УДК 517.956

Е. А. Калита (Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

РАЗРЕШИМОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ С МЕРОЙ*

We prove the solvability of nonlinear elliptic systems in the spaces dual to the Morrey spaces. As a main consequence, we establish that, under certain restrictions on the modulus of ellipticity of a system, systems with measure are solvable.

Для нелінійних еліптичних систем встановлена розв'язність у просторах, дуальних до просторів Моррі. Як основний наслідок, одержана розв'язність систем з мірою при певних обмеженнях на модуль еліптичності системи.

1. Основные результаты. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, — рассматривается нелинейная эллиптическая система

$$\operatorname{div} A(x, Du) = f(x), \tag{1}$$

где $A = (A_1, \ldots, A_n)$, функции u, A_i, f векторнозначные размерности $N > 1$, $D = (D_1, \ldots, D_n)$, $D_i = d/dx_i$. Функция $A(x, \xi)$ предполагается измеримой по x, непрерывной по ξ и удовлетворяющей стандартным структурным условиям

$$\begin{gathered}(A(x,\xi) - A(x,\eta))(\xi - \eta) \geq \lambda |\xi - \eta|^2, \\ |A(x,\xi) - A(x,\eta)| \leq |\xi - \eta|, \\ A(x, 0) = 0.\end{gathered} \tag{2}$$

Поскольку в дальнейшем существенна величина λ, укажем, что здесь для $\xi = (\xi_i^j)$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, N$, модуль обозначает

$$|\xi| = \left[\sum\nolimits_{i,j} (\xi_i^j)^2\right]^{1/2},$$

и аналогично для A.

Основным результатом работы является следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть*

$$(1 - \lambda^2)\left(1 + \frac{(n-2)^2}{n-1}\right) < 1. \tag{3}$$

Тогда для произвольной борелевской меры $\sigma = (\sigma^1, \ldots, \sigma^N)$ *в* $\mathbb{R}^n$ *с конечной вариацией* $\operatorname{var} \sigma = \int_{\mathbb{R}^n} |d\sigma|$ *система* (1) *с* $f = d\sigma/dx$ *имеет решение и такое, что*

$$\| Du; L_2(\mathbb{R}^n; \omega) \| \leq c \operatorname{var} \sigma, \tag{4}$$

вес ω *определяется равенством*

$$\omega(x) = \left[1 + (\operatorname{var} \sigma)^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |x - y|^{2-n-\varepsilon} |d\sigma(y)|\right]^{-1}, \tag{5}$$

$\varepsilon > 0$ *достаточно малое (при* $n = 2$ *единицу следует заменить на* $|x|^{\varepsilon}$).

* Работа частично поддержана Международным научным фондом, грант № 97000, а также Государственным фондом фундаментальных исследований при Государственном комитете Украины по вопросам науки и технологий.

Буквой c здесь и далее будем обозначать различные положительные константы.

Мера σ в теореме 1 не предполагается абсолютно непрерывной относительно меры Лебега, решение понимается в смысле интегрального тождества

$$\int A(x, Du) D\varphi(x)\, dx = -\int \varphi(x)\, d\sigma(x) \quad \forall\, \varphi \in \overset{\circ}{C}{}^{\infty};$$

$L_2(\mathbb{R}^n; \omega)$ обозначает весовое пространство с нормой

$$\|u\|_\omega^2 = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^2 \omega(x)\, dx.$$

Отметим, что если в некоторой области $f \in L_{2n/(n+2)}$ ($f \in L_{1+\varepsilon}$ при $n = 2$), то в этой области решение из теоремы 1 является стандартным обобщенным решением класса $H^1_{\mathrm{loc}} = W^1_{2,\mathrm{loc}}$.

В случае, когда f — дельта-функция, установлен следующий результат о существовании и правильном поведении фундаментального решения (1).

