УДК 519.3:330.115

И. И. Еремин, чл.-корр. АН России
(Ин-т математики и механики УрО АН России, Екатеринбург)

Симметричная двойственность для лексикографических задач линейного программирования

Для задач многокритериальной линейной оптимизации формулируется симметричная пара лексикографических задач линейного программирования (ЛП), связанных между собой регулярными соотношениями. Теорема двойственности для несобственных задач линейного программирования (НЗЛП) интерпретируется через смысл лексикографической оптимизации.

Для задач багатокритеріальної лінійної оптимізації формулюється симетрична пара лексикографічних задач лінійного програмування (ЛП), зв'язаних між собою регулярними співвідношеннями. Теорема двоїстості для невласних задач лінійного програмування (НЗЛП) інтерпретується через зміст лексикографічної оптимізації.

Лексикографическая оптимизация связана с использованием векторного упорядочения «$\leqslant$» в соответствии с правилом: $z^T = [z_1, \ldots, z_N] \leqslant y^T = [y_1, \ldots, y_N]$ тогда и только тогда, когда либо $z = y$, либо $\exists i: z_i < y_i$ и $z_s = y_s$, $s = 1, \ldots, i-1$. Элемент $\bar{z} \in Z \subset E_N$ называется лексикографически максимальным, если из $z \in Z$, $z \geqslant \bar{z}$ следует $z = \bar{z}$. Аналогично определяется лексикографически минимальный элемент.

Пусть вектор $z = [f_{i_k}(x), \ldots, f_{i_1}(x), f_{i_0}(x)]_k^T \quad (= F(x))$ определяется некоторой системой функций $\{f_j(x)\}_0^k$ с их упорядочением $p = (i_k, \ldots, i_0)$. Под задачей лексикографической максимизации $\max_p \{F(x)/x \in M\}$ будем понимать поиск вектора $\bar{x} \in M$, реализующего лексикографически максимальный элемент $F(\bar{x})$ на множестве $\{z = F(x)/x \in M\}$.

Выпишем линейные задачи, которые будут объектами изучения в дальнейшем:

$$L_p : \max_p \left\{ \begin{bmatrix} (c_{i_k}, x) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ (c_{i_1}, x) \\ (c_0, x) \end{bmatrix} / Ax \leqslant b_0 + \sum_{j=1}^{l} r_s b_{j_s},\ x \geqslant 0 \right\},$$

$$L_q^* : \min_q \left\{ \begin{bmatrix} (b_{j_l}, u) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ (b_{j_1}, u) \\ (b_0, u) \end{bmatrix} / A^T u \geqslant c_0 + \sum_{t=1}^{k} R_t c_{i_t},\ u \geqslant 0 \right\}.$$

Здесь $p = (i_k, \ldots, i_1, 0)$, $q = (j_l, \ldots, j_1, 0)$; $\{r_j\}_1^l$, $\{R_t\}_1^k$ — системы неотрицательных параметров.

Задачам лексикографической оптимизации поставим в соответствие скаляризованные задачи

$$L_{r,R} : \max \left\{ (c_0, x) + \sum_{t=1}^{k} R_t (c_{i_t}, x) / Ax \leqslant b(r),\ x \geqslant 0 \right\}, \tag{1}$$

$$L^*_{r,R}: \min\left\{(b_0, u) + \sum_{s=1}^{l} r_s (b_{j_s}, u)/A^T u \geqslant c(R),\ u \geqslant 0\right\}, \tag{2}$$

где $b(r) = b_0 + \sum_{s=1}^{l} r_s b_{j_s}$, $c(R) = c_0 + \sum_{t=1}^{k} R_t (c_{i_t}, x)$.

Наша цель состоит в установлении связей задач L_p и L^*_q с $L_{r,R}$ и $L^*_{r,R}$ соответственно.

