УДК 512.54

В. П. Шунков, д-р физ.-мат. наук
(ВЦ СО АН России, Красноярск)

Об одном достаточном признаке существования 2-полной части в группе

Получен достаточный признак существования 2-полной части в группе.

Одержано достатню ознаку існування 2-повної частини в групі.

В настоящей работе изучается группа G с инволюцией i, удовлетворяющая следующим условиям: 1) гр (i, i^g), $g \in G$, конечны; 2) в G нормализатор любой конечной подгруппы, содержащей инволюцию i, имеет конечную периодическую часть. Доказано, что в этом случае группа G имеет 2-полную часть.

Благодаря теореме, доказанной в настоящей статье, изучение группы G с инволюцией i, удовлетворяющей условиям 1, 2, фактически свелось к рассмотрению случая, когда силовские 2-подгруппы из G, содержащие инволюцию i, конечны и сопряжены. Класс групп с инволюциями, удовлетворяющих условиям 1, 2 теоремы, оказался весьма содержательным (см. примеры 4, 5), а поэтому доказанная здесь теорема будет играть важную роль в разработке теории таких групп. В данной работе будем придерживаться в основном стандартных обозначений [1, 2].

1. Основной результат, примеры. Теорема. *Пусть G — группа с инволюциями, i — ее некоторая инволюция, удовлетворяющие следующим условиям:*

1) *подгруппы вида* гр (i, i^g), $g \in G$, *конечны*;

2) *в G нормализатор любой конечной подгруппы, содержащей инволюцию i, имеет конечную периодическую часть.*

Тогда в G существует такая полная абелева 2-подгруппа A, не обязательно отличная от единичной подгруппы, что $A \lhd G$ и в фактор-группе G/A силовские 2-подгруппы, содержащие инволюцию iA, конечны и сопряжены, причем G/A и ее инволюция iA удовлетворяют условиям 1, 2.

Приведем ряд примеров групп, с помощью которых покажем, какие группы могут удовлетворять всем условиям теоремы, а также докажем независимость условий 1, 2.

Примеры 1. В бесконечной группе диэдра для любой ее инволюции выполняется условие 2, но не выполняется условие 1.

2. В бесконечной группе типа $PSL(2, K)$ над локально конечным полем K для любой ее инволюции выполняется условие 1, но не выполняется условие 2.

3. Группа вида $H = A \leftthreetimes (k)$ и ее инволюция k, где A-квазициклическая 2-подгруппа и $k^{-1}bk = b^{-1}$, $b \in A$, удовлетворяют всем условиям теоремы и H обладает бесконечной нормальной полной абелевой 2-подгруппой A.

4. Пусть $Q =$ гр (b, c), где $b^n = c^n = d$,— группа без кручения и $Q/(d)$ — свободная бернсайдовская группа нечетного периода $n \geqslant 665$ [3]. Рассмотрим группу $B = Q \wr (x) = (Q \times Q) \leftthreetimes (x)$, где x — инволюция. Возьмем из $Q \times Q$ элемент $v = (d, d^{-1})$. Очевидно, $v \in Z(Q \times Q)$ и $v^x = v^{-1}$. Нетрудно показать, опираясь на абстрактные свойства группы Q [3], что группа $V = B/(v)$ и ее инволюция $t = x(v)$ удовлетворяют всем условиям теоремы, причем силовские 2-подгруппы из V конечны и V не имеет периодической части.

5. Пусть $G = H \times V$, где $H = A \leftthreetimes (k)$, V — группы из примеров 3, 4 соответственно. Очевидно, $i=(k, t)$, где $t = x(v)$,— инволюция и пара (G, i) удовлетворяет всем условиям теоремы, причем G имеет бесконечную 2-полную часть A и фактор-группа G/A не имеет периодической части.

6. Покажем, что условие 2 из теоремы нельзя ослабить до условия 2′: $C_G(i)$ имеет конечную периодическую часть.

Пусть D — бесконечная группа диэдра вида $D = (b) \rightthreetimes (x)$, где $|b| = \infty$, $|x| = 2$ и $x^{-1}bx = b^{-1}$. Далее, пусть T — группа диэдра 8-го порядка. Группу T представим в виде $T = R \rightthreetimes (t)$, где $R = (i) \times (v)$ — элементарная абелева подгруппа 4-го порядка, t — инволюция и $t^{-1}it = v$. В прямом произведении $T \times D$ возьмем подгруппу $M = (R \times (b)) \rightthreetimes (k)$, где $k = tx$. Очевидно, $C_M(i)$ имеет конечную периодическую часть и выполняется условие 1, т. е. подгруппы вида гр (i, i^g), $g \in M$, конечны. Однако силовские 2-подгруппы из M, содержащие инволюцию i, конечны, но не сопряжены, т. е. для M заключение теоремы неверно.

