УДК 512.547.25

П. М. Гудивок, д-р физ.-мат. наук,
В. М. Орос, науч. сотр. (Ужгород. ун-т),
А. В. Ройтер, д-р физ.-мат. наук (Ин-т математики АН Украины, Киев)

О представлениях конечных p-групп над кольцом формальных степенных рядов с целыми p-адическими коэффициентами

Дана классификация представлений циклической группы порядка p над кольцом $\mathbb{Z}_p[[x]]$ формальных степенных рядов с целыми p-адическими коэффициентами и доказано, что в других случаях задача о представлениях конечной p-группы над $\mathbb{Z}_p[[x_1, \ldots, x_n]]$ — дикая.

Наведена класифікація зображень циклічної групи порядку p над кільцем $\mathbb{Z}_p[[x]]$ формальних степеневих рядів з цілими p-адичними коефіцієнтами і встановлено, що в інших випадках задача про зображення скінченної p-групи над $\mathbb{Z}_p[[x_1, \ldots, x_n]]$ є дикою.

Пусть G — конечная группа порядка $|G|$ и K — коммутативное кольцо с единицей. Группа G называется дикой над кольцом K, если описание с точностью до K-эквивалентности матричных K-представлений группы G включает задачу о паре матриц над некоторым полем F, т. е. задачу о классификации с точностью до подобия пар $n \times n$-матриц над полем F (n — произвольное натуральное число). Рядом авторов (см. [1—13]) выяснен вопрос о дикости группы G над полным дискретно нормированным кольцом.

В данной работе изучаются представления конечной p-группы H порядка $|H| > 1$ над кольцом $\mathbb{Z}_p[[x_1, \ldots, x_m]]$ формальных степенных рядов от переменных $x_1, \ldots, x_m$ с коэффициентами из кольца целых p-адических чисел $\mathbb{Z}_p$. Показывается, что если $|H| > p$ или $m > 1$, то группа H является дикой над кольцом $\mathbb{Z}_p[[x_1, \ldots, x_m]]$. При $|H| = p$ дается полное описание представлений группы H над кольцом $K_p = \mathbb{Z}_p[[x]]$.

Отметим, что для представлений конечной группы над кольцом $\mathbb{Z}_p[[x_1, \ldots, x_m]]$ справедлива теорема Крулля — Шмидта [14].

Основные результаты этой работы в сокращенной форме опубликованы в [15].

Теорема 1. *Пусть $H = \langle a \rangle$ — циклическая p-группа порядка p и $K_p = \mathbb{Z}_p[[x]]$. С точностью до K_p-эквивалентности все неразложимые матричные K_p-представления группы H исчерпываются такими представлениями:*

$$\Delta_1 : a \to 1; \qquad \Delta_2 : a \to \tilde{\varepsilon}; \qquad \Gamma_i : a \to \begin{pmatrix} 1 & A_i \\ 0 & \tilde{\varepsilon} \end{pmatrix}, \quad i \in \mathbb{N} \cup \{0\};$$

$$\Gamma'_j : a \to \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon} & B_j \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad j \in \mathbb{N},$$

где $\tilde{\varepsilon}$ — матрица, соответствующая оператору умножения на ε в K_p-базисе $1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon^{p-2}$, кольца $K_p[\varepsilon]$ (ε — первообразный корень степени p из 1); $A_i = (0, \ldots, 0, x^i)$; B_j — матрица, транспонированная к матрице $(x^j, 0, \ldots, 0)$.

Доказательство. Пусть $\Gamma : a \to \Gamma(a)$ — произвольное K_p-представление степени n группы H. Запишем $\Gamma(a)$ в виде

$$\Gamma(a) = A + x^i B, \quad i \geqslant 0, \tag{1}$$

где A — матрица над $\mathbb{Z}_p$, B — матрица над K_p, причем $B = 0$, если $i = 0$, и $B \not\equiv 0 \pmod{xK_p}$, если $i > 0$.

В случае $B = 0$ описание всех неразложимых K_p-представлений группы $H = \langle a \rangle$ сводится к описанию неразложимых $\mathbb{Z}_p$-представлений группы $H = \langle a \rangle$. Эти представления описаны в [1]. Поэтому в дальнейшем будем считать, что в (1) $i > 0$ и $B \not\equiv 0 \pmod{xK_p}$.

Легко проверить, что $A^p = E$ (E — единичная матрица), т. е. $T_1 : a \to A$ будет $\mathbb{Z}_p$-представлением группы H. Как известно [1], T_1 $\mathbb{Z}_p$-эквивалентно представлению T_2 вида

$$T_2 = m_1\Delta_1 + m_2\Delta_2 + r\Gamma_0, \tag{2}$$

где $m_i \in \mathbb{N}^0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $i = 1, 2$, $r \in \mathbb{N}^0$, $(m_1, m_2, r) \neq (0, 0, 0)$ (см. также обозначения в формулировке теоремы).

Рассмотрим ряд случаев.

1. Пусть $T_2 = m_1\Delta_1$ ($m_1 > 0$), т. е. представление Γ группы H K_p-эквивалентно представлению Γ' вида

$$\Gamma' : a \to \Gamma'(a) = E + x^i B' = D, \quad i > 0,$$

где B' — некоторая матрица над K_p. Нетрудно проверить, что из условия $D^p = E$ легко следует $B' = 0$. Поэтому представление Γ K_p-эквивалентно представлению $\Gamma' : a \to E$.

2. Пусть $T_2 = m_1\Delta_1 + m_2\Delta_2 + r\Gamma_0$, $r > 0$. Покажем, что тогда представление Γ группы H K_p-эквивалентно представлению Γ' вида $\Gamma' = \Gamma_0 + \Gamma''$, где Γ'' — некоторое K_p-представление группы H. Очевидно, представ-

ление Γ_0 $\mathbb{Z}_p$-эквивалентно представлению

$$\Gamma_0' : a \to \Gamma_0'(a) = \begin{Vmatrix} 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot \\ 0 & & & 1 & 0 \end{Vmatrix} = R.$$

Матрицу B (см. (1)) представим в виде

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix},$$

где B_{11} — $p \times p$-матрица. Очевидно, можно считать, что

$$\Gamma(a) = \begin{pmatrix} R + x^i B_{11} & x^i B_{12} \\ x^i B_{21} & S + x^i B_{22} \end{pmatrix}, \quad i \in \mathbb{N},$$

где S — некоторая матрица над $\mathbb{Z}_p$.