1. Вспомогательные сведения. Лемма 1 [1, с. 121]. *Если $\tilde{u} \geqslant 0$ — двойственная оценка ограничения $(d, x) \leqslant \beta$ в разрешимой задаче*

$$\max\{(c, x)/Ax \leqslant b,\ (d, x) \leqslant \alpha,\ x \geqslant 0\}, \tag{3}$$

то при $R > \tilde{u}$ она эквивалентна (*в смысле совпадения* Arg) *задаче*

$$\max\ \{(c, x) - R\,[(d, x) - \beta]^+/x \in M\},$$

где $M = \{x \geqslant 0/Ax \leqslant b\}$.

Следствие. *Если $\alpha = \text{opt} \min\{(d, x)/Ax \leqslant b,\ x \geqslant 0\}$, то в условиях леммы*

$$\text{Arg}\,(3) = \text{Arg}\max\{(c, x) - R\,(d, x)/Ax \leqslant b,\ x \geqslant 0\}.$$

Лемма 2. *Пусть задача*

$$\max_{(1,0)}\left\{\begin{bmatrix}(c_1, x)\\(c_0, x)\end{bmatrix}/x \in M\right\} \tag{4}$$

— разрешима. Если $\alpha_1 = \max\ \{(c_1, x)/x \in M\}$, $\tilde{u}_1 \geqslant 0$ — двойственная оценка неравенства $-(c_1, x) \leqslant -\alpha_1$ в задаче

$$\max\{(c_0, x)/-(c_1, x) \leqslant -\alpha_1,\quad x \in M\}, \tag{5}$$

то при $R_1 > \tilde{u}_1$ задача (5) (*или* (4), *что одно и то же*) *эквивалентна* (*в смысле совпадения* Arg) *задаче*

$$\max\ \{(c_0, x) + R_1 (c_1, x)/x \in M\}. \tag{6}$$

Данная лемма является, по существу, переформулировкой леммы 1. Действительно, в силу леммы 1 при $R_1 > \tilde{u}_1$: $\text{Arg}\,(4) = \text{Arg}\max\{(c_0, x) - R_1 [-(c_1, x) + \alpha_1]^+/x \in M\} = \text{Arg}\{(c_0, x) + R_1 (c_1, x)/x \in M\}$; здесь учтено то, что $(c_1, x) \leqslant \alpha_1\ \forall x \in M$.

Замечание. Здесь выбор R_1 зависит от $\tilde{u}_1$, что, в свою очередь, зависит от b. На самом деле назначение весового коэффициента R_1 можно осуществить независимо от реализации вектора правых частей в ограничениях задачи (4). Это будет показано в лемме 3 для более общей ситуации.

Лемма 3. *Пусть задача*

$$\max_p\left\{\begin{bmatrix}(c_{i_k}, x)\\ \vdots \\ (c_{i_1}, x)\\ (c_0, x)\end{bmatrix}/Ax \leqslant b,\quad x \geqslant 0\right\} \tag{7}$$

разрешима. Существует конструктивное правило выбора чисел R_t, $t = 1, \ldots, k$, обеспечивающих эквивалентность (*по совпадению* Arg) *задачи* (7) *задаче*

$$\max\left\{(c_0, x) + \sum_{t=1}^{k} R_t (c_{i_t}, x)/x \in M\right\}, \tag{8}$$

причем выбор параметров $\{R_t\}_1^k$ не зависит от b (здесь $M = \{x \geqslant 0/Ax \leqslant b\}$)

Доказательство. Положим для простоты $p = (k, \dots, 1, 0)$, тогда в (7) и (8) $i_t = t$, $t = 1, \dots, k$. Рассмотрим сначала ситуацию двух функционалов: (c_k, x) и (c_{k-1}, x). Обозначим через $\alpha_k = \alpha_k(b)$ оптимальное значение задачи

$$\max \{(c_k, x)/x \in M\}. \tag{9}$$

Тогда

$$\mathrm{Arg}\,(9) = \{x/(c_k, x) \geqslant \alpha_k, \quad x \in M\}. \tag{10}$$