2. Известные результаты и определения, необходимые в доказательстве теоремы. 1 [1]. *Всякая почти абелевая группа с условием минимальности называется черниковской группой.*

2 [4]. *Всякая 2-группа, в которой централизатор некоторой конечной подгруппы является черниковской (в частности, конечной) подгруппой, есть черниковская группа.*

3 [5]. *В черниковской группе пересечение подгрупп конечных индексов является полной абелевой подгруппой конечного индекса, не обязательно отличной от единичной подгруппы. Это пересечение называется полной частью черниковской группы, и оно есть либо единичная подгруппа, либо прямое произведение конечного числа квазициклических групп.*

4 [5]. *В черниковской группе V силовские p-подгруппы сопряжены для любого P из $\pi(V)$.*

5 [5]. *Пусть V — бесконечная черниковская группа, $\tilde{V}$ — ее полная часть и Q_p — силовская p-подгруппа из $\tilde{V}$, $p \in \pi(\tilde{V})$. Тогда Q_p есть объединение строго возрастающей цепочки конечных автоморфно допустимых подгрупп из V:*

$$Z_1 < Z_2 < \ldots < Z_n < \ldots$$

где Z_n — подгруппа, порожденная всеми элементами из Q_p, порядки которых не превышают числа p^n, $n = 1, 2, \ldots$

6 [4]. Лемма Фраттини. *Пусть G — группа, H — ее нормальная подгруппа, Q_p — силовская p-подгруппа для некоторого p из $\pi(G)$ и силовские p-подгруппы из H сопряжены в H. Тогда $G = N_G(Q_p)H$.*

7 [6]. *Пусть $G =$ гр (i, k), где i, k — инволюции. Тогда:*

1) $G = (c) \rightthreetimes (i) = (c) \rightthreetimes (k)$, *где* $c = i_k$;

2) $i^{-1}ci = ici = c^{-1}$, $k^{-1}ck = kck = c^{-1}$;

3) i, ic^{2m} *(или* k, kc^{2m}*) сопряжены в G, где m — целое число;*

4) *если c — элемент конечного нечетного порядка, то i и k сопряжены в G;*

5) *если c — элемент четного порядка и t — инволюция из (c), то либо G — элементарная абелева группа 4-го порядка, либо $Z(G) = (t)$.*

8 [7]. *Говорят, что группа G имеет полную часть $\tilde{G}$, если все полные абелевы подгруппы из G порождают полную абелеву подгруппу $\tilde{G}$ и в $G/\tilde{G}$ нет полных абелевых подгрупп, отличных от единичной подгруппы.*

9 [4]. *Пусть G — группа, i — ее инволюция с конечным $C_G(i)$, удовлетворяющие, по крайней мере, одному из следующих условий:*

1) *G — периодическая группа;*

2) *подгруппы вида* гр (i, i^g), $g \in G$, *конечны.*

Тогда группа G локально конечна и имеет полную часть.

10 [8]. Теорема Шура. *Если центр группы имеет в ней конечный индекс, то ее коммутант конечен.*

11 [5, 7]. *Говорят, что группа имеет периодическую часть, если в ней все элементы конечных порядков порождают периодическую подгруппу.*

12 [9]. Лемма Неймана. *Пусть G — группа, $\{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ — конечный набор ее подгрупп. Если*

$$G = g_1H_1 \cup g_2H_2 \cup \ldots \cup g_nH,$$

то, по крайней мере, одна из подгрупп вида H_m, $m = 1, 2, \ldots, n$, имеет конечный индекс в G.

13 [4]. *Пусть* G — *черниковская 2-группа вида* $G = V \rightthreetimes (i)$, *где* V — *полная часть*, i — *инволюция с конечным* $C_G(i)$. *Тогда справедливы утверждения*:

1) $i^{-1}bi = ibi = b^{-1}$ *для любого элемента* b *из* V;

2) *инволюции* i, hi, $h \in V$, *сопряжены в* G.

14 [1, 2]. *Пусть* G — *группа*, P — *конечная* p-*подгруппа из* G, V — *локально конечная* p'-*подгруппа из* G *и* $V \lhd G$. *Тогда в* $\overline{G} = G/V$ *справедливы равенства*

$$N_{\overline{G}}(PV/V) = N_G(P)V/V, \quad C_{\overline{G}}(PV/V) = C_G(P)V/V.$$

15 [7, 8]. Лемма Дицмана. *Конечное инвариантное множество элементов конечных порядков в произвольной группе порождает конечную нормальную подгруппу.*

16 [10]. *Пусть* V — *конечная группа вида* $V = B \rightthreetimes (i)$, *где* i — *инволюция и* $B \cap C_V(i) = 1$. *Тогда* B — *абелева группа нечетного порядка и* $ibi = b^{-1}$, $b \in B$.

17 [1]. *В конечной* p-*группе любая собственная подгруппа отлична от своего нормализатора.*

3. Доказательство теоремы. Замечание 1. В настоящем пункте под символами G, i подразумевается группа G и ее инволюция i, удовлетворяющие условиям 1, 2 теоремы.

Пусть S — некоторая силовская 2-подгруппа из G, содержащая инволюцию i.

Лемма 1. S — *черниковская подгруппа.*

Доказательство. По замечанию 1 $C_S(i)$ конечен и по предложению 2 S — черниковская подгруппа. Лемма доказана.

По только что доказанной лемме S — черниковская группа и ввиду определений 1, 3 S имеет полную часть $\tilde{S}$, удовлетворяющую условию минимальности и с конечным $|S:\tilde{S}|$. Так как $\tilde{S} \lhd S$, то $S < H = N_G(S)$. В дальнейших рассуждениях под символами S, $\tilde{S}$, H будут подразумеваться подгруппы, определенные выше.