Теорема 2. *Пусть выполнено* (3). *Тогда для произвольной точки* $y \in \mathbb{R}^n$ *и числового вектора* $h = (h^1, \ldots, h^N)$ *система* $\operatorname{div} A(x, Du) = h\,\delta(x-y)$ *имеет решение* $u \in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n \setminus y)$ *такое, что*

$$\int\limits_{R<|x-y|<2R} |Du(x)|^2 dx \le c\,|h|^2 R^{2-n} \quad \forall\, R \in (0, \infty). \tag{6}$$

Неравенство (6) означает, что поведение фундаментального решения (1) совпадает с поведением фундаментального решения оператора Лапласа.

В случае одного дивергентного эллиптического уравнения второго порядка подобные результаты известны без каких-либо ограничений на модуль эллиптичности, подобных условию (3). Например, существование и правильное поведение фундаментального решения дивергентного уравнения второго порядка установлены в [1]. Развитая в 60-х годах теория монотонных операторов (см., например, [2]) позволяет легко получать разрешимость нелинейных эллиптических систем в естественном энергетическом пространстве (в нашем случае H^1), если правая часть принадлежит сопряженному к нему пространству. Однако результаты по разрешимости в пространствах слабее естественного энергетического для нелинейных и линейных с разрывными коэффициентами систем практически отсутствуют. Более того, известные контрпримеры показывают, что только при условиях (2) (без дополнительных ограничений типа (3) или какого-нибудь другого типа) такие результаты не возможны.

В теории регулярности решений нелинейных эллиптических уравнений и систем Кордес [3] предложил метод, позволяющий довольно точно оценивать величину повышения регулярности обобщенного решения в зависимости от модуля эллиптичности (для недивергентного эллиптического уравнения). Этот подход распространен на дивергентные системы в [4, 5]. В [6] он использован при анализе изолированных особенностей решений нелинейных эллиптических систем.

Значительное развитие этой техники позволило в данной работе рассмотреть разрешимость нелинейных эллиптических систем с мерой. Важнейшим, хотя и несложным технически, является переход от известных ранее неравенств типа (29) к оценке нормы оператора $D\Delta^{-1}\operatorname{div}$ (шаг 3 доказательства теоремы 7). Вместе с леммой 1 это приводит к оценкам с весом ω вида (5), вместо использовавшихся ранее степенных весов. Переход от весов (5) к мерам осуществляет теорема 3, двойственная классической лемме Морри.

2. Дуальные пространства Морри. Обозначим через $L_{2,\omega}$ весовое пространство с нормой

$$\|f\|_\omega^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 \omega(x)\, dx$$

и рассмотрим весовые функции вида

$$\omega(x) = \left[|x|^{-b} + \int_{\mathbb{R}^n} |x-y|^{-a}\, d\sigma(y) \right]^{-1}, \tag{7}$$

где σ — неотрицательная борелевская мера в $\mathbb{R}^n$, $\sigma(\mathbb{R}^n) = 1$. При $0 \le a < n$, $-n < b \le 0$, определим пространство $L_{2,a,b}$ с нормой

$$\|f; L_{2,a,b}\| = \inf_\sigma \|f\|_\omega,$$

где ω определено (7). Строго говоря, это квазинорма: неравенство треугольника выполнено с константой больше единицы.

Замечание 1. $L_{2,a,b} \subset L_p$ локально при $p < 2n/(n+a)$.

Действительно, $L_{2,a,b}$ локально эквивалентно пространству $L_{2,a}$, определяемому аналогично по весам ω вида

$$\omega(x) = \left[\int_{\mathbb{R}^n} |x-y|^{-a}\, d\sigma(y) \right]^{-1}.$$

В силу неравенства Гельдера справедливо неравенство

$$\int_\Omega |f|^p dx \le \left(\int_\Omega |f|^2 \omega\, dx \right)^{p/2} \left(\int_\Omega \omega^{-p/(2-p)} dx \right)^{1-p/2},$$

и для ограниченной области Ω по неравенству Минковского имеем

$$\left(\int_\Omega \left(\int |x-y|^{-a} d\sigma \right)^{p/(2-p)} dx \right)^{2/p-1} \le$$

$$\le \int \left(\int_\Omega |x-y|^{-ap/(2-p)} dx \right)^{2/p-1} d\sigma \le c \int d\sigma = c$$

при $-ap/(2-p) > -n$.