Запишем задачу

$$\max \{(c_{k-1}, x)/x \in \mathrm{Arg}\,(9)\} \tag{11}$$

и двойственную к ней

$$\min \{(b, u) - v_k\alpha_k/A^T u - v_k c_k \geqslant c_{k-1}, [u, v_k] \geqslant 0\}. \tag{12}$$

В силу леммы 2, положив $\bar{R}_k > \tilde{v}_k$, где $[\tilde{u}, \tilde{v}_k] = \arg$ (12), получим равенство

$$\mathrm{Arg}\,(11) = \mathrm{Arg}\max \{(c_{k-1}, x) + \bar{R}_k (c_k, x)/x \in M\}. \tag{13}$$

Здесь выбор $\bar{R}_k$ определен условием $\bar{R}_k > \tilde{v}_k$. Но этот выбор можно сделать не зависящим ни от b, ни от α_k (α_k зависит от b). Действительно, min в задаче (12) достигается на некоторой вершине, число которых конечно. Если v_k^i — координата по переменной v_k i-й вершины, то какова бы ни была целевая функция в задаче (12), значение координаты v_k в ее оптимальном решении не будет превышать число $\max\limits_{(i)} v_k^i = \bar{v}_k$. Поэтому если выбрать $\bar{R}_k > \bar{v}_k$, то соотношение (13) будет справедливым универсально — в смысле независимости от b и α_k. Таким образом, на случай двух функционалов лемма доказана.

Реализуем шаг, связанный со случаем трех функционалов: (c_k, x), (c_{k-1}, x) и (c_{k-2}, x). Запишем задачу, фигурирующую в правой части равенства (13), в виде

$$\max \{(c_{k-1}, x) + \bar{R}_k (c_k, x)/x \in M\}. \tag{14}$$

Пусть $\alpha_{k-1} = \mathrm{opt}\,(14)$. Тогда задачу

$$\max \{(c_{k-2}, x)/x \in \mathrm{Arg}\,(14)\}$$

можно представить в виде

$$\max \{(c_{k-2}, x)/(c_{k-1}, x) + \bar{R}_k (c_k, x) \geqslant \alpha_{k-1}, x \in M\},$$

при этом она по аналогии с уже рассмотренным этапом эквивалентна (в смысле совпадения Arg) задаче

$$\max \{(c_{k-2}, x) + \bar{R}_{k-1} [(c_{k-1}, x) + \bar{R}_k (c_k, x)]/x \in M\}$$

при выборе $\bar{R}_{k-1}$, не зависящем от b, α_k и α_{k-1}.

Продолжая этот процесс, получаем задачу

$$\max \{(c_0, x) + \bar{R}_1 [(c_1, x) + \dots + \bar{R}_k (c_k, x)] \dots]/x \in M\},$$

эквивалентную (по совпадению Arg) задаче (8), причем $\bar{R}_t$, $t = 1, \dots, k$, не зависит от b, $\alpha_k, \dots, \alpha_1$. Теперь достаточно положить $R_1 = \bar{R}_1$, $R_2 = \bar{R}_1\bar{R}_2, \dots, R_k = \prod\limits_{i=1}^{k} \bar{R}_i$, чтобы получить формулировку леммы 3.

Лемма 4. *При совместности ограничений в задачах L_p и L_q^* необходимым и достаточным условием их разрешимости являются условия*

$$c_{i_t} \in \mathrm{cone}\,\{-c_{i_{t+1}}, \dots, -c_{i_k};\ a_1^T, \dots, a_m^T\} - E_n^+, \quad t = 0, 1, \dots, k; \tag{15}$$

$$b_{i_s} \in \mathrm{cone}\,\{-b_{i_{s+1}}, \dots, -b_{i_l};\ h_1, \dots, h_n\} + E_m^+, \quad s = 0, \dots, l \tag{16}$$

соответственно; здесь a_j — j-я строка, h_i — i-й столбец матрицы A.