Лемма 2. *Справедливы утверждения*:

1) *если* $C_G(i)$ *конечен, то* $\tilde{S} \lhd G$ *и в фактор-группе* $G/\tilde{S}$ *силовские 2-подгруппы конечны и сопряжены*;

2) *если* V — *локально конечная нормальная подгруппа из* G, *являющаяся расширением полной абелевой 2-группы* F *с помощью группы без инволюций, то для пары* $(G/V, iV)$ *выполняются условия* 1, 2 *теоремы.*

Доказательство. По замечанию 1 и предложению 9 $\tilde{S} \lhd G$ и $G/\tilde{S}$ — локально конечная группа. А так как $|S:\tilde{S}|$ конечен и S — силовская 2-подгруппа из G, то, используя теорему Силова [1], легко докажем конечность и сопряженность силовских 2-подгрупп из $G/\tilde{S}$. Утверждение 1 доказано. Введем обозначения: $\overline{G} = G/V$, $\bar{i} = iV$, $\overline{B} = N_{\overline{G}}(\overline{Q})$, где $\overline{Q}$ — конечная подгруппа из $\overline{G}$ и $\bar{i} \in \overline{Q}$, B — полный прообраз подгруппы $N_{\overline{G}}(\overline{Q})$ в G, Q — полный прообраз подгруппы $\overline{Q}$ в G, $\overline{P}$ — силовская 2-подгруппа из $\overline{Q}$ и $\bar{i} \in \overline{P}$, P — прообраз подгруппы $\overline{P}$ в Q, являющийся силовской 2-подгруппой в Q, и $i \in P$. Если бы для пары $(\overline{G}, \bar{i})$ не выполнялось условие 2 теоремы, т. е. подгруппа $\overline{B} = N_{\overline{G}}(\overline{Q})$ не имела бы конечной периодической части, то, очевидно, ввиду представления $\overline{B} = N_{\overline{B}}(\overline{P})$, $\overline{Q}$ (предложение 6 и теорема Силова [1]) подгруппа $N_{\overline{B}}(\overline{P})$ также не имела бы конечной периодической части. Но тогда, возвращаясь к прообразам B, Q, P и имея в виду $Q \lhd B$, условия леммы и предложение 6, легко докажем сопряженность силовских 2-подгрупп из Q и $B = N_B(P)Q$, причем X/Z, где $X = N_B(P)$, $Z = N_B(P) \cap Q$, не имеет конечной периодической части. По лемме 1 P — черниковская группа и, очевидно, F — ее полная часть, $F \lhd X$. Отсюда и из $C_P(F) \lhd X$ вытекает $C_P(F) = FL$, где L — конечная подгруппа из $C_P(F)$ и $L \lhd X$. Очевидно, для пары $(X/L, iL)$ выполняются условия 1, 2 теоремы, а поэтому, не нарушая общности рассуждений, будем предполагать, что $L = 1$, т. е. $C_p(F) = F$. В этом случае, использовав предложения 6, 13, представим подгруппу X в виде $X = ZC_X(i)$. А так как по условию 2 теоремы $C_X(i)$ имеет конечную периодическую часть, то, очевидно, это же свойство имеет и фактор-группа X/Z вопреки доказанному выше. Следовательно, для пары $(G/V, iV)$ выполняется условие 2 теоремы и, кроме этого, очевидно, подгруппы вида гр $(iV, (iV)^g)$, $g \in G/V$, конечны. Утверждение 2 доказано. Лемма доказана.

В силу леммы 2 в последующих леммах будем предполагать, что $C_G(i)$ бесконечен.

Лемма 3. $C_G(i) < H$.

Доказательство. Опираясь на предложение 5, представим $\tilde{S}$, как объединение конечных подгрупп ряда:

$$R_1 < R_2 < \ldots < R_n < R_{n+1} < \ldots , \tag{1}$$

где R_{n+1}/R_n — нижний слой фактор-группы $\tilde{S}/R_n$, $n = 1, 2, \ldots$. По предложению 13 $R_1 < C_G(i)$ и ввиду замечания 1 $X_1 = C_G(R_1) \cap C_G(i)$ имеет конечный индекс в $C_G(i)$. Введем обозначения: $V_1 =$ гр $(\tilde{S}, X_1)$, $\bar{V}_1 = V_1/R_1$, $\bar{X}_1 = X_1R_1/R_1$, $A_1 = \tilde{S}/R_1$, $i_1 = iR_1$, $\bar{R}_2 = R_2/R_1$. Очевидно, пара $(\bar{V}_1, i_1)$ удовлетворяет условиям 1, 2 доказываемой теоремы, т. е. подгруппы вида гр (i_1, i_1^g), $g \in \bar{V}_1$, конечны и в $\bar{V}_1$ нормализатор любой конечной подгруппы, содержащей инволюцию i_1, имеет конечную периодическую часть. Отсюда и из предложения 13 вытекает, что $\bar{R}_2 < C_{\bar{V}_1}(i_1)$ и $|C_{\bar{V}_1}(i_1) : N_{\bar{V}_1} \times (\bar{R}_2) \cap C_{\bar{V}_1}(i_1)|$ конечен, в частности, $|\bar{X}_1 : \bar{X}_1 \cap N_{\bar{V}_1}(\bar{R}_2)|$ также конечен. Далее, возвращаясь к прообразам в G, легко докажем конечность индекса $X_2 = C_G(R_2) \cap X_1$ в X_1 и, значит, в $C_G(i)$. Относительно пары (R_3, X_2) рассуждаем аналогично и т. д. В результате построим убывающий ряд подгрупп из $C_G(i)$:

$$X_1 \geqslant X_2 \geqslant \ldots \geqslant X_n \geqslant X_{n+1} \geqslant \ldots ,$$