Отметим, что пространства $L_{2,a}$, $a > 0$, двойственны классическим пространствам Морри $L_{2,-a}$ $\Big($ с нормой

$$\|g; L_{2,b}\|^2 = \sup_y \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^2 |x-y|^b dx,$$

$b < 0$ $\Big)$ относительно скалярного спаривания

$$(f, g) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, g(x)\, dx.$$

Действительно, если $f \in L_{2,a}$, $g \in L_{2,-a}$, $a > 0$, то

$$|(f,g)| \le \inf_{\sigma}(\|f\|_{\omega}\|g\|_{1/\omega}) \le \|f;L_{2,a}\| \sup_{\sigma}\|g\|_{1/\omega},$$

и по теореме Фубини получаем

$$\|g\|^2_{1/\omega} = \int |g|^2\Big(\int |x-y|^{-a}d\sigma\Big)dx = \int\Big(\int |g|^2|x-y|^{-a}dx\Big)d\sigma \le$$

$$\le \sup_{y}\Big(\int |g|^2|x-y|^{-a}dx\Big)\int d\sigma = \|g;L_{2,-a}\|^2.$$

Обозначим через $H^1_{a,b}$ пространство функций с конечной квазинормой $\left\|u;H^1_{a,b}\right\| = \|Du;L_{2,a,b}\|$ с факторизацией по множеству констант, аналогично H^1_{ω} — весовое пространство с нормой $\|Du\|_{\omega}$ и факторизацией по константам.

Обозначим через $H^{-1}_{a,b}$ пространство с квазинормой

$$\left\|u;H^{-1}_{a,b}\right\| = \|I_1 f;L_{2,a,b}\|,$$
$$I_1 f(x) = \int |x-y|^{1-n}f(y)\,dy, \tag{8}$$

аналогично H^{-1}_{ω} — пространство с нормой $\|I_1 f\|_{\omega}$.

Следующее утверждение двойственно к известной лемме Морри о гельдеровости функций из H^1_a, $a<2-n$.

Теорема 3. *Если $a\in(n-2,n)$, $n\ge 3$, то $H^{-1}_{a,0}$ содержит плотности всех борелевских мер σ с конечной вариацией $\operatorname{var}\sigma = \int |d\sigma|$, причем*

$$\left\|\frac{d\sigma}{dx};H^{-1}_{\omega}\right\| \le c\operatorname{var}\sigma \tag{9}$$

для веса

$$\omega(x) = \Big[1 + (\operatorname{var}\sigma)^{-1}\int |x-y|^{-a}|d\sigma(y)|\Big]^{-1},$$

константа c зависит только от a, n.

При $n=2$ это верно для $H^{-1}_{a,-a}$ и веса

$$\omega(x) = \Big[|x|^a + (\operatorname{var}\sigma)^{-1}\int |x-y|^{-a}|d\sigma(y)|\Big]^{-1}.$$

Доказательство. По неравенству Гельдера при $n\ge 3$ имеем

$$\left|I_1\frac{d\sigma}{dx}(x)\right|^2 = \Big[\int |x-y|^{1-n}d\sigma(y)\Big]^2 \le$$

$$\le \int (1+|x-y|^{-a})|d\sigma| \int \frac{|x-y|^{2-2n}}{1+|x-y|^{-a}}|d\sigma|,$$

поэтому с учетом $a>n-2$

$$\left\|\frac{d\sigma}{dx};H^{-1}_{\omega}\right\|^2 = \int\left|I_1\frac{d\sigma}{dx}\right|^2\omega\,dx \le \operatorname{var}\sigma\int\int\frac{|x-y|^{2-2n}}{1+|x-y|^{-a}}|d\sigma|\,dx =$$

$$\le \operatorname{var}\sigma\int\left(\int\frac{|x-y|^{2-2n}}{1+|x-y|^{-a}}dx\right)|d\sigma| = c(\operatorname{var}\sigma)^2.$$

При $n=2$ оценка аналогична, ограниченность выражения

$$\int |x-y|^{-2}(|x|^{a} + |x-y|^{-a})^{-1}dx$$

равномерно по y легко проверяется.