Эта лемма легко вытекает из условия разрешимости задачи линейного программирования, представленной, например, в форме $\max\{(c, x)/Ax \leqslant b,\ x \geqslant 0\}$: последняя разрешима тогда и только тогда, когда $c \in \operatorname{cone}\{a_1^T, \dots, a_m^T\} - E_n^+$ (что эквивалентно разрешимости системы неравенств $A^T u \geqslant c,\ u \geqslant 0$) и $M = \{x \geqslant 0/Ax \leqslant b\} \neq \varnothing$.

Замечание. Условия (15) и (16) инвариантны относительно правых частей в системах ограничений задач L_p и L_q^* соответственно; необходимо лишь, чтобы эти системы были совместны.

2. Двойственность для задач L_p и L_q^*. Смысл связей между парой задач L_p и L_q^* и парой $L_{r,R}$ и $L_{r,R}^*$ можно пояснить схемой:

$$\begin{array}{ccc} L_p & \xrightarrow[\sim]{\mathrm{Arg}} & L_{r,R} \\ \downarrow\uparrow & & \downarrow\uparrow \\ L_q^* & \xrightarrow[\sim]{\mathrm{Arg}} & L_{r,R}^* . \end{array}$$

Здесь символ $\xrightarrow[\sim]{\mathrm{Arg}}$ означает переход к скаляризованным задачам с сохранением оптимальных множеств.

Положим

$$L_{ij} : \max\{(c_i, x)/Ax \leqslant b_j,\quad x \geqslant 0\},\quad i = 0, 1, \dots, k;\qquad j = 0, 1, \dots, l.$$

Теорема 1. *Если задачи L_{ij}, $i = 0, \dots, k$, $j = 0, \dots, l$, разрешимы, то существуют конструктивно описываемые непустые области значений $r^T = [r_1, \dots, r_l] \geqslant 0$ и $R^T = [R_1, \dots, R_k] \geqslant 0$ таких, что*

$$\operatorname{Arg} L_p = \operatorname{Arg} L_{r,R},\ \operatorname{Arg} L_q^* = \operatorname{Arg} L_{r,R}^* \tag{17}$$

(задачи $L_{r,R}$ и $L_{r,R}^*$ находятся в классически двойственной взаимосвязи).

Доказательство. Так как, по условию, задачи $\{L_{ij}\}$ разрешимы, то, очевидно, ограничения задач L_p и L_q^* совместны при любых $r \geqslant 0$ и $R \geqslant 0$.

Согласно лемме 3 выбор $R > 0$ и $r > 0$ в задачах

$$\max\left\{(c_0, x) + \sum_{t=1}^{k} R_t (c_{i_t}, x)/Ax \leqslant b(\bar r),\quad x \geqslant 0\right\}, \tag{18}$$

$$\min\left\{(b_0, u) + \sum_{s=1}^{l} r_s (b_{j_s}, u)/A^T u \geqslant c(\bar R),\quad u \geqslant 0\right\}, \tag{19}$$

обеспечивающих соотношения

$$\begin{gathered} \operatorname{Arg} L_p |_{r=\bar r} = \operatorname{Arg}(18), \\ \operatorname{Arg} L_q^* |_{R=\bar R} = \operatorname{Arg}(19), \end{gathered} \tag{20}$$

осуществляется независимо от $\bar r$ и $\bar R$. Поэтому в правых частях (т. е. в ограничениях) задач (18) и (19) можно вместо $\bar r$ и $\bar R$ взять выбранные r и R, что превращает равенства (20) в доказываемые соотношения (17).

Замечание. Условие разрешимости задач $\{L_{ij}\}$ нам потребовалось для того, чтобы гарантировать совместность систем

$$Ax \leqslant b(r),\quad x \geqslant 0;\qquad A^T u \geqslant c(R),\quad u \geqslant 0 \tag{21}$$

при любых $r \geqslant 0$ и $R \geqslant 0$. Условия их совместности можно выразить и в других терминах, а именно: системы (21) совместны при любых $r \geqslant 0$ и $R \geqslant 0$ тогда и только тогда, когда выполняются соответственно импликации

$$A^T u \geqslant 0,\quad u \geqslant 0 \Rightarrow (b_0, u) \geqslant 0\ \&\ B^T u = 0,$$

$$Ax \leqslant 0,\quad x \geqslant 0 \Rightarrow (c_0, x) \leqslant 0\ \&\ C^T x = 0,$$

где $B = [b_1, \dots, b_l]$, $C = [c_1, \dots c_k]$, что легко вытекает из условия Фань-Цзи совместности конечной системы линейных неравенств [2].