где $X_{n+1} = C_G(R_{n+1}) \cap X_n$, $X_1 = C_G(R_1) \cap C_G(i)$ и $|C_G(i) : X_n|$ конечен, $n = 1, 2, \ldots$

Предположим, что $C_G(i) \nless H$ и пусть t — некоторый элемент из $C_G(i) \setminus H$. Рассмотрим подгруппу $\tilde{S}^t$. Она является объединением ряда (1). Построим в $C_G(i)$ убывающий ряд подгрупп:

$$E_1 \geqslant E_2 \geqslant \ldots \geqslant E_n \geqslant \ldots ,$$

где $E_1 = C_G(R_1^t) \cap C_G(i)$, $E_{n+1} = E_n \cap C_G(R_{n+1}^t)$ и $|C_G(i) : E_n|$ конечен, $n = 1, 2, \ldots$. Далее, согласно теореме Пуанкаре [1] и ввиду конечности индексов

$$|C_G(i) : X_n|, \quad |C_G(i) : E_n|, \quad n = 1, 2, \ldots ,$$

подгруппы вида $D_n = X_n \cap E_n$, $n = 1, 2, \ldots$, имеют конечные индексы в $C_G(i)$ и $M_n =$ гр $(R_n, R_n^t, i) < C_G(D_n)$, $n = 1, 2, \ldots$ Очевидно, $Z_n = D_n \cap M_n \leqslant Z(M_n)$ и $|C_{M_n}(i) : Z_n|$ конечен, $n = 1, 2, \ldots$. Пусть $\bar{M}_n = M_n/Z_n$, $i_n = iZ_n$. Используя замечание 1, легко докажем конечность подгрупп гр (i_n, i_n^g), $C_{\bar{M}_n}(i_n)$, $g \in \bar{M}_n$, $n = 1, 2, \ldots$ По предложению 9 подгруппы вида $\bar{M}_n$, $n = 1, 2, \ldots$, локально конечны, а так как $M_n =$ гр (R_n, R_n^t, i), $n = 1, 2, \ldots$, где R_n, R_n^t — конечные подгруппы, то все подгруппы вида $\bar{M}_n$, $n = 1, 2, \ldots$, конечны. Но тогда, очевидно, конечными будут и подгруппы вида M_n, $n = 1, 2, \ldots$ (предложение 10). Следовательно, подгруппа $M =$ гр $(\tilde{S}, \tilde{S}^t, i)$, являющаяся объединением конечных подгрупп

$$M_1 < M_2 < \ldots < M_n < \ldots ,$$

локально конечна. Очевидно, $\tilde{S}$, $\tilde{S}^t$ — максимальные полные абелевы 2-подгруппы и, кроме этого, $C_M(i)$ конечен. Отсюда, опираясь на предложение 9, заключаем, что $\tilde{S} = \tilde{S}^t$ и $t \in N_G(\tilde{S}) = H$ вопреки выбору элемента t из $C_G(i) \setminus H$. Следовательно, $C_G(i) < N_G(\tilde{S}) = H$ и лемма доказана.

Лемма 4. *Если некоторая силовская 2-подгруппа Q из G конечна и $i \in Q$, то все силовские 2-подгруппы из G, содержащие инволюцию i, конечны и сопряжены в G.*

Доказательство. Предположим, что лемма неверна, т. е. существует в G силовская 2-подгруппа V, содержащая инволюцию i, но не сопряженная с Q в G. В множестве всех подгрупп, сопряженных с V в G, выделим следующее множество: $\mathfrak{H} = \{V^x \mid$ пересечение $Q \cap V^x$ имеет инволюцию, сопряженную с i в $G\}$. Очевидно, $V \in \mathfrak{H}$ и, не нарушая общности рассуждений, будем считать, что

