УДК 512.54

В. О. Гомер, асп. (Краснояр. ун-т)

Группы с элементами конечных рангов

С помощью понятия ранга элемента в произвольной группе доказан критерий непростоты бесконечной группы и найдены условия, при которых q-бипримитивно конечная группа G с черниковскими силовскими q-подгруппами имеет черниковскую фактор-группу $G/O_{p'}(G)$.

За допомогою поняття рангу елемента в довільній групі доведено критерій непростоти нескінченної групи і знайдені умови, згідно з якими q-біпримітивно скінченна група G, в якій всі силовські q-підгрупи — черніковські, має черніковську фактор-групу $G/O_{p'}(G)$.

1. Следуя В. П. Шункову [1], назовем группу G *p-экстремально аппроксимируемой* для некоторого $p \in \pi(G)$, если в ней существует такая нормальная p'-подгруппа N, что фактор-группа G/N — черниковская.

Пусть G — некоторая группа, $g \in G$, и H — конечнопорожденная подгруппа из G, содержащая элемент g. Определим на H функцию $\Phi_g(H)$ следующим образом:

$$\Phi_g(H) = \begin{cases} 0, & \text{если } g \text{ принадлежит собственному нормальному делителю} \\ & \text{подгруппы } H, \text{ либо } |H| \text{ — простое число;} \\ \max|H:N|, & \text{где } N \text{ — максимальный нормальный делитель в } H,\ g \notin N. \end{cases}$$

З а м е ч а н и е 1. Определение функции $\Phi_g(H)$ допускает бесконечные значения.

Число $r(g, G) = \max \Phi_g(H)$, где H пробегает всевозможные конечнопорожденные подгруппы из G, содержащие элемент g, назовем *рангом элемента g в группе G*.

З а м е ч а н и е 2. Если G — локально конечная группа, то понятие ранга элемента, введенное выше, совпадает с понятием ранга элемента, введенным в [1].

Из определения ранга элемента вытекают следующие его свойства:

1) если G — конечная простая группа, то для любого ее элемента g выполняется равенство $r(g, G) = |G|$;

2) если T — произвольная подгруппа группы G, $g \in T$, то $r(g, T) \leqslant r(g, G)$;

3) любой элемент периодической локально разрешимой группы имеет в ней конечный ранг.

Л е м м а 1. *Пусть G — бесконечная группа, $g \neq 1$ — некоторый ее элемент конечного ранга n, не лежащий ни в одном собственном нормальном делителе группы G. Тогда G имеет такую локальную систему Σ_g конечнопорожденных подгрупп, содержащих элемент g, что для любой подгруппы $H \in \Sigma_g$ все ее максимальные нормальные делители Q_H имеют конечный, не превышающий n, индекс в H и не содержат элемент g.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, G имеет локальную систему Σ конечнопорожденных подгрупп, содержащих элемент g. Представим Σ в виде $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$. В подсистему Σ_1 включаем подгруппы H из Σ такие, что элемент g не лежит ни в одном нормальном делителе из H. В подсистему Σ_2 включаем такие подгруппы H из Σ, что g лежит в собственном нормальном делителе подгруппы H.

Если Σ_1 локальна, то она и есть ввиду конечности ранга g искомая.

Пусть Σ_2 локальна. Как известно [2], аксиомы группы записываются в виде предметно универсальных формул. Запишем в виде такой формулы и тот факт, что в любой подгруппе $H \in \Sigma_2$ есть нормальная подгруппа, содержащая элемент g.

$$\forall x \forall y \forall z \forall u \, \{(P(x) \,\&\, P(y)) \Rightarrow P(xy^{-1})) \,\&\, P(1) \,\&\, (P(x) \Rightarrow P(z^{-1}xz)) \,\&\, P(g) \,\&$$

$$\& \neg T(e) \,\&\, \neg T(g) \,\&\, (T(u) \Rightarrow \neg T(gu))\}. \quad (1)$$

Содержательно: $P(x)$ означает, что x принадлежит нормальной подгруппе, обозначенной одноименным предикатом; g, 1 — выделенные символы; $T = H \setminus P$.

Так как формулы аксиом группы и формула (1) выполнимы в любой подгруппе локальной системы Σ_1, то по теореме А. И. Мальцева [2] формула (1) выполнима и во всей группе G, т. е. в G существует нормальный делитель, содержащий элемент g. Противоречие. Лемма доказана.

Теорема 1. *Если бесконечная группа G имеет нетривиальный элемент g конечного ранга, то она непроста. В частности:*

1) *если $r(g, G) > 0$, то G имеет нормальный делитель конечного индекса, не содержащий элемент g;*

2) *если $r(g, G) = 0$, то G имеет собственный нормальный делитель, содержащий элемент g.*

Доказательство. Если $r(g, G) = 0$, то группа G имеет локальную систему Σ конечнопорожденных подгрупп, содержащих элемент g, причем каждая из них имеет собственный нормальный делитель, содержащий g. Как и в лемме 1, это влечет за собой существование в G собственного нормального делителя, в котором лежит элемент g.