Установим сначала, что представление Γ группы H K_p-эквивалентно представлению $\overline{\Gamma}$ вида

$$\overline{\Gamma} : a \to \begin{pmatrix} R & x^i \overline{B}_{12} \\ 0 & \overline{S} + x^i \overline{B}_{22} \end{pmatrix},$$

где $\overline{B}_{12}$, $\overline{B}_{22}$ — матрицы над K_p, а $\overline{S}$ — матрица над $\mathbb{Z}_p$.

Пусть M является K_pH-модулем, в котором реализуется представление Γ относительно K_p-базиса $\{e_1, \ldots, e_p, f_1, \ldots, f_r\}$ модуля M (K_pH — групповое кольцо группы H над кольцом K_p).

Пусть $\overline{e}_1 = e_i$, $\overline{e}_i = a\overline{e}_{i-1}$, $i = 2, \ldots, p$, $\overline{f}_j = f_j$, $j = 1, \ldots, r$. Очевидно, $a\overline{e}_p = \overline{e}_1$ и матрица перехода от базиса $\{e_1, \ldots, e_p, f_1, \ldots, f_r\}$ к базису $\{\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_p, \overline{f}_1, \ldots, \overline{f}_r\}$ K_p-модуля M будет обратимой матрицей над K_p. Отсюда следует, что представление Γ K_p-эквивалентно представлению $\overline{\Gamma}$, причем если $B_{12} = 0$, то и $\overline{B}_{12} = 0$.

Рассмотрим далее K_p-представление группы H вида

$$\overline{\Gamma}^{(t)} : a \to \begin{pmatrix} R^{(t)} & 0 \\ x^i \overline{B}_{12}^{(t)} & (\overline{S} + x^i \overline{B}_{22})^{(t)} \end{pmatrix} = \overline{\Gamma}(a)^{(t)},$$

где $D^{(t)}$ — матрица, транспонированная к матрице D. Так как представления $a \to R$ и $a \to R^{(t)}$ $\mathbb{Z}_p$-эквивалентны, то, как и выше, показывается, что представление $\overline{\Gamma}^{(t)}$ K_p-эквивалентно представлению

$$\tilde{\Gamma} : a \to \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & \tilde{S} + x^i \tilde{B}_{22} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где $\tilde{S}$ — матрица над $\mathbb{Z}_p$ и $\tilde{B}_{22}$ — матрица над K_p. Отсюда следует, что представление $\overline{\Gamma}$ K_p-эквивалентно представлению вида (3). Итак, мы показали, что представление Γ группы H K_p-эквивалентно представлению $\Gamma' = \Gamma_0 + \Gamma''$.

3. Пусть $T_2 = m\Delta_2$, $m > 0$. Установим, что тогда представление Γ (см. (1)) будет K_p-эквивалентно представлению T_2.

Обозначим через M K_pH-модуль с K_p-базисом $\{e_{11}, \ldots, e_{1(p-1)}; e_{21}, \ldots, e_{2(p-1)}; \ldots; e_{m1}, \ldots, e_{m(p-1)}\}$, в котором реализуется представление Γ.

Пусть $\overline{e}_{j1} = e_{j1}$, $\overline{e}_{j(k+1)} = a\overline{e}_{jk}$, $j = 1, \ldots, m$; $k = 1, \ldots, p-2$. Очевидно,

$$E + \Gamma(a) + \ldots + \Gamma(a)^{p-1} = 0.$$

Поэтому $a\overline{e}_{j(p-1)} = a^{p-1}\overline{e}_{j1} = (-1 - a - \ldots - a^{p-2})\overline{e}_{j1} = -\overline{e}_{j1} - \overline{e}_{j2} - \ldots - \overline{e}_{j(p-2)}$, $j = 1, \ldots, m$.

Нетрудно проверить, что матрица перехода от K_p-базиса $\{e_{11}, \ldots, e_{m(p-1)}\}$ к K_p-базису $\{\bar{e}_{11}, \ldots, \bar{e}_{m(p-1)}\}$ модуля M будет обратимой матрицей над K_p. Следовательно, представление Γ K_p-эквивалентно представлению T_2.

4. Пусть $T_2 = r\Delta_1 + m\Delta_2$, $r > 0$, $m > 0$. Введем следующие обозначения: $A_1 \otimes A_2$ — тензорное произведение матриц A_1 и A_2; $\tilde{\varepsilon}$ — матрица, соответствующая оператору умножения на ε в $\mathbb{Z}_p$-базисе $1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon^{p-2}$ кольца $\mathbb{Z}_p[\varepsilon]$ (ε — первообразный корень степени p из 1).

Тогда представление Γ группы H (см. (1)) имеет вид

$$\Gamma : a \to \Gamma(a) = \begin{pmatrix} E_1 + x^i B_{11} & x^i B_{12} \\ x^i B_{21} & \tilde{\varepsilon} \otimes E + x^i B_{22} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где E_1 — единичная $r \times r$-матрица, B_{11} — $r \times r$-матрица над K_p, E — единичная $m \times m$-матрица и B_{22} — $m(p-1) \times m(p-1)$-матрица над K_p.

Обозначим через M K_pH-модуль с K_p-базисом $\{f_1, \ldots, f_r, e_{11}, \ldots, e_{1(p-1)}, \ldots, e_{m1}, \ldots, e_{m(p-1)}\}$, в котором реализуется представление Γ. Пусть

$$\bar{f}_i = f_i \ (i = 1, \ldots, r), \quad \bar{e}_{j1} = e_{j1}, \quad \bar{e}_{jk} = a\bar{e}_{j(k-1)},$$

$$j = 1, \ldots, m; \qquad k = 2, \ldots, p-1.$$

Очевидно, матрица перехода от K_p-базиса $\{f_1, \ldots, f_r, e_{11}, \ldots, e_{m(p-1)}\}$ к K_p-базису $\{\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_r, \bar{e}_{11}, \ldots, \bar{e}_{m(p-1)}\}$ модуля M будет обратимой матрицей над K_p. Поэтому представление Γ K_p-эквивалентно представлению

$$\psi_1 : a \to \psi_1(a) = \begin{Vmatrix} E_1 + x^i\tilde{B}_{11} & x^i\tilde{B}_{12} & \ldots & x^i\tilde{B}_{1m} \\ x^i\tilde{B}_{21} & \tilde{\varepsilon} + x^i\tilde{B}_{22} & \ldots & x^i\tilde{B}_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x^i\tilde{B}_{m1} & x^i\tilde{B}_{m2} & \ldots & \tilde{\varepsilon} + x^i\tilde{B}_{mm} \end{Vmatrix},$$

где $\tilde{B}_{tj}$, $t = 1, \ldots, m$; $j = 2, \ldots, m$, — матрицы, у которых только элементы последнего столбца могут быть отличны от нуля.