3. Интерпретация двойственности для несобственных задач ЛП в терминах лексикографической оптимизации. В работе автора [3] паре взаимно двойственных задач ЛП (не обязательно разрешимых)

$$L: \max_{Ax \leqslant b, x \geqslant 0} (c, x) \text{ и } L^*: \min_{A^T u \geqslant c, u \geqslant 0} (b, u)$$

были поставлены в соответствие задачи

$$P: \max \left\{(c, x) - \sum_{j=1}^{m_0} R_j \| (A_j x - b^j)^+ \|_j / A_0 x \leqslant b^0, \quad x \geqslant 0, \right.$$

$$\left. \| x^i \|_i \leqslant r_i, \quad i = 1, \dots, n_0 \right\},$$

$$P^{\#}: \min \left\{(b, u) + \sum_{i=1}^{n_0} r_i \| (c^i - B_i^T u)^+ \|_i^* / B_0^T u \geqslant c^0, \right.$$

$$\left. u \geqslant 0, \quad \| u^j \|_j^* \leqslant R_j, \quad j = 1, \dots, m_0 \right\},$$

которые использовались в качестве аппроксимирующих для L и L^* и были связаны классической двойственностью. Смысл символов в формулировках задач P и $P^{\#}$ следующий:

$$A = \begin{bmatrix} A_0 \\ \vdots \\ A_{m_0} \end{bmatrix} = [B_0 \dots B_{n_0}],$$

т. е. $\{A_j\}$ и $\{B_i\}$ — произвольные разбиения матрицы A на горизонтальные и вертикальные подматрицы; $\{b^j\}$ и $\{u^j\}$, $\{c^i\}$ и $\{x^i\}$ — соответствующие разбиения векторов b и u, c и x; $\{R_j\}$, $\{r_i\}$ — неотрицательные параметры; $\{\| \cdot \|_j\}_1^{m_0}$ и $\{\| \cdot \|_i\}_1^{n_0}$ — произвольные наборы норм для пространств соответствующей размерности, $\{\| \cdot \|_j^*\}$ и $\{\| \cdot \|_i^*\}$ — сопряженные нормы.

Основная теорема (двойственности), связывающая задачи P и $P^{\#}$, состоит в следующем [3]: если задача P разрешима и удовлетворяет условию регулярности (в любой его форме), то $P^{\#}$ также разрешима и $\operatorname{opt} P = \operatorname{opt} P^{\#}$.

Важным является вопрос об аппроксимационном смысле задач P и $P^{\#}$ по отношению к L и L^*. Ниже этот смысл будет раскрыт через термины лексикографической оптимизации.

Будем считать, что системы ограничений задач L и L^* разбиты на подсистемы $A_j x \leqslant b_j$, $j = 0, 1, \dots, m_0$, и $B_i^T u \geqslant c^i$, $i = 0, 1, \dots, u_0$, причем неравенства из одной подсистемы не ранжируются, а сами подсистемы ранжируются, например, в соответствии с такими упорядочениями: $(0, m_0, \dots \dots, 1)$, $(0, n_0, \dots, 1)$. Введенному упорядочению можно придать следующий смысл: ограничения $A_0 x \leqslant b^0$, $x \geqslant 0$, и $B_0^T u \geqslant c^0$, $n \geqslant 0$, имеют директивный характер и предполагаются совместными, остальные — факультативными (в целом же они могут быть несовместными). Однако в силу введенной упорядоченности подсистем их невязки $f_j(x) = \| (A_j x - b^j)^+ \|_j$, $j = 1, \dots, m_0$, $g_i(u) = \| (c^i - B_i^T u)^+ \|_i^*$, $i = 1, \dots, n_0$, минимизируются последовательно в соответствии с упорядочениями $p = (m_0, \dots, 1)$ и $q = (n_0, \dots, 1)$. Это означает, что решаются две последовательности задач