Допустим, что $r(g, G) \neq 0$ и группа G проста. Тогда g не лежит ни в одном собственном нормальном делителе из G, т. е. выполнены условия леммы 1. Пусть Σ_g — локальная система, о которой идет речь в заключении леммы 1. Требования, налагаемые на подгруппы из Σ_g, запишем в виде логических формул:

1) формулы аксиом группы;

2) $\forall x \forall y \forall z \{(P(x) \,\&\, P(y)) \Rightarrow P(xy^{-1})) \,\&\, P(1) \,\&\, (P(x) \Rightarrow P(z^{-1}xz)) \,\&\, \neg P(g)\}$;

3) $\forall x \forall y \forall z \{(xy = z \Rightarrow p_x p_y = p_z) \,\&\, p_1 \,\&\, p_g \,\&\, (p_1 \neq p_g) \,\&\, (p_x = p_{x_1} \vee \ldots \vee p_x = p_{x_n})\}$. Через p_x обозначаем образ элемента $x \in H$ в H/Q_H, причем последняя дизъюнкция в 3) означает, что $|H/Q_H| \leqslant n$. Все эти формулы предметно универсальны, т. е. по теореме А. И. Мальцева выполнимы в G. Таким образом, G имеет нормальный делитель индекса не больше n, не содержащий элемент g. Теорема доказана.

Эта теорема, в частности, дает положительный ответ на вопрос III.2 из [3].

2. Основной результат. Лемма 2. *Пусть G — группа, g — ее элемент конечного ранга, N — нормальная подгруппа из G, $g \notin N$. Тогда элемент $g_1 = gN$ имеет в группе $G_1 = G/N$ конечный ранг и $r(g_1, G_1) \leqslant r(g, G)$.*

Доказательство. Пусть сначала G — конечнопорожденная группа, H — ее произвольная конечнопорожденная подгруппа, $N \leqslant H \leqslant G$, $H_1 = H/N$. Ясно, что если $\Phi_{g_1}(H_1) = 0$, то $\Phi_g(H) = 0$. Пусть теперь $\Phi_{g_1}(H_1) \neq 0$. Это означает, что для любого максимального нормального делителя T_1 из H_1 элемент $g_1 \notin T_1$. Пусть T — полный прообраз T_1 в H. Очевидно T — максимальный нормальный делитель в H и $g \notin T$. Если в H существует такой максимальный нормальный делитель X, что $g \in X$, то из $X \not\prec N$ вытекало бы $X_1 = XN/N \neq 1$ и $g_1 \in X_1$, причем X_1 максимален в H_1. Значит $\Phi_{g_1}(H_1) = 0$. Противоречие. Следовательно, элемент g не лежит ни в одном максимальном нормальном делителе из H. Далее, согласно теореме об изоморфизмах $H_1/T_1 \cong H/T$, т. е. $|H_1 : T_1| = |H : T|$. Следовательно, $\Phi_{g_1}(H_1) = \Phi_g(H)$. Так как H — произвольная конечнопорожденная подгруппа, содержащая элемент g, то $r(g_1, G_1) \leqslant r(g, G)$.

Пусть теперь G — произвольная группа и H — ее произвольная конечнопорожденная подгруппа. Рассмотрим подгруппу $Y = HN$. Очевидно,

$Y/N \cong H/(H \cap N)$ — конечнопорожденная группа. Для нее лемма уже доказана, поэтому $r(g_1, Y/N) \leqslant r(g, H)$. В силу произвольности выбора H вытекает, что $r(g_1, G_1) \leqslant r(g, G)$.

Теорема 2. *Пусть G — q-бипримитивно конечная группа с черниковскими силовскими q-подгруппами по данному простому числу q. Тогда следующие утверждения для группы G эквивалентны*:

1) *все q-элементы группы G имеют в G конечные ранги*;

2) *группа $G_1 = G/O_{q'}(G)$ является группой одного из следующих видов*:

а) *G_1 является черниковской группой*;

б) *G_1 имеет максимальную нормальную локально конечную подгруппу R, которая является черниковской, и G_1/R — q'-группа*.

Доказательство. Если G является q-экстремально аппроксимируемой, то, очевидно, ранг любого q-элемента из G конечен в G.

Пусть теперь ранг любого q-элемента из G конечен в G, но G не является q-экстремально аппроксимируемой.

Так как $G_1 = G/O_{q'}(G)$ согласно [4] является q-бипримитивно конечной группой с черниковскими силовскими q-подгруппами, и согласно лемме 2 ранг любого элемента из G_1 конечен в G_1, то можно считать $O_{q'}(G) = 1$.

Лемма 3. *Любая силовская q-подгруппа из G имеет лишь конечное число попарно несопряженных элементов ненулевого ранга*.