Нетрудно показать, что существует такая матрица $T \in GL(n, K_p)$ (n — степень представления Γ), что

$$\psi_2(a) = T^{-1}\psi_1(a)\,T = \begin{Vmatrix} E_1 + x^i B_{11} & 0 & 0 \ldots 0 & x^i L \\ x^i\bar{B}_{21} & 0 & 0 \ldots 0 & -E + x^i D_1 \\ x^i\bar{B}_{31} & E & 0 \ldots 0 & -E + x^i D_2 \\ x^i\bar{B}_{41} & 0 & E \ldots 0 & -E + x^i D_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x^i\bar{B}_{p1} & 0 & 0 \ldots E & -E + x^i D_{p-1} \end{Vmatrix}, \tag{5}$$

где E — единичная $m \times m$-матрица, $\bar{B}_{j1}$, $j = 2, \ldots, p$, — $m \times r$-матрица, D_j, $j = 1, \ldots, p-1$, — $m \times m$-матрица, L — $r \times m$-матрица.

Пусть $S_h = \| S_{ij}^{(h)} \|$, $2 \leqslant h \leqslant p-1$, где $S_{11}^{(h)} = E_1$, $S_{jj}^{(h)} = E$, $j = 2, \ldots, m$, $S_{h1}^{(h)} = -x^i\bar{B}_{h1}(E_1 + x^i\tilde{B}_{11})^{-1}$ и $S_{ij}^{(h)} = 0$, если $i \neq j$ и $(i, j) \neq (h, 1)$. Легко проверить, что матрица

$$\psi_3(a) = S_{p-1}^{-1} \ldots S_2^{-1}\psi_2(a)\,S_2 \ldots S_{p-1}$$

имеет вид

$$
\psi_3(a)=\begin{Vmatrix} E_1 + x^i\tilde{B}_{11} & 0 & 0\ldots 0 & 0 & x^iL \\ 0 & 0 & 0\ldots 0 & 0 & -E + x^i\bar{D}_1 \\ 0 & E & 0\ldots 0 & 0 & -E + x^i\bar{D}_2 \\ 0 & 0 & E\ldots 0 & 0 & -E + x^i\bar{D}_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0\ldots E & 0 & -E + x^i\bar{D}_{p-2} \\ x^i\tilde{B}_{p1} & 0 & 0\ldots 0 & E & -E + x^i\bar{D}_{p-1} \end{Vmatrix}. \qquad (6)
$$

Очевидно, матрицу L можно представить в виде $L=\sum_{j=0}^{\infty} x^jL_j$, где L_j — матрица над $\mathbb{Z}_p$, $j=0,1,2,\ldots$. Покажем, что произвольную матрицу L_q, $q\in\mathbb{N}^0$, с помощью подходящего преобразования подобия матрицы (6) можно привести по модулю p, причем матрицы L_j, $j<q$, и вид матрицы (6) при этом не изменяются.

Запишем L_q в виде $L_q = L_q' + pL_q''$, где $L_q' = \| l_{tj} \|$, $0\leqslant |l_{tj}| < p$, $t=1,\ldots,r$; $j=1,\ldots,m$, L_q'' — матрица над $\mathbb{Z}_p$.

Пусть

$$
V=\begin{Vmatrix} E & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & E + x^i\tilde{B}_{p1}R_{p-2} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & x^i\tilde{B}_{p1}R_{p-3} & E + x^i\tilde{B}_{p1}R_{p-2} & \ldots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & x^i\tilde{B}_{p1}R_1 & x^i\tilde{B}_{p1}R_2 & \ldots & E + x^i\tilde{B}_{p1}R_{p-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & E \end{Vmatrix},
$$

$$
W=\begin{Vmatrix} E_1 & R_1 & R_2\ldots R_{p-1} \\ 0 & E & 0\ldots 0 \\ 0 & 0 & E\ldots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0\ldots E \end{Vmatrix}, \quad P = WV^{-1},
$$

где R_j, $j=1,\ldots,p-1$, — некоторые матрицы над K_p. Обозначим

$$
\psi_3'(a) = P^{-1}\psi_3(a)P = \| C_{tj} \|,
$$

где C_{tj}, $t, j = 1,\ldots,p$, — матрицы над K_p, размерности которых соответствуют разбиению матрицы $\psi_3(a)$ на блоки. Из вида $\psi_3'(a)$ следует $C_{11} = E + x^i(\tilde{B}_{11} - R_{p-1}\tilde{B}_{11})$, $C_{1p} = x^iL + pR_{p-1} + x^iR_{p-1}N$ (N — матрица над K_p). Положим в V и W

$$
R_j = C_{11}^{-1}R_{j+1}, \quad j=1,\ldots,p-2, \quad R_{p-1} = -x^{i+q}L_q''.
$$

Тогда нетрудно показать, что $\psi_3'(a)$ будет иметь вид (6) и

$$
C_{1p} = x^i\Big(\sum_{\substack{j=0\\ j\neq q}}^{\infty} x^jL_j + x^qL_q' + px^qL_q''\Big) - px^{i+q}L_q'' - x^{2i+q}L_q''N =
$$

$$
= x^i\Big(\sum_{\substack{j=0\\ j\neq q}}^{\infty} x^jL_j + x^qL_q'\Big) - x^{2i+q}L_q''N = x^i\bar{L} + x^{2i+q}N',
$$

где $\overline{L}$ получается из L заменой L_q на L_q' (N' — некоторая матрица над K_p). Отсюда следует, что представление ψ_3 K_p-эквивалентно представлению ψ_3'' вида (6), где вместо матрицы $L = L' + pL''$ (L', L'' — матрицы над K_p) взята матрица L'.

