождает черниковскую подгруппу H.

Обозначим через K подгруппу, порожденную всеми p-элементами группы G. Покажем, что

$$K = A_p H. \tag{6}$$

Действительно, если g — произвольный p-элемент группы G, то в силу равенства (5) он представим в виде $g = af$, где $a \in A_p$, $f \in Q$. Но так как инвариантная в G p-подгруппа A_p содержится в каждой силовской

p-подгруппе группы G и a, g — p-элементы, то элемент $f = a^{-1}g$ также является p-элементом, а тогда $f \in H$. Значит,

$$g \in A_p H. \tag{7}$$

Поскольку $A_p \lhd G$, то $A_p H \leqslant G$, и потому из (7) и определения K вытекает, что $K \leqslant A_p H$. Так как обратное включение очевидно, то этим доказано равенство (6).

Как отмечалось выше, A_p и H — черниковские группы, и потому из (6) следует, что и подгруппа K черниковская. Отсюда вытекает (ввиду произвольности p), что G — группа с черниковскими слоями. Теорема доказана.

Следствие. *В классе локально конечных групп условия l-min и примарной минимальности равносильны.*

В заключение докажем одно утверждение, позволяющее дать несколько иное определение условия слойной минимальности и оправдывающее его название.

Теорема 2. *Периодическая группа G тогда и только тогда удовлетворяет условию слойной минимальности, когда для любого натурального n в каждой убывающей цепочке* (1) *ее подгрупп не более конечного числа разностей* (2) *содержат элементы порядка n.*

Доказательство. Достаточность утверждения теоремы очевидна. Докажем необходимость. Пусть G — группа с условием слойной минимальности. Предположим, что в G существует бесконечная убывающая цепочка подгрупп (1), в которой бесконечно много разностей (2) содержат элементы порядка n.

Пусть при некотором i $g \in G_i \setminus G_{i+1}$ и $|g| = n$. Тогда $n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_s^{r_s}$ (где p_j — различные простые числа) и элемент g представим в виде произведения p_j-элементов g_j:

$$g = g_1 g_2 \dots g_s, \tag{8}$$

где $|g_j| = p_j^{r_j}$, $j = 1, 2, \dots, s$. Если $g_j \in G_{i+1}$ при всех $j = 1, 2, \dots, s$, то из (8) вытекает $g \in G_{i+1}$, что противоречит выбору элемента g. Значит, разность $G_i \setminus G_{i+1}$ содержит наряду с элементом g порядка n и некоторый p_j- элемент g_j.

Мы получили, что в цепочке (1) бесконечно много разностей (2) содержат элементы, порядки которых имеют вид $p_j^{r_j}$, где p_j — одно из чисел

$$p_1, \ p_2, \dots p_s. \tag{9}$$

Из конечности множества (9) следует, что различных чисел вида $p_j^{r_j}$ конечное число. Следовательно, существует среди них такое $p_t^{r_t}$, что в цепочке (1) бесконечно много разностей (2) содержат элементы порядка $p_t^{r_t}$. Это означает, что группа G не удовлетворяет условию l_{p_t}-min, т. е. и условию слойной минимальности, что противоречит условию теоремы. Значит, в каждой убывающей цепочке (1) подгрупп группы G лишь конечное число разностей (1) может содержать элементы любого фиксированного порядка n. Теорема доказана.

1. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами системы подгрупп.— М. : Наука, 1980.— 384 с.
2. *Половицкий Я. Д.* Слойно экстремальные группы // Мат. сб.— 1962.— 56, вып. 1.— С. 95—106.
3. *Половицкий Я. Д.* О локально экстремальных группах и группах с условием π-минимальности // Докл. АН СССР.— 1961.— 138, № 5.— С. 1022—1024.
4. *Павлюк И. И., Шафиро А. А., Шунков В. П.* О локально конечных группах с условием примарной минимальности // Алгебра и логика.— 1974.— 13, № 3.— С. 325—336.
5. *Павлюк И. И., Шунков В. П.* О локально конечных группах с условием min-p по всем p // VII Всесоюзн. симп. по теории групп: Тез. докл.— Красноярск: Изд-во Краснояр. ун-та, 1980.— С. 84—85.
6. *Беляев В. В.* Локально конечные группы с черниковскими силовскими p-подгруппами // Алгебра и логика.— 1981.— 20, № 6.— С. 605—619.

7. *Черников Н. С.* О бесконечных простых локально конечных группах.— Киев, 1982.— 20 с.— (Препринт/ АН УССР. Ин-т математики; 82.37).
8. *Каргаполов М. И.* Локально конечные группы, обладающие нормальными системами с конечными факторами // Сиб. мат. журн.— 1961.— **2**, № 6.— С. 853—873.

Получено 18.07.91