Доказательство. Пусть $S \in \mathrm{Syl}_q(G)$, a_1 — ее элемент ненулевого ранга в G. По теореме 1 группа G имеет нормальный делитель G_1, $a_1 \notin G_1$ и $|G : G_1| < \infty$. Так как G/G_1 — конечная группа и по теореме об изоморфизмах [4] $SG_1/G_1 \cong S/(S \cap G_1)$, то $S_1 = S_1 \cap G_1$ — бесконечна, причем $|S : S_1| < \infty$. Пусть $a_2 \in S_1$ — элемент конечного ненулевого ранга. Тогда в G_1 существует нормальный делитель G_2, $|G_1 : G_2| < \infty$ и $a_2 \notin G_2$. По тем же соображениям, что и выше, $S_2 = S_1 \cap G_2$ бесконечна и $|S_1 : S_2| < \infty$. Продолжая этот процесс дальше, получаем строго убывающую цепочку

$$S_1 > S_2 > \ldots > S_n > \ldots \tag{2}$$

подгрупп из S. Но S — черниковская группа, т. е. описанный процесс обрывается на конечном шаге.

Замечание 3. По лемме 3 и согласно [4], не нарушая общности рассуждений, можно считать, что все элементы некоторой силовской q-подгруппы P имеют нулевой ранг.

Лемма 4. *Группа G имеет нетривиальную нормальную локально конечную q-экстремально аппроксимируемую подгруппу*.

Доказательство. Допустим, что лемма неверна, т. е. любой нормальный делитель из G не является черниковским, локально конечным (в частности, конечным).

Рассмотрим сначала случай, когда P — конечная группа, и допустим, что пара (G, P) — контрпример к утверждению леммы, у которой порядок $|P|$ наименьший. Не нарушая общности, можно считать, что $G = \langle P^G \rangle$. Пусть $a \in P$. Ясно, что можно считать даже $G = \langle a^G \rangle$. По теореме 1 группа G имеет собственный нормальный делитель G_1, содержащий элемент a. Но тогда $\langle a^G \rangle \leqslant G_1$, т. е. $G = G_1$. Противоречие.

Пусть теперь P — бесконечная черниковская группа. Очевидно, можно полагать $G = \langle P^G \rangle$. Пусть $a \in P$. По теореме 1 в G и P существуют собственные нормальные бесконечные подгруппы T и S соответственно, содержащие элемент a. Положим $U = T \cap S$. Понятно, что $a \in U$, $U \leqslant S < P$, и для любого $g \in G$ выполняется $U^g \leqslant T$. Поэтому $G_1 = \langle U^G \rangle$ нормальна и в T, и в G. Пусть $P_1 = G_1 \cap P$. Если $P = P_1$, то $P \leqslant G_1$, откуда, учитывая, что G_1 нормальна в G, получаем $\langle P^G \rangle \leqslant G_1$, т. е. $G_1 = G$. Противоречие. Значит $P_1 < P$. Подгруппа G_1 имеет те же свойства, что и группа G. Допустим, что P_1 — бесконечная группа. По построению $a \in P_1$. Строим в G_1 подгруппы T_1, S_1, U_1, G_2 так же, как в группе G построили подгруппы T, S, U, G_1 соответственно. Продолжив этот процесс дальше, построим строго убывающую субнормальную цепочку подгрупп

$$G > G_1 > G_2 > \ldots, \tag{3}$$

каждая из которых не является локально конечной черниковской группой, и строго убывающую цепочку соответствующих бесконечных черниковских силовских q-подгрупп

$$P > P_1 > P_2 > \dots . \qquad (4)$$

Но P — черниковская группа, т. е. цепочка (4) оборвется через конечное число шагов. Значит, через конечное число шагов мы прийдем к следующей ситуации: нечерниковская группа G_n, не имеющая собственных локально конечных черниковских нормальных делителей, имеет конечную силовскую q-подгруппу. Как было показано выше, это невозможно. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Закончим теперь доказательство теоремы 2. По лемме 4 группа G имеет максимальную локально конечную подгруппу R. По теореме 2 из [1] R — черниковская группа. По лемме 2 и согласно [4] группа $M = G/R$ имеет те же свойства, что и группа G, либо является q'-группой. Ясно, что остается рассмотреть первый случай. Согласно лемме 4 группа M имеет нетривиальную локально конечную черниковскую нормальную подгруппу V_1. Очевидно, ее полный проообраз V в группе G является локально конечной черниковской нормальной подгруппой, причем $R < V$. Противоречие с выбором подгруппы R. Теорема доказана.

Требование б) в этой теореме отбросить невозможно: группа G, являющаяся центральным расширением конечной абелевой q-группы с помощью q'-группы Новикова—Адяна, удовлетворяет условию 1, но не является расщепляемой.

1. *Шунков В. П.* О локально конечной группе с экстремальными силовскими p-подгруппами по данному простому числу p // Сиб. мат. журн.— 1967.— **5**, № 1.— С. 213—229.
2. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп.— М. : Наука, 1980.— 239 с.
3. *Kegel O. H., Wehrfritz B. A. F.* Locally finite groups.— Amsterdam etc., 1973.
4. *Седова Е. И.* О группах с абелевыми подгруппами конечных рангов // Алгебра и логика.— 1982.— **21**, № 3.— С. 321—343.

Получено 19.02.92