Рассмотрим далее такие матрицы

$$S_1 = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E \otimes t_1(b) \end{pmatrix}, \quad S_3 = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E \otimes t_2(b) \end{pmatrix},$$

где $C_1 \in GL(r, K_p)$, E_2 — единичная $m(p-1) \times m(p-1)$-матрица, $t_1(b)$ и $t_2(b)$ — трансвекции, $b \in K_p$, $t_j(b) \in GL(p-1, K_p)$, $j = 1, 2$.

Пусть

$$S_1' = S_1, \quad S_2' = T^{-1} S_2 T, \quad S_3' = T^{-1} S_3 T, \tag{7}$$

где T — матрица из (5).

Используя преобразования (7) и преобразование P, нетрудно показать, что матрица $\psi_3''(a)$ будет подобна над кольцом K_p матрице $\psi_4(a)$ вида

$$\psi_4(a) = \begin{bmatrix} E_1 + x^i B_{11}' & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & x^i L' \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -E + x^i D_1' \\ 0 & E & 0 & \dots & 0 & 0 & -E + x^i D_2' \\ 0 & 0 & E & \dots & 0 & 0 & -E + x^i D_3' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & E & 0 & -E + x^i D_{p-2}' \\ x^i B_{p1}' & 0 & 0 & \dots & 0 & E & -E + x^i D_{p-1}' \end{bmatrix}, \tag{8}$$

где $L' = 0$ либо

$$L' = \begin{bmatrix} x^{r_1} & & & & 0 \\ & x^{r_2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & x^{r_s} & \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} L_1' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

$$0 \leqslant r_1 \leqslant r_2 \leqslant \dots \leqslant r_s; \qquad 1 \leqslant s \leqslant r.$$

Пусть

$$W' = \begin{bmatrix} E_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ W_1 & E & 0 & \dots & 0 \\ W_2 & 0 & E & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ W_{p-1} & 0 & 0 & \dots & E \end{bmatrix}, \tag{10}$$

где W_j, $j = 1, \dots, p-1$, — некоторые матрицы над K_p. С помощью преобразования подобия вида (10) матрицу B_{p1}' в (8) можно приводить по модулю p, не изменяя вида матрицы (8). Поэтому можно считать, что $B_{p1}' = \| b_{ij} \|$, где $b_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{ij}^{(k)} x^k$, $\alpha_{ij}^{(k)} \in \mathbb{Z}_p$ и $0 \leqslant \alpha_{ij}^{(k)} < p$.

Далее докажем, что $B_{11}' = 0$ и $D_1' = D_2' = \dots = D_{p-1}' = 0$.

Считая матрицу $\psi_4(a)$ состоящей из p блочных строк и столбцов (см. (8)), легко проверить, что k-й столбец матрицы $\psi_4(a)^{d+1}$, $2 \leqslant k \leqslant$

$\leqslant p-1,\ 1\leqslant d\leqslant p-1$, будет совпадать с $k+1$-м столбцом матрицы $\psi_4(a)^d$. Отсюда следует, что k-й столбец матрицы $\psi_4(a)^{d+s}$, $k+s\leqslant p$, будет совпадать с $k+s$-м столбцом матрицы $\psi_4(a)^d$. Полагая $d=2$, $k=2$, $s=p-2$, получаем, что второй столбец матрицы $\psi_4(a)^{2+(p-2)}=\psi_4(a)^p=E'$ (E' — единичная матрица) будет совпадать с p-м столбцом матрицы $\psi_4(a)^2$. Отсюда получаем такие равенства:

$$B'_{11}L'=-L'D'_{p-1}, \tag{11}$$

$$(-E+x^iD'_1)(-E+x^iD'_{p-1})=E, \tag{12}$$

$$-E+x^iD'_j=-(-E+x^iD'_{j+1})(-E+x^iD'_{p-1}), \tag{13}$$

$$j=1,2,\dots,p-3,$$

$$x^{2i}B'_{p1}L'-E+x^iD'_{p-2}=-(-E+x^iD'_{p-1})^2. \tag{14}$$

Из (11) — (13) вытекает

$$(E_1+x^iB'_{11})L'=-L'(-E+x^iD'_{p-1}), \tag{15}$$

$$-E+x^iD'_t=(-1)^{p-2-t}(-E+x^iD'_{p-2})(-E+x^iD'_{p-1})^{p-2-t}, \tag{16}$$

где $1\leqslant t\leqslant p-3$.

Используя (14) — (16), индукцией по j нетрудно показать, что первая строка матрицы $\psi_4(a)^j$, $2\leqslant j\leqslant p$, имеет вид

$$([(E_1+x^iB'_{11})^2+x^{2i}L'B'_{p1}](E_1+x^iB'_{11})^{j-2},0,\dots,0,x^iL,0,\dots,0), \tag{17}$$

где x^iL' находится на месте $(1,p-j+1)$. Пусть $j=p$. Тогда из $\psi_4(a)^p=E'$ и (17) получаем

$$[(E_1+x^iB'_{11})^2+x^{2i}L'B'_{p1}](E_1+x^iB'_{11})^{p-2}=E_1.$$

Отсюда следует

$$E_1-(E_1+x^iB'_{11})^p=x^{2i}L'B'_{p1}(E_1+x^iB'_{11})^{p-2}. \tag{18}$$

Из (18) находим

$$(pE_1+x^iV_1)B'_{11}+x^{2i}L'B'_{p1}B'_{11}V_2=x^iL'B'_{p1}, \tag{19}$$

где V_1 и V_2 — некоторые матрицы над K_p. Если $L'B'_{p1}=0$, то из (19) следует $B'_{11}=0$. Пусть $L'B'_{p1}\neq 0$ и $L'B'_{p1}=x^lM_{p1}$, где $l\geqslant 0$ и $M_{p1}\not\equiv 0 \pmod{xK_p}$.

Предположим, что $B'_{11}\neq 0$. Тогда из (19) вытекает $B'_{11}=x^{i+l}B''_{11}$. Отсюда и из (19) получаем

$$(pE_1+x^iV_1)B''_{11}+x^{2i+l}M_{p1}B''_{11}V_2=M_{p1},$$

$$pB''_{11}\equiv M_{p1}\pmod{xK_p}.$$

С другой стороны, из вида матриц L' и B'_{p1} следует $pB''_{11}\not\equiv M_{p1}\pmod{xK_p}$. Полученное противоречие показывает, что $B'_{11}=0$.