3. Разрешимость в пространствах $H^1_{a,b}$. Пусть система (1) удовлетворяет структурным условиям $A(x,0)=0$,

$$|\xi-\eta-A(x,\xi)+A(x,\eta)| \le K|\xi-\eta|, \quad K<1, \tag{10}$$

что эквивалентно условиям (2) с точностью до нормирующего множителя. Действительно, если выполнено (2), то

$$(\xi-\eta-\kappa A(x,\xi)+\kappa A(x,\eta))^2 \le$$

$$\le |\xi-\eta|^2 - 2\kappa(A(x,\xi)-A(x,\eta))(\xi-\eta) + \kappa^2|A(x,\xi)-A(x,\eta)|^2 \le$$

$$\le (1-2\kappa\lambda+\kappa^2)|\xi-\eta|^2,$$

где κ — произвольное число. При $k=\lambda$ имеет место следующее замечание.

Замечание 2. Если $\kappa=\lambda$ и выполнено (2), то в (10) $K^2 \le 1-\lambda^2$.

Обратно, если выполнено (10), то по неравенству треугольника

$$(1-K)|\xi-\eta| \le |A(x,\xi)-A(x,\eta)| \le (1+K)|\xi-\eta|, \tag{11}$$

откуда вытекает второе из условий (2). Возводя (10) в квадрат, получаем

$$(1-K^2)|\xi-\eta|^2 + |A(x,\xi)-A(x,\eta)|^2 \le 2(A(x,\xi)-A(x,\eta))(\xi-\eta),$$

откуда с учетом (11) следует

$$(A(x,\xi)-A(x,\eta))(\xi-\eta) \ge (1-K)|\xi-\eta|^2.$$

Введем оператор $T = D\Delta^{-1}\operatorname{div}$, который понимается как мультипликатор с символом $(\zeta_i\zeta_j|\zeta|^{-2})$, $i,j=1,\ldots,n$, переводящий вектор-функции размерности n в вектор-функции размерности n. Обозначим через T_ω его норму в пространстве $(L_{2,\omega})^n$:

$$T_\omega^2 = \sup_f \sum_{i=1}^{n} \left\| \sum_{j=1}^{n} D_i\Delta^{-1}D_j f_j \right\|_\omega^2 \left(\sum_{i=1}^{n} \|f_i\|_\omega^2 \right)^{-1}. \tag{12}$$

Обозначим через T_a соответствующую норму при $\omega(x)=|x|^a$. Поскольку T — композиция проекторов Рисса, имеем $T_a<\infty$ при $|a|<n$ [7]. Ниже норма T_a будет вычислена точно (теорема 7), здесь же мы используем свойства T, вытекающие из общей теории. Из теоремы 7 возьмем только $T_a\to\infty$ при $|a|\to n-0$.

Для доказательства разрешимости системы (1) нам потребуется, чтобы вес ω удовлетворял условию $T_\omega<1/K$. Его выполнение обеспечивают следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть* ω *имеет вид* (7), a, $b\in(-n,n)$. *Тогда*

$$T_\omega \le \max\{T_a; T_b\}. \tag{13}$$

Лемма 2. *При* $a\in(-n,n)$ *множеством решений неравенства* $T_a<1/K$ *является некоторый интервал* $(-a^*,a^*)$, *причем* $T_a=1/K$ *для* $a=\pm a^*$.