$$|Q \cap V| \geqslant |Q \cap B|, \quad B \in \mathfrak{H}$$

(по условию леммы Q — конечная подгруппа). Так как по предположению Q и V не сопряжены в G, то $D_1 = Q \cap V \neq Q$, V и ввиду леммы 1 и предложения 15 $A_1 = N_G(D_1) \cap Q \neq D_1$, $B_1 = N_G(D_1) \cap V \neq D_1$. Далее, $i \in D_1$ и по замечанию 1 $N_G(D_1)$ имеет конечную периодическую часть L и A_1, $B_1 \leqslant P_1$. Пусть P_1 — силовская 2-подгруппа из L и $A_1 \leqslant P_1$. По теореме Силова [1] $B_1^t \leqslant P_1$ для некоторого элемента t из L. Очевидно, $D_1 \leqslant A_1 \cap B_1^t$ и $D_1 \neq A_1$, $D_1 \neq B_1^t$. Подгруппа P_1 содержится в некоторой силовской 2-подгруппе V_1 из G и $A_1 \leqslant D_2 = Q \cap V_1$. А так как $D_1 < A_1$ и $D_1 \neq A_1$, то $D_1 < D_2$ и $D_1 \neq D_2$. Если бы Q и V_1 были сопряжены G, т. е. $V_1^c = Q$, то $D_1^c < B_1^{tc} \leqslant Q \cap V^{tc}$ и $|D_1| < |Q \cap V^{tc}|$. Очевидно, $V^{tc} \in \mathfrak{H}$ и последнее неравенство противоречило бы выбору подгруппы V из $\mathfrak{H}$. Следовательно, подгруппы Q, V_1 не сопряжены в G. Теперь, рассуждая относительно тройки $(Q, V_1, N_G(D_2))$ точно так же, как и при рассмотрении тройки $(Q, V, N_G(D_1))$, докажем существование в G силовской 2-подгруппы V_2 такой, что $D_3 = Q \cap V_2 \neq D_2$ и $D_1 < D_2 < D_3$. Рассуждая таким образом, построим в Q строго возрастающую цепочку подгрупп

$$D_1 < D_2 < \ldots < D_m < \ldots,$$

которая не обрывается на конечном номере. Однако это невозможно, так как Q — конечная подгруппа. Полученное противоречие означает, что подгруппы Q и V сопряжены в G и лемма доказана.

Лемма 5. *Если Q — силовская 2-подгруппа из G и $i \in Q$, то $Q < H$ и S, Q сопряжены в H.*

Доказательство. По лемме 1 Q — черниковская группа и по предложению 3 Q имеет полную часть $\tilde{Q}$ с конечным $|Q : \tilde{Q}|$. Если одна из подгрупп $\tilde{S}$, $\tilde{Q}$ тривиальна, то утверждение леммы вытекает из леммы 4. Пусть $\tilde{S} \neq 1$, $\tilde{Q} \neq 1$. По предложению 5 $\tilde{S}$ является объединением цепочки конечных подгрупп

$$R_1 < R_2 < \ldots < R_n < \ldots,$$

а подгруппа $\tilde{Q}$ — объединением цепочки конечных подгрупп

$$V_1 < V_2 < \ldots < V_n < \ldots,$$

где R_{n+1}/R_n, V_{n+1}/V_n — нижние слои подгрупп $\tilde{S}/R_n$, $\tilde{Q}/V_n$ соответственно, $n = 1, 2, \ldots$ Далее, по лемме 3 $C_G(i) < N_G(\tilde{Q}) \cap N_G(\tilde{S})$. А так как R_n, V_n — конечные автоморфно допустимые подгруппы в $\tilde{S}$, $\tilde{Q}$ соответственно, то $C_G(i)$ имеет подгруппу D_n такую, что $|C_G(i) : D_n|$ конечен и гр $(R_n, V_n, i) < C_G(D_n)$, $n = 1, 2, \ldots$ Дальнейший ход рассуждений такой же, как и в доказательстве леммы 3, и в итоге получаем равенство $\tilde{S} = \tilde{Q}$ и, в частности, $Q < N_G(\tilde{Q}) = N_G(\tilde{S}) = H$. По лемме 2 в $H/\tilde{S}$ для инволюции

i $\tilde{S}$ выполняются условия замечания 1 и, очевидно, $S/\tilde{S}$, $Q/\tilde{S}$ (по доказанному выше $\tilde{Q}=\tilde{S}$) — конечные силовские подгруппы из $H/\tilde{S}$. Отсюда и из леммы 4 вытекает сопряженность подгрупп $S/\tilde{S}$, $Q/\tilde{S}$ в $H/\tilde{S}$ и, значит, сопряженность S, Q в H. Лемма доказана.

Используя определение 3, замечание 1 и леммы 1, 2, 5, будем доказывать теорему с помощью метода индукции по трем параметрам. Этими параметрами являются следующие числа: ранг полной части $\tilde{S}$, конечный индекс $|S:\tilde{S}|$ и порядок периодической части из $C_G(i)$. Если ранг $r(\tilde{S})$ подгруппы $\tilde{S}$ равен нулю, т. е. S — конечная подгруппа, то в этом случае заключение доказываемой теоремы справедливо (лемма 4). Пусть $r(\tilde{S})>0$ и предположим, что теорема неверна. Далее, в множестве всех контрпримеров к этой теореме выберем подмножество контрпримеров с наименьшим $r(\tilde{S})$, а в этом множестве — подмножество контрпримеров с наименьшим $|S:\tilde{S}|$ и в нем — группу G, в которой $C_G(i)$ имеет наименьшую конечную периодическую часть ϖ среди всех групп этого подмножества.