Покажем, далее, что $D'_1=\dots=D'_{p-1}=0$ (см. (8)). Из (11), (19) и равенства $B'_{11}=0$ получаем

$$L'D_{p-1}=0,\quad L'B'_{p1}=0. \tag{20}$$

Пусть

$$L'=\begin{pmatrix}L'_1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad D_j=\begin{pmatrix}D_{11}^{(j)} & D_{12}^{(j)}\\ D_{21}^{(j)} & D_{22}^{(j)}\end{pmatrix},\quad B'_{p1}=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix},$$

$$L_1' = \begin{pmatrix} x^{r_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x^{r_s} \end{pmatrix},$$

$D_{11}^{(j)}$, $j = 1, \dots, p-1$, и A_{11} являются $s \times s$-матрицами над K_p.

Из (20) имеем

$$D_{p-1}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ D_{21}^{(p-1)} & D_{22}^{(p-1)} \end{pmatrix}, \quad B_{p1}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Отсюда и из (14) следует

$$D_{11}^{(p-2)} = 0, \quad D_{12}^{(p-2)} = 0, \tag{22}$$

$$x^i A_{21} L_1' + D_{21}^{(p-2)} - 2D_{21}^{(p-1)} + x^i D_{22}^{(p-1)} D_{21}^{(p-1)} = 0, \tag{23}$$

$$D_{22}^{(p-2)} - 2D_{22}^{(p-1)} + x^i (D_{22}^{(p-1)})^2 = 0. \tag{24}$$

Из (13) и (21) получаем

$$D_{11}^{(j)} = D_{11}^{(j+1)} - x^i D_{12}^{(j+1)} D_{21}^{(p-1)}, \tag{25}$$

$$D_{12}^{(j)} = D_{12}^{(j+1)} - x^i D_{12}^{(j+1)} D_{22}^{(p-1)}, \tag{26}$$

$$D_{21}^{(j)} = D_{21}^{(j+1)} + D_{21}^{(p-1)} - x^i D_{22}^{(j+1)} D_{21}^{(p-1)}, \tag{27}$$

$$D_{22}^{(j)} = D_{22}^{(j+1)} + D_{22}^{(p-1)} - x^i D_{22}^{(j+1)} D_{22}^{(p-1)}, \tag{28}$$

$$j = 1, 2, \dots, p-3.$$

Из (21), (22), (25) — (28) вытекает $D_{11}^{(j)} = 0$, $D_{12}^{(j)} = 0$, $j = 1, 2, \dots, p-1$. В силу (12)

$$D_{21}^{(1)} = -D_{21}^{(p-1)} + x^i D_{22}^{(1)} D_{21}^{(p-1)}, \tag{29}$$

$$D_{22}^{(1)} = -D_{22}^{(p-1)} + x^i D_{22}^{(1)} D_{22}^{(p-1)}. \tag{30}$$

Из (27) и (29) получаем

$$D_{21}^{(j)} = [-jE_2 + x^i (D_{22}^{(1)} + D_{22}^{(2)} + \dots + D_{22}^{(j)})]\, D_{21}^{(p-1)},$$

где E_2 — единичная матрица ($j = 2, 3, \dots, p-2$). Подставляя $D_{21}^{(p-2)}$ в (23), имеем

$$x^i A_{21} L_1' = [pE_2 - x^i (D_{22}^{(1)} + \dots + D_{22}^{(p-1)})]\, D_{21}^{(p-1)}.$$

Отсюда, учитывая вид матриц L' и B_{p1}', получаем

$$A_{21} = 0, \quad D_{21}^{(p-1)} = 0. \tag{31}$$

Из (29) и (31) находим $D_{21}^{(1)} = 0$. Тогда из (27) и (31) вытекает

$$D_{21}^{(j)} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, p-1. \tag{32}$$

Из (30) и (28) следует

$$D_{22}^{(j)} = [-jE_2 + x^i (D_{22}^{(1)} + \dots + D_{22}^{(j)})]\, D_{22}^{(p-1)}, \tag{33}$$

$$j = 2, \dots, p-2.$$

Подставляя $D_{22}^{(p-2)}$ в (24), получаем

$$[pE_2 - x^i (D_{22}^{(1)} + \dots + D_{22}^{(p-2)})]\, D_{22}^{(p-1)} = 0.$$

ISSN 0041-6053. Укр. мат. журн., 1992, т. 44, № 6

Отсюда легко следует $D_{22}^{(p-1)} = 0$. Поэтому в силу (24) и (28) $D_{22}^{(j)} = 0$, $j = 1, \dots, p-1$. Таким образом, мы доказали, что

$$D_j' = 0, \quad j = 1, \dots, p-1, \quad B_{11}' = 0, \quad B_{p1}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}. \qquad (34)$$

Следовательно, ввиду (8) K_p-представление Γ группы H (см. (4)) K_p-эквивалентно представлению ψ_5 вида

$$\psi_5 : a \to \psi_5(a) = \begin{vmatrix} E_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & x^i L' \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -E \\ 0 & E & 0 & \dots & 0 & 0 & -E \\ 0 & 0 & E & \dots & 0 & 0 & -E \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & E & 0 & -E \\ x^i B_{p1}' & 0 & 0 & \dots & 0 & E & -E \end{vmatrix},$$

где L' имеет вид (9), а B_{p1}' — (34). Легко видеть, что представление ψ_5 K_p-эквивалентно представлению ψ_6 вида

$$\psi_6 : a \to \psi_6(a) = \begin{pmatrix} \psi_7(a) & 0 \\ 0 & \psi_8(a) \end{pmatrix},$$

где

$$\psi_7(a) = \begin{vmatrix} E_3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & L_i' \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -E_3 \\ 0 & E_3 & 0 & \dots & 0 & 0 & -E_3 \\ 0 & 0 & E_3 & \dots & 0 & 0 & -E_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & E_3 & -E_3 \end{vmatrix},$$

$$\psi_8(a) = \begin{vmatrix} E_4 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -E_5 \\ 0 & E_5 & 0 & \dots & 0 & 0 & -E_5 \\ 0 & 0 & E_5 & \dots & 0 & 0 & -E_5 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{22} & 0 & 0 & \dots & 0 & E_5 & -E_5 \end{vmatrix}$$

(E_3, E_4, E_5 — единичные матрицы). В силу (9) K_p-представление ψ_7 K_p-эквивалентно представлению ψ_7' вида

$$\psi_7' = \Gamma_{r_1} + \Gamma_{r_2} + \dots + \Gamma_{r_s}$$

(см. обозначения в формулировке теоремы 1).