$$D_{m_0}: \min \{f_{m_0}(x) / A_0 x \leqslant b^0, \ x \geqslant 0, \quad \| x^i \|_i \leqslant r_i, \quad i = 1, \dots, n_0\},$$

$$D_{m_0 - 1}: \min \{f_{m_0 - 1}(x) / x \in \operatorname{Arg}(D_{m_0})\},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$D_1\colon \min\{f_1(x)/x\in \operatorname{Arg}(D_2)\},$$

$$D\colon \boxed{\max\{(c,\ x)/x\in \operatorname{Arg}(D_1)\}}\,,$$

$$H_{n_0}\colon \min\{g_{n_0}(u)/B_0^T u\geqslant c^0,\quad u\geqslant 0,\quad \|u^j\|_j^*\leqslant R_j,\quad j=1,\ldots,m_0\}.$$

$$H_{n_0-1}\colon \min\{g_{n_0-1}(u)/u\in \operatorname{Arg}(H_{n_0})\}.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$H_1\colon \min\{g_1(u)/u\in \operatorname{Arg}(H_2)\},$$

$$H\colon \boxed{\min\{(b,\ u)/u\in \operatorname{Arg}(H_1)\}}\,.$$

Задачи D и H по своему смыслу являются задачами лексикографической оптимизации

$$P_p\colon \max\nolimits_p\left\{\begin{bmatrix}-f_{m_0}(x)\\ \vdots\\ -f_1(x)\\ (c,\ x)\end{bmatrix}/x\in M(r)\right\},$$

$$P_q^{\#}\colon \min\nolimits_q\left\{\begin{bmatrix}g_{n_0}(u)\\ \vdots\\ g_1(u)\\ (b,\ u)\end{bmatrix}/u\in M^{\#}(R)\right\}.$$

Здесь $M(r)$ и $M^{\#}(R)$ — допустимые множества для задач P и $P^{\#}$ соответственно, символы p и q определяют введенную упорядоченность невязок с тем дополнением, что функционалы $(c,\ x)$ и $(b,\ u)$ в этих упорядочениях поставлены на последнее место.

Теорема 2. *Пусть нормы $\{\|\cdot\|_j\}$, $\{\|\cdot\|_i\}$ — монотонны вместе со своими сопряженными и кусочно линейны. Тогда существуют конструктивно определяемые $r\geqslant 0$ и $R\geqslant 0$ такие, что*

$$\operatorname{Arg} P=\operatorname{Arg} P_p\neq\varnothing, \tag{22}$$

$$\operatorname{Arg} P^{\#}=\operatorname{Arg} P_q^{\#}\neq\varnothing, \tag{23}$$

$$\operatorname{opt} P=\operatorname{opt} P^{\#}. \tag{24}$$

Пояснения к доказательству. Соотношение (24) выполняется в силу основной теоремы двойственности для несобственных задач ЛП (она была приведена выше). Что касается соотношений (22) и (23), то суть их доказательств та же, что и теоремы 1. Требуется лишь следующее уточнение. Когда мы определяем $R_{m_0}>\bar u_{m_0}$, где $\bar u_{m_0}\geqslant 0$ — двойственная оценка ограничения

$$f_{m_0}(x)=\|(A_{m_0}x-b^{m_0})^+\|_{m_0}\leqslant \alpha_{m_0}(:=\operatorname{opt}\min\{f_{m_0}(x)/x\in M(r)\}$$