Лемма 6. *Пусть U — подгруппа из G, Q — силовская 2-подгруппа из U и $i\in Q$, Z — периодическая часть из $C_U(i)$ и $L(U)$ — локально конечный радикал из U. Если для U неверно заключение доказываемой теоремы, то справедливы следующие утверждения:*

1) $Z=W$, *где W — периодическая часть из $C_G(i)$;*

2) $\tilde{S}<Q$, $|Q:\tilde{S}|<\infty$ *и Q, S сопряжены в H;*

3) $L(U)=P\times B$, *где P — конечная подгруппа из $\tilde{S}$, $B\cap C_U(i)=1$ и B — абелева подгруппа без инволюций;*

4) $\bar{U}=U/L(U)$ — *контрпример-группа с соответствующей инволюцией $\bar{i}=iL(U)$, $\bar{Q}=QL(U)/L(U)$ — силовская 2-подгруппа с полной частью $\tilde{\bar{Q}}=\tilde{S}L(U)/L(U)$ из $\bar{U}$ и $r(\tilde{\bar{Q}})=r(\tilde{S})$, $|\bar{Q}:\tilde{\bar{Q}}|=|S:\tilde{S}|$, $|W|=|M|$, где M — периодическая часть из $C_{\bar{U}}(\bar{i})$.*

Доказательство. Пусть X — силовская 2-подгруппа из G и $i\in Q\leqslant X$. Согласно лемме 5 $X<H$ и S, X сопряжены в H, причем $\tilde{X}=\tilde{S}$ — полная часть подгруппы X. Следовательно, Q — черниковская группа и $\tilde{Q}\leqslant\tilde{S}$, где $\tilde{Q}$ — полная часть подгруппы Q. Если бы $r(\tilde{Q})<r(\tilde{S})$, то ввиду выбора группы G, как контрпримера к доказываемой теореме, $\tilde{Q}\lhd U$ вопреки условиям леммы. Следовательно, $r(\tilde{Q})=r(\tilde{S})$ и $\tilde{Q}=\tilde{S}$. Аналогично доказывается, что $|S:\tilde{S}|=|Q:\tilde{Q}|$ и $Z=W$. Утверждения 1, 2 доказаны.

Пусть P — силовская 2-подгруппа из $L(U)$ и $i\in N_U(P)$. По предложению 9 $L(U)$ имеет 2-полную часть $\tilde{P}$ и согласно лемме 1 P — черниковская подгруппа, причем $\tilde{P}<P$ и $|P:\tilde{P}|$ конечен. Так как $L(U)\lhd U$ и $\tilde{P}$ — автоморфно допустимая подгруппа из $L(U)$, то $\tilde{P}\lhd U$. Очевидно, $\tilde{P}<Q$ и по доказанному выше $\tilde{P}\leqslant\tilde{Q}=\tilde{S}$. Далее, по лемме 2 фактор-группа $U/\tilde{P}$ и ее инволюция $i\tilde{P}$ удовлетворяют условиям доказываемой теоремы. Если бы $\tilde{P}\neq 1$, то ввиду выбора контрпримера-группы G, как группы с наименьшим $r(\tilde{S})$, доказали бы, что $\tilde{S}=\tilde{Q}\lhd U$ вопреки условиям леммы. Следовательно, $\tilde{P}=1$ и P — конечная 2-подгруппа из $L(U)$. Далее, применив предложение 9 к подгруппе $T=\text{гр}(L(U), \tilde{S}\leftthreetimes(i))$, докажем, что $\tilde{Q}=\tilde{S}\lhd T$ и $L(U)<N_U(\tilde{Q})$. А так как по доказанному выше $\tilde{Q}\lhd N_U(P)$ и $U=N_U(P)\,L(U)$, то $\tilde{S}=\tilde{Q}\lhd U$ вопреки условиям леммы. Следовательно, $P<\tilde{Q}=\tilde{S}$ и, как доказано выше, $L(U)<N_U(\tilde{Q})$. Но тог-

да, очевидно, $L(U) = P \times B$, где B — группа без инволюций. Отсюда, из леммы 2 и предложений 13, 16, 17, очевидно, вытекает, что для группы $\overline{U} = U/L(U)$ и ее инволюции $\overline{i} = iL(U)$ выполняются условия доказываемой теоремы и $|M| \leqslant |W|$, где M — периодическая часть $C_{\overline{U}}(\bar{i})$. В частности, доказано утверждение 3. Далее, применяя утверждение 3, легко докажем, что $r(\bar{\tilde{Q}}) = r(\tilde{S})$ и $|\bar{Q} : \bar{\tilde{Q}}| = |S : \tilde{S}|$. Как доказано выше, для пары $(\overline{U}, \bar{i})$ выполняются условия доказываемой леммы и $|M| \leqslant |W|$. Если бы $|M| < |W|$, то мы получили бы противоречие с условиями леммы и выбором группы G, как контрпримера-группы к доказываемой теореме и с наименьшим $|W|$. Следовательно, $|M| = |W|$ и лемма доказана.

Замечание 2. Опираясь на лемму 6, в дальнейших рассуждениях будем предполагать, что $L(G) = 1$.

Лемма 7. *Если t — инволюция из $C_G(i)$, $t \notin \tilde{S}$, и пересечение $C_G(t) \cap \cap \tilde{S}$ бесконечно, то $C_G(t) \leqslant H$.*

Доказательство. Пусть $T = C_G(t)$ и $P = S \cap T$. Включим P в некоторую силовскую 2-подгруппу Q из T. Так как $i \in P \leqslant Q$, то по лемме 5 $Q < H$ и Q содержится в силовской 2-подгруппе из H, сопряженной в H с подгруппой S, а поэтому Q — черниковская подгруппа и $\tilde{Q} \leqslant \leqslant \tilde{S}$, где $\tilde{Q}$ — полная часть подгруппы Q. Но тогда $t \notin \tilde{Q}$ и по лемме 6 $\tilde{Q} \lhd T$. А так как по условиям леммы $\tilde{Q}$ — бесконечная группа и по доказанному выше $\tilde{Q} \leqslant \tilde{S}$, то ввиду леммы 6 $\tilde{S} \lhd N_G(\tilde{Q})$ и $C_G(t) = T \leqslant \leqslant N_G(\tilde{Q}) \leqslant N_G(\tilde{S}) = H$. Лемма доказана.