Легко видеть, что K_p-представление ψ_8 группы $H = \langle a \rangle$ K_p-эквивалентно представлению ψ_8' вида

$$\psi_8' : a \to \begin{pmatrix} E_4 & 0 \\ D & \tilde{\varepsilon} \otimes E_6 \end{pmatrix}$$

(E_6 — единичная матрица).

Используя технику теории $\mathbb{Z}_p$-представлений циклической p-группы (см. [4]), нетрудно показать, что представление ψ_8' группы H K_p-эквивалентно представлению

$$\psi_8^{\sim} = n_1 \Delta_1 + n_2 \Delta_2 + m_1 \Gamma_{i_1}' + \dots + m_t \Gamma_{i_t}'$$

(n_1, n_2 $m_j \in \mathbb{N}^0$; см. обозначения в формулировке теоремы 1).

Легко проверить, что представления Δ_1, Δ_2, Γ_i, $i \in \mathbb{N}^0$ и Γ'_j, $j \in \mathbb{N}$, группы H неразложимы и попарно не эквивалентны над кольцом K_p. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть H — конечная p-группа порядка $|H|$ и $K_p^{(m)} = \mathbb{Z}_p[[x_1, \dots, x_m]]$. Группа H является дикой над кольцом $K_p^{(m)}$, если выполняется одно из следующих условий:* 1) $|H| > p$, $m = 1$; 2) $|H| > 1$, $m > 1$.

Доказательство. Пусть $H = \langle a \rangle$ — циклическая группа порядка p^r, $r > 0$, ε_{r_i} — первообразный корень степени p^{r_i} из 1 ($i = 1, 2$; $0 \leqslant r_1 < r_2 \leqslant r$); $\tilde{\varepsilon}_{r_i}$ — матрица, соответствующая оператору умножения на ε_{r_i} в $K_p^{(m)}$-базисе $1, \varepsilon_{r_i}, \dots, \varepsilon_{r_i}^{s_i}$ кольца $K_p^{(m)}[\varepsilon_{r_i}]$. Очевидно, $a \to \tilde{\varepsilon}_{r_i}$ — неприводимое $K_p^{(m)}$-представление группы H.

Пусть

$$B = \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon}_{r_2} \otimes E_{n_1} & \langle A \rangle \\ 0 & \tilde{\varepsilon}_{r_1} \otimes E_{n_2} \end{pmatrix},$$

где E_{n_i} — единичная матрица порядка n_i, $A = \| \gamma_{ij} \|$, $\gamma_{ij} \in K_p^{(m)}$; $\langle A \rangle = \| \langle \gamma_{ij} \rangle \|$ и

$$\langle \gamma_{ij} \rangle = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \gamma_{ij} \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

($\langle \gamma_{ij} \rangle$ — $(s_2 + 1) \times (s_1 + 1)$-матрица).

Пусть $\Phi = \| \delta_{ij} \|$ ($\delta_{ij} \in K_p^{(m)}[\varepsilon_{r_1}]$). Очевидно,

$$\delta_{ij} = \alpha_{ij}^{(0)} + \alpha_{ij}^{(1)} \varepsilon_{r_1} + \dots + \alpha_{ij}^{(s_1)} \varepsilon_{r_1}^{s_1},$$

где $\alpha_{ij}^{(h)} \in K_p^{(m)}$, $h = 0, 1, \dots, s_1$, $s_1 + 1 = (\mathbf{Q}_p(\varepsilon_{r_1}) : \mathbf{Q}_p)$ ($\mathbf{Q}_p$ — поле p-адических чисел).

Введем следующие обозначения:

$$\tilde{\delta}_{ij} = \alpha_{ij}^{(0)} E + \alpha_{ij}^{(1)} \tilde{\varepsilon}_{r_1} + \dots + \alpha_{ij}^{(s_1)} \tilde{\varepsilon}_{r_1}^{s_1}, \quad \tilde{\Phi} = \| \tilde{\delta}_{ij} \|,$$

где E — единичная матрица порядка $s_1 + 1$.

Рассмотрим ряд случаев.

1. Пусть $H = \langle a \rangle$ — циклическая группа порядка p и $m > 1$. Рассмотрим $K_p^{(m)}$-представления группы H следующего вида:

$$a \to \Gamma(A_i, B_i) = \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon} \otimes E_{3n} & \langle D_{3n}^{(i)} \rangle \\ 0 & E_{3n} \end{pmatrix}, \tag{35}$$

где n — произвольное натуральное число, ε — первообразный корень степени p из 1,

$$D_{3n}^{(i)} = \begin{pmatrix} x_1 x_2 E_n & x_1^2 A_i & 0 \\ x_2^2 E_n & x_1 x_2 E_n & x_1^2 B_i \\ 0 & x_2^2 E_n & x_1 x_2 E_n \end{pmatrix},$$

A_i и B_i — произвольные $n \times n$-матрицы над кольцом $K_p^{(m)}$, $i = 1, 2$.

Покажем, что описание $K_p^{(m)}$-представлений вида (35) группы H включает задачу о паре матриц над некоторым полем характеристики p.

Пусть C — такая обратимая матрица над кольцом $K_p^{(m)}$, что

$$C^{-1} \Gamma(A_1, B_1) C = \Gamma(A_2, B_2). \tag{36}$$

В силу (35) и (36)

$$C=\begin{pmatrix}C_1 & C_2\\ 0 & C_3\end{pmatrix},$$

где C_3 — $3n\times 3n$-матрица.

Далее из $\Gamma(A_1,B_1)C=C\Gamma(A_2,B_2)$ получаем

$$(\tilde{\varepsilon}\otimes E_{3n})C_1=C_1(\tilde{\varepsilon}\otimes E_{3n}), \tag{37}$$

$$(\tilde{\varepsilon}\otimes E_{3n})C_2+\langle D^{(1)}_{3n}\rangle C_3=C_1\langle D^{(2)}_{3n}\rangle+C_2. \tag{38}$$

Из (37) вытекает, что $C_1=\tilde{\Phi}_1$, где $\Phi_1=\|\delta_{ij}\|$, $\delta_{ij}\in K_p^{(m)}[\varepsilon]$. На основании [4, 7] из (38) имеем

$$D^{(1)}_{3n}C_3=\Phi_1D^{(2)}_{3n}+(\varepsilon-1)L, \tag{39}$$

где L — некоторая матрица над $K_p^{(m)}[\varepsilon]$.