в задаче

$$\min\{f_{m_0-1}(x)/x\in M(r),\ f_{m_0}(x)\leqslant\alpha_{m_0}\}, \tag{25}$$

то существование $\bar u_{m_0}$ должно быть обеспечено условием регулярности для системы ограничений задачи (25). Но это условие выполнено в силу предположения о кусочной линейности всех фигурирующих в задачах P и $P^{\#}$ норм. В этом случае неравенство $f_{m_0}(x)\leqslant\alpha_{m_0}$, а равным образом и неравенства $\|x^i\|_i\leqslant r_i$, $i=1,\ldots,n_0$, могут быть эквивалентным образом записаны в форме систем линейных неравенств. Это обстоятельство и позволяет снять заботы о выполнимости условия регулярности как в задаче (25), т. е. в задаче D_{m_0-1}, так и во всех остальных, которые возникают при доказательстве теоремы в соответствии со схемой обоснования теоремы 1.

4. Лексикографическая двойственность для несобственных задач ЛП при фиксированных упорядочениях (по важности) ограничений. Рассмотрим задачу ЛП в обычной постановке, но с акцентом на упорядочение по важности ограничений как в прямой задаче L, так и в двойственной. Такая постановка определяет однозначный выбор максимально совместных подсистем (МСП) в системах $Ax \leqslant b$, $x \geqslant 0$ и $A^T u \geqslant c$, $u \geqslant 0$, ограничений в задачах

$$L: \max \{(c, x)/Ax \leqslant b, \quad x \geqslant 0\},$$

$$L^*: \min \{(b, u)/A^T u \geqslant c, \quad u \geqslant 0\}.$$

Пусть упорядочения определяются перестановками $(j_1, \dots, j_m)$, $(i_1, \dots \dots, i_n)$, т. е. j_{s+1}-е неравенство в системе $Ax \leqslant b$ «важнее» j_s-го, а i_{t+1}-е неравенство в системе $A^T u \geqslant c$ «важнее» i_t-го $(s = 1, \dots, m-1;\ t = 1, \dots \dots, n-1)$. МСП выбираются путем наращивания числа неравенств начиная с j_m (условие $x \geqslant 0$ включается в МСП автоматически). Чтобы не делать переобозначений в нумерации неравенств, будем искомыми МСП считать

$$(a_{j_s}, x) \leqslant b_{j_s}, \quad x \geqslant 0, \quad s = k+1, \dots, m, \quad (h_{i_t}, u) \geqslant c_{i_t},$$

$$u \geqslant 0, \quad t = l+1, \dots, n.$$

Левые части $(a_{j_s}, x) \leqslant b_{j_s}$, $s = 1, \dots, k$, остальных неравенств системы $Ax \leqslant b$ (равным образом: $(h_{i_t}, u) \geqslant c_{i_t}$, $t = 1, \dots, l$) выступают в качестве минимизируемых (во втором случае — максимизируемых) функций с принятым упорядочением (справа налево). При этом эти списки функций дополняются слева функциями (c, x) и (b, u) соответственно, т. е. последние выступают в качестве замыкающих по важности в отмеченных списках функций.

Положим

$$A_0 = \begin{bmatrix} a_{j_{k+1}} \\ \vdots \\ a_{j_m} \end{bmatrix}, \quad B_0 = [h_{i_{l+1}}, \dots, h_{i_n}], \quad b^0 = \begin{bmatrix} b_{j_{k+1}} \\ \vdots \\ b_{j_m} \end{bmatrix},$$

$$c^0 = \begin{bmatrix} c_{i_{l+1}} \\ \vdots \\ c_{i_n} \end{bmatrix}, \quad C^T = \begin{bmatrix} c^T \\ -a_{j_1} \\ \vdots \\ -a_{j_k} \end{bmatrix}, \quad B = [b, h_{i_1}, \dots, h_{i_l}].$$

В силу разбиения матрицы A на горизонтальные и вертикальные подматрицы будем иметь

$$A = \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \end{bmatrix} = [B_0, B_1].$$

Отмеченному разбиению соответствует $x = \begin{bmatrix} x^0 \\ x^1 \end{bmatrix}$, $u = \begin{bmatrix} u^0 \\ u^1 \end{bmatrix}$.