Лемма 8. *Если $g^{-1} i g \in H$, то $g \in H$.*

Доказательство. Действительно, из леммы 5 и $g^{-1} ig \in N_G(\tilde{S})$ вытекает $\tilde{S} < H^g = N_G(\tilde{S}^g)$ и $\tilde{S} \leqslant \tilde{S}^g$. А так как $r(\tilde{S}) = r(\tilde{S}^g)$ и $r(\tilde{S})$ — конечное число, то, очевидно, $\tilde{S} = \tilde{S}^g$ и $g \in N_G(\tilde{S}) = H$. Лемма доказана.

По доказанному выше $\tilde{S}$ — абелева подгруппа и удовлетворяет условию минимальности. Но тогда по предложению 5 множество всех инволюций из $\tilde{S}$ конечно и пусть $v_1, v_2, \ldots, v_m$ — все инволюции из $\tilde{S}$. Введем ряд подгрупп

$$T_1 = C_G(v_1), \ldots, T_m = C_G(v_m)$$

и множество

$$\mathfrak{G} = \{HT_1H, \ldots, HT_mH\},$$

где $HT_kH = \{htr \mid h, r \in H, t \in T_k\}$, $k = 1, 2, \ldots, m$, и m — конечное число. Очевидно, $\mathfrak{G}$ есть также объединение конечного числа смежных классов по подгруппам из конечного набора $\{T_1, T_2, \ldots, T_m\}$.

Лемма 9. *Множество $G \setminus \mathfrak{G}$ непусто и любой элемент g из $G \setminus \mathfrak{G}$ имеет представление $g = hc$, где $h \in C_G(i)$, c — элемент конечного нечетного порядка из $G \setminus \mathfrak{G}$ и $ici = c^{-1}$.*

Доказательство. Если $G = \mathfrak{G}$, то ввиду определения множества $\mathfrak{G}$ группа G представлялась бы как объединение конечного числа смежных классов по подгруппам из множества $\{T_1, T_2, \ldots, T_m\}$ и по предложению 12 для некоторого номера q индекс $|G : T_q|$ был бы конечным. А так как $T_q = C_G(v_q)$, где v_q — инволюция, то ввиду предложения 16 $v_q \in L(G)$ — локально конечному радикалу группы G вопреки замечанию 2. Следовательно, $G \setminus \mathfrak{G}$ непусто и пусть g — элемент из $G \setminus \mathfrak{G}$. По замечанию 1 $L = \text{гр}\,(i, i^g)$ — конечная подгруппа. Если элемент ii^g имеет нечетный порядок, то $i = i^{gc^{-1}}$, где $c \in (ii^g)$ (свойства групп диэдра), и $gc^{-1} = h \in C_G(i)$, $g = hc$, (c — элемент конечного нечетного порядка и $ici = c^{-1}$). Если бы $c = h^{-1}g \in \mathfrak{G}$, то ввиду леммы 3 и определения множества $\mathfrak{G}$ получили бы $hc = g \in \mathfrak{G}$ вопреки выбору элемента g из $G \setminus \mathfrak{G}$. Следовательно, $c \in G \setminus \mathfrak{G}$ и в случае, когда $|ii^g|$ конечен и нечетен, лемма доказана. Предположим, что ii^g — элемент четного порядка и t — инволюция из (ii^g). По свойствам групп диэдра (предложение 7) $t \in C_G(i)$ и инволюции i, $k = it$ сопряжены в L. Далее, по лемме 3 $k, t \in C_G(i) < H$. А так как i, k сопряжены в G, то $C_G(k)$ имеет конечную периодическую часть и по предложению 13 $t = ik \in C_G(\tilde{S}) < H$. Если бы $t \notin \tilde{S}$, то ввиду лемм 7, 8 $i^g \in C_G(t) \leqslant H$ и $g \in H \subset \mathfrak{G}$ вопреки выбору элемента g из $G \setminus \mathfrak{G}$. Следовательно, $t \in \tilde{S}$ и $t = v_q$ для некоторого номера q, $1 \leqslant q \leqslant m$, т. е. $C_G(t) = T_q$ и $L = \text{гр}\,(i, i^g) < T_q$. Пусть P — силовская 2-подгруппа из L и $i \in P$. По теореме Силова [1] $i^{gb^{-1}} \in P$, где b — некоторый элемент из (ii^g). Так как $i \in P$, то ввиду лемм 5, 8 $i^{gb^{-1}} \in P < H$ и $gb^{-1} = r \in H$.

Но тогда $g = rb$, $r \in H$, $b \in T_q$, а поэтому $g \in HT_qH \subset \mathfrak{G}$ вопреки выбору элемента g из $G \setminus \mathfrak{G}$. Полученное противоречие означает, что элемент ii^g имеет нечетный порядок и в этом случае, как показано выше, утверждение леммы справедливо.