Пусть $P=(\varepsilon-1)K_p^{(m)}[\varepsilon]+x_1K_p^{(m)}[\varepsilon]+\ldots+x_mK_p^{(m)}[\varepsilon]$, $\Phi_1=\|V_{ij}\|$, $C_3=\|C_{ij}\|$, $L=\|L_{ij}\|$ (V_{ij}, C_{ij}, L_{ij} — $n\times n$-матрицы; $i,j=1,2,3$). Тогда из (39) получаем

$$C_{ii}\equiv V_{jj}\,(\mathrm{mod}\,P),\quad i,j=1,2,3,$$

$$C_{13}\equiv C_{23}\equiv V_{12}\equiv V_{13}\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,P),$$

$$A_1C_{11}\equiv C_{11}A_2\,(\mathrm{mod}\,P),\quad B_1C_{11}\equiv C_{11}B_2\,(\mathrm{mod}\,P).$$

Очевидно, матрица $\bar{C}_{11}=\|\lambda_{ij}+P\|$ ($C_{11}=\|\lambda_{ij}\|$) — обратима над полем $K_p^{(m)}[\varepsilon]/P=F$.

Следовательно, описание $K_p^{(m)}$-представлений вида (35) группы H включает задачу о паре матриц над полем F.

2. Пусть $H=\langle a\rangle$ — циклическая группа порядка p^2 и $K_p=\mathbb{Z}_p[[x]]$. Рассмотрим K_p-представления группы H такого вида:

$$a\to\Gamma(A_i,B_i)=\begin{pmatrix}\tilde{\xi}\otimes E_{2n} & \langle\Lambda_1\rangle & \langle D_i\rangle\\ 0 & \tilde{\varepsilon}\otimes E_{2n} & \langle\Lambda_2\rangle\\ 0 & 0 & E_{2n}\end{pmatrix}, \tag{40}$$

где ξ и ε — первообразные корни соответственно степени p^2 и p из 1,

$$\Lambda_1=\begin{pmatrix}x^4E_n & 0\\ 0 & x^2E_n\end{pmatrix},\quad \Lambda_2=\begin{pmatrix}x^2E_n & 0\\ 0 & x^2E_n\end{pmatrix},\quad D_i=\begin{pmatrix}xA_i & B_i\\ E_n & 0\end{pmatrix}$$

(A_i и B_i — произвольные $n\times n$-матрицы над кольцом K_p; $i=1,2$).

Пусть существует такая матрица $C\in GL(2p^2n,K_p)$, что

$$C^{-1}\Gamma(A_1,B_1)C=\Gamma(A_2,B_2). \tag{41}$$

Пусть $P=(\xi-1)K_p[\xi]+xK_p[\xi]$ и $P_1=(\xi-1)K_p[\xi]$. Тогда из (40) и (41) вытекает

$$C=\begin{pmatrix}C_1 & C_2 & C_3\\ 0 & C_4 & C_5\\ 0 & 0 & C_6\end{pmatrix},$$

где $C_1=\tilde{\Phi}_1$ ($\Phi_1=\|\delta_{ij}\|$, $\delta_{ij}\in K_p[\xi]$), $C_4=\tilde{\Phi}_4$ ($\Phi_4=\|\gamma_{ij}\|$, $\gamma_{ij}\in K_p[\xi]$) и Φ_1, Φ_4, C_6 — матрицы порядка $2n$.

Далее из $\Gamma(A_1,B_1)C=C\Gamma(A_2,B_2)$ на основании [4, 7] получаем

$$\Lambda_1\Phi_4\equiv\Phi_1\Lambda_1\,(\mathrm{mod}\,P_1),\quad \Lambda_2C_6\equiv\Phi_4\Lambda_2\,(\mathrm{mod}\,P_1), \tag{42}$$

$$D_1C_6+x^2L\equiv\Phi_1D_2\,(\mathrm{mod}\,P_1), \tag{43}$$

где L — некоторая матрица над кольцом $K_p[\xi]$.

Пусть

$$\Phi_i = \begin{pmatrix} N_i & M_i \\ L_i & S_i \end{pmatrix},$$

$$i = 1, 4, 6, \quad C_6 = \Phi_6.$$

Тогда из (42) имеем

$$N_4 \equiv N_1 (\mathrm{mod}\, P_1), \quad S_4 \equiv S_1 (\mathrm{mod}\, P_1), \quad M_1 \equiv x^2 M_4 (\mathrm{mod}\, P_1),$$
$$L_4 \equiv x^2 L_1 (\mathrm{mod}\, P_1), \quad \Phi_6 \equiv \Phi_4 (\mathrm{mod}\, P_1).$$

Отсюда и из (43) получаем

$$N_4 \equiv N_1 \equiv S_4 \equiv S_1 (\mathrm{mod}\, P),$$
$$M_1 \equiv L_4 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, P),$$
$$A_1 N_1 \equiv N_1 A_2 (\mathrm{mod}\, P), \quad B_1 N_1 \equiv N_1 B_2 (\mathrm{mod}\, P).$$

Следовательно, описание K_p-представлений вида (40) группы H включает задачу о паре матриц над полем $K_p[\xi]/P$.

3. Пусть H — группа типа $(p, p): a^p = b^p = 1$, $ab = ba$. Рассмотрим K_p-представления $\Gamma(A_i, B_i)$ группы H следующего вида:

$$a \to \Gamma_a(A_i, B_i) = \begin{Vmatrix} \tilde{\varepsilon} \otimes E_{2n} & 0 & 0 & \langle \Lambda_i \rangle \\ 0 & E_{2rn} & E_{2rn} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\varepsilon} \otimes E_{2n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{2n} \end{Vmatrix},$$

$$b \to \Gamma_b = \begin{Vmatrix} E_{2rn} & 0 & \Lambda & 0 \\ 0 & \tilde{\varepsilon} \otimes E_{2n} & 0 & \langle E_{2n} \rangle \\ 0 & 0 & \tilde{\varepsilon} \otimes E_{2n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{2n} \end{Vmatrix},$$

где $r = p - 1$,

$$\Lambda = \begin{pmatrix} x^2 E_{rn} & 0 \\ 0 & E_{rn} \end{pmatrix}, \quad \Lambda_i = \begin{pmatrix} x A_i & B_i \\ E_n & 0 \end{pmatrix},$$

A_i, B_i — произвольные $n \times n$-матрицы над кольцом K_p, $i = 1, 2$.