Положив $p = (0, j_1, \dots, j_k)$, $q = (0, i_1, \dots, i_l)$, можно сформировать следующие задачи лексикографической оптимизации:

$$L_{p,r}: \max\nolimits_p \{C^T x/A_0 x \leqslant b^0, \quad x \geqslant 0, \quad x^1 \leqslant r\},$$

$$L^{\#}_{q,R}: \min\nolimits_q \{B^T u/B_0^T u \geqslant c^0, \quad u \geqslant 0, \quad u^1 \leqslant R\}.$$

В упорядочении p номеру 0 отвечает функция (c, x), в упорядочении q номеру 0 — функция (b, u).

Выпишем для них аналоги задач P и $P^{\#}$:

$$\max \{(c, x) - (A_1 R, x)/A_0 x \leqslant b^0, \quad x \geqslant 0, \quad x^1 \leqslant r\}, \tag{26}$$

$$\min \{(b, u) - (B_1 r, u)/B_0^T u \geqslant C^0, \quad u \geqslant 0, \ u^1 \leqslant R\}. \tag{26'}$$

Теорема 3. *Существуют* $R>0$ *и* $r>0$ *такие, что*

$$\operatorname{Arg} L_{p,r} = \operatorname{Arg}(26) \neq \varnothing, \quad \operatorname{Arg} L^{\#}_{q,R} = \operatorname{Arg}(26)^{\#} \neq \varnothing,$$

при этом

$$\operatorname{opt}(26) + (b^1, R) = \operatorname{opt}(26)^{\#} + (c^1, r),$$

где $c = \begin{bmatrix} c^0 \\ c^1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} b^0 \\ b^1 \end{bmatrix}$ *в соответствии с разбиением матрицы* A *на горизонтальные подматрицы* A_0, A_1 *и вертикальные подматрицы* B_0 *и* B_1.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.

Приведенные результаты можно представить в виде следующей графической схемы:

$$\begin{array}{ccc} L \to L_{p,r} & \xrightarrow[\sim]{\operatorname{Arg}} & (26) \\ (*)\downarrow\uparrow & & (\#)\downarrow\uparrow . \\ L^* \to L^{\#}_{q,R} & \xrightarrow[\sim]{\operatorname{Arg}} & (26)^{\#} \end{array}$$

Замечания. 1°. Если задача L — разрешима, то задачи (26) и (26′) превращаются в задачи L и L^*.

2°. Если L — НЗЛП 3-го рода [3], то подсистемы $A_1 x \leqslant b^1$ и $B_1^T u \geqslant c^1$ систем $Ax \leqslant b$ и $A^T u \geqslant c$ не пусты.

3°. Если L-НЗЛП 1-го рода, т. е. система $Ax \leqslant b$, $x \geqslant 0$, — несовместна, а $A^T u \geqslant c$, $u \geqslant 0$, — совместна, то задачи $L^{\#}_{q,R}$ и (26′) принимают одинаковый вид

$$\min\{(b, u)/A^T u \geqslant c, \quad u \geqslant 0, \quad u^1 \leqslant R\}.$$

4°. Если L — НЗЛП 2-го рода, т. е. система $Ax \leqslant b$, $x \geqslant 0$, — совместна, $A^T u \geqslant c$, $u \geqslant 0$, — несовместна, то задачи $L_{p,r}$ и (26) принимают одинаковый вид

$$\max\{(c, x)/Ax \leqslant b, \ x \geqslant 0, \ x^1 \leqslant r\}.$$

1. *Еремин И. И., Астафьев Н. Н.* Введение в теорию линейного и выпуклого программирования.— М. : Наука, 1976.— 192 с.
2. *Черников С. Н.* Линейные неравенства.— М. : Наука, 1968.— 488 с.
3. *Еремин И. И.* Двойственность для несобственных задачах линейного и выпуклого программирования // Докл. АН СССР.— 1981.— **256**, № 2.— С. 272—276.

Получено 20.11.90