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы. Предположим, что теорема неверна. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ — последовательность различных элементов из $\tilde{S}$ и $Q = \text{гр}\,(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ — квазициклическая группа. По лемме 9 множество $G \setminus \mathfrak{G}$ имеет элемент c конечного нечетного порядка и $ici = c^{-1}$. Рассмотрим элементы вида

$$ic^{-1}a_n^{-1}ia_nc, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{2}$$

Согласно лемме 9 элементы из (2) имеют конечные нечетные порядки и

$$a_nc = r_nb_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

где $r_n \in C_G(i)$, b_n — элемент конечного нечетного порядка из $G \setminus \mathfrak{G}$ и $ib_ni = b_n^{-1}$, $n = 1, 2, \ldots$

Перепишем равенства (3) в виде

$$r_1^{-1}a_1 = b_1c^{-1}, \quad r_2^{-1}a_2 = b_2c^{-1}, \ldots, \; r_n^{-1}a_n = b_nc^{-1}, \; n = 1, 2, \ldots$$

Так как b_n, c^{-1}, $n = 1, 2, \ldots$, — элементы конечных нечетных порядков и $ib_ni = b_n^{-1}$, $ici = c^{-1}$, $n = 1, 2, \ldots$, то

$$r_n^{-1}a_n = (b_ni)(ic^{-1}), \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

где b_ni, ic^{-1} — инволюции, сопряженные с i в G. Но тогда по замечанию 1 подгруппы вида $L_n = \text{гр}\,(b_ni, ic^{-1})$, $n = 1, 2, \ldots$, конечны и $r_n^{-1}a_n \in L_n$, $n = 1, 2, \ldots$, а поэтому порядки элементов вида $r_n^{-1}a_n$, $n = 1, 2, \ldots$, конечны. Докажем, что отсюда будет вытекать конечность множества $\mathfrak{H} = \{r_n^{-1} \mid n = 1, 2, \ldots\}$. Действительно, если бы множество $\mathfrak{H}$ было бесконечным, то ввиду замечания 1, очевидно, для некоторого номера q элемент r_q^{-1} имел бы бесконечный порядок. А так как $a_q \in \tilde{S} \lhd H$ и по лемме 3 $r_q^{-1} \in C_G(i) < H$, то, очевидно, и элемент $r_q^{-1}a_q$ имел бы бесконечный порядок. Но как доказано выше, $r_q^{-1}a_q \in L_q$ и L_q — конечная подгруппа. Полученное противоречие означает, что $\mathfrak{H}$ — конечное множество. В этом случае, не нарушая общности рассуждений, будем предполагать, что $r = r_1 = r_2 = \ldots = r_n = \ldots$ В соответствии с этим перепишем равенства (4) в виде

$$r^{-1}a_n = (b_ni)(ic), \quad n = 1, 2, \ldots$$

или

$$(ci)^{-1}(r^{-1}a_n)(ci) = a_n^{-1}r, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

так как b_ni, ic^{-1} — инволюции. Из этих равенств получаем

$$(ci)^{-1}(a_1^{-1}a_n)(ci) = r^{-1}(a_1a_n^{-1})\,r$$

или

$$ric^{-1}(a_1^{-1}a_n)\,cir^{-1} = a_n^{-1}a_1, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Но Q — квазициклическая группа и $Q = \text{гр}(a_1, a_2, ..., a_n, ...)$, а поэтому $Q = \text{гр}(a_1^{-1}a_n \mid n = 1, 2, ...)$ и i, $cir^{-1} \in N_G(Q)$. Отсюда получаем $cir^{-1} \times \times iri^{-1}c^{-1} = cic^{-1} = c^2 i \in N_G(Q)$ и, очевидно, $c \in (c^2) < C_G(Q)$. Таким образом, доказано, что $ca_n = a_n c$, $n = 1, 2, ...$, и почти все элементы вида

$$ic^{-1}a_n^{-1}ia_n c = (a_n c)^2 = a_n^2 c^2, \quad n = 1, 2, ...,$$

имеют четные порядки вопреки доказанному выше относительно последовательности (1). Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

1. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп: 3-е изд.— М. : Наука, 1982.— 250 с.
2. *Gorenstein D.* Finite groups.— New York: Harper and Row, 1968.— 527 p.
3. *Адян С. И.* Проблема Бернсайда и тождества в группах.— М. : Наука, 1975.— 360 с.
4. *Шунков В. П.* M_p-группы.— М. : Наука, 1990.— 160 с.
5. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами системы подгрупп.— М. : Наука, 1980.— 384 с.
6. *Холл М.* Теория групп.— М. : Изд-во иностр. лит., 1962.— 468 с.
7. *Курош А. Г.* Теория групп: 3-е изд.— М. : Наука, 1967.— 648 с.
8. *Горчаков Ю. М.* Группы с конечными классами сопряженных элементов.— М. : Наука, 1978.— 172 с.
9. *Neumann B. H.* Groups covered by finitely many cosets // Math. Debrecen.— 1954.— 3, N 3/4.— P. 227—242.
10. *Бусаркин В. М., Горчаков Ю. М.* Конечные расщепляемые группы.— М. : Наука, 1968.— 168 с.

Получено 29.08.91