Пусть представления $\Gamma(A_1, B_1)$ и $\Gamma(A_2, B_2)$ группы H K_p-эквивалентны, т. е. существует такая обратимая матрица C над кольцом K_p, что

$$\Gamma_a(A_1, B_1) C = C \Gamma_a(A_2, B_2), \tag{44}$$

$$\Gamma_b C = C \Gamma_b. \tag{45}$$

Легко видеть, что матрица C имеет вид

$$C = \begin{Vmatrix} \tilde{\Phi}_1 & 0 & \tilde{\Phi}_4 & C_1 \\ 0 & \tilde{\Phi}_2 & \tilde{\Phi}_5 & C_2 \\ 0 & 0 & \tilde{\Phi}_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Phi_6 \end{Vmatrix},$$

где $\Phi_t = \| \delta_{ij}^{(t)} \|$, $\delta_{ij}^{(t)} \in K_p[\varepsilon]$; $t = 1, \ldots, 5$, $\Phi_6 = \| \delta_{ij}^{(6)} \|$, $\delta_{ij}^{(6)} \in K_p$, и Φ_i, $i = 1, 2, 3, 6$, — матрицы порядка $2n$.

Далее из (44) и (45) получаем

$$\tilde{\Phi}_3 + \tilde{\Phi}_5 = \tilde{\Phi}_2 + \tilde{\Phi}_5 (\tilde{\varepsilon} \otimes E_{2n}),$$

$$(\tilde{\varepsilon} \otimes E_{2n}) C_1 + \langle \Lambda_1 \rangle \Phi_6 = \tilde{\Phi}_1 \langle \Lambda_2 \rangle + C_1,$$

$$\tilde{\Phi}_4 + \Lambda \tilde{\Phi}_3 = \tilde{\Phi}_1 \Lambda + \Phi_4 (\tilde{\varepsilon} \otimes E_{2n}), \qquad (46)$$

$$(\tilde{\varepsilon} \otimes E_{2n}) C_2 + \langle E_{2n} \rangle \Phi_6 = \tilde{\Phi}_2 \langle E_{2n} \rangle + C_2.$$

Пусть $P_1 = (\varepsilon - 1) K_p [\varepsilon]$, $P = (\varepsilon - 1) K_p [\varepsilon] + x K_p [\varepsilon]$,

$$\Phi_i = \begin{pmatrix} D_i & L_i \\ R_i & S_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, \ldots, 6,$$

где D_i и S_i — $n \times n$-матрицы. Тогда из (46) вытекает

$$\Phi_2 \equiv \Phi_3 \pmod{P_1}, \quad \Phi_6 \equiv \Phi_2 \pmod{P_1},$$

$$D_3 \equiv D_1 \pmod{P_1}, \quad S_3 \equiv S_1 \pmod{P_1},$$

$$R_3 \equiv x^2 R_1 \pmod{P_1}, \quad L_1 \equiv x^2 L_3 \pmod{P_1},$$

$$D_6 \equiv S_1 \pmod{P},$$

$$A_1 D_1 \equiv D_1 A_2 \pmod{P}, \quad B_1 D_1 \equiv D_1 B_2 \pmod{P}.$$

Тем самым мы показали, что p-группа H типа (p, p) является дикой над кольцом K_p.

Легко видеть, что доказательство теоремы сводится к случаям 1—3. Теорема доказана.

1. *Diederichsen F. E.* Über die Ausreduktion ganzzahliger Gruppendarstellungen bei arithmetischer Äquivalenz // Hamb. Abh.— 1938.— **14.**— P. 357—412.
2. *Ройтер А. В.* О представлениях группы четвертого порядка целочисленными матрицами // Вестн. Ленингр. ун-та.— 1960.— № 19.— С. 65—74.
3. *Назарова Л. А.* Целочисленные представления четверной группы // Докл. АН СССР.— 1961.— **140**, № 5.— С. 1011—1014.
4. *Берман С. Д., Гудивок П. М.* О целочисленных представлениях конечных групп // Там же.— 1962.— **145**, № 6.— С. 1199—1201.
5. *Берман С. Д., Гудивок П. М.* Неразложимые представления конечных групп над кольцом целых p-адических чисел//Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1964.—**28**, № 4.—С. 875—910.
6. *Heller A., Reiner I.* Representations of cyclic groups in rings of integers I, II // Ann. Math.— 1962.— **76.**— P. 73—92;.— 1963.— **77.**— P. 318—328.
7. *Гудивок П. М.* Представления конечных групп над числовыми кольцами // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1967.— **31**, № 4.— С. 799—834.
8. *Jacobinski H.* Sur les ordres commutatifs avec un nombre fini de reseaux indecomposables // Acta Math.— 1967.— **118.**— P. 1—31.
9. *Яковлев А. В.* Классификация 2-адических представлений циклической группы восьмого порядка // Зап. науч. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР.— 1972.— **28.**— С. 93—129.
10. *Копелевич Н. М.* Представления циклической группы четвертого порядка над кольцом целых гауссовских чисел.— Л., 1975.— 26 с.— Деп. в ВИНИТИ, № 514—75 Деп.
11. *Гудивок П. М.* О представлениях конечных групп над полным дискретно нормированным кольцом // Тр. Мат. ин-та АН СССР.— 1978.— **148.**— С. 96—105.
12. *Dieterich E.* Group rings of wild representation type // Math. Ann.— 1983.— **266**, N 1.— P. 1—22.
13. *Бондаренко В. М.* Представления циклической группы четвертого порядка над P-адическими квадратичными кольцами // X Всесоюз. симп. по теории групп: Тез. сообщ.— Минск, 1986.— С. 25.
14. *Боревич З. И., Фаддеев Д. К.* Теория гомологий в группах // Вест. Ленингр. ун-та.— 1959.— № 7.— С. 72—87.
15. *Гудивок П. М., Орос В. М., Ройтер А. В.* О представлениях конечных групп над кольцом формальных степенных рядов с целыми p-адическими коэффициентами // Докл. АН СССР.— 1990.— **314**, № 1.— С. 49—52.

Получено 24.09.91