Точное значение a^* может быть взято из замечания 3 (см. ниже п. 5).

Доказательство леммы 1. Нам понадобятся два простых свойства норм операторов в весовых пространствах.

1. Для произвольного веса ω и оператора T в $L_{2,\omega}$

$$T_\omega = T^*_{1/\omega}. \tag{14}$$

Действительно, пусть $f \in L_{2,\omega}$, $g \in L_{2,1/\omega}$, $\|f\|_\omega = \|g\|_{1/\omega} = 1$. Тогда

$$T_\omega = \sup_f \|Tf\|_\omega = \sup_{f,g} (Tf, g) = \sup_{f,g} (f, T^* g) =$$
$$= \sup_g \|T^* g\|_{1/\omega} = T^*_{1/\omega},$$

где $(\cdot,\cdot)$ обозначает скалярное спаривание элементов из сопряженных пространств.

2. Пусть вес ω имеет вид $\omega(x) = \int \omega_\alpha(x)\, d\sigma(\alpha)$, где множество параметров α считается вложенным в $\mathbb{R}^m$ при некотором m, σ — неотрицательная борелевская мера в $\mathbb{R}^m$, веса ω_α такие, что $\bigcap_\alpha L_2(\mathbb{R}^n; \omega_\alpha)$ плотно в $L_{2,\omega}$. Тогда для оператора T, ограниченного в $L_2(\mathbb{R}^n; \omega_\alpha)$ при всех α, имеем

$$T_\omega \le \sup_\alpha T_{\omega_\alpha}.$$

Действительно, для $f \in \bigcap_\alpha L_2(\mathbb{R}^n; \omega_\alpha)$ по теореме Фубини

$$\|Tf\|^2_\omega = \int |Tf|^2 \left(\int \omega_\alpha(x)\, d\sigma(\alpha) \right) dx = \int \left(\int |Tf|^2 \omega_\alpha\, dx \right) d\sigma(\alpha) \le$$
$$= \sup_\alpha T^2_{\omega_\alpha} \int \int |f|^2 \omega_\alpha\, dx\, d\sigma(\alpha) = \sup_\alpha T^2_{\omega_\alpha} \|f\|^2_\omega.$$

Поскольку оценка установлена для плотного в $L_{2,\omega}$ множества, при замыкании получаем, что она справедлива для всех $f \in L_{2,\omega}$.

Теперь для веса вида (7) получаем оценку (13):

$$T_\omega = T^*_{1/\omega} \le \max\{T^*_{-a}; T^*_{-b}\} = \max\{T_a; T_b\}.$$

Доказательство леммы 2. Из (14) в силу самосопряженности оператора T следует $T_a = T_{-a}$. По интерполяционной теореме Стейна–Вейса функция T_a логарифмически выпукла по a. Следовательно, она непрерывна на $(-n, n)$, $T_a = T_0$ при $0 \le a \le b$ для некоторого $b \ge 0$ (на самом деле $b = 0$) и T_a строго возрастает на (b, n). В безвесовом случае, т. е. при $a = 0$, с помощью равенства Парсеваля легко устанавливается $T_0 = 1$. Учитывая, что $1/K > 1 = T_0$ и $T_a \to \infty$ при $a \to n$, получаем утверждение леммы.

Теорема 4. *Пусть числа a, b такие, что $-a^* < b \le 0 \le a < a^*$. Тогда для любой функции $f \in H^{-1}_{a,b}$ система* (1) *имеет единственное решение $u \in H^1_{a,b}$. Более того, для всех весов ω вида* (7), *для которых $f \in H^{-1}_\omega$, справедлива оценка*

$$c_1 \| f; H^{-1}_\omega \| \le \| u; H^1_\omega \| \le c_2 \| f; H^{-1}_\omega \|, \tag{15}$$

константы c_1, c_2 зависят только от a, b, K, n.

Доказательство. Наряду с системой (1) рассмотрим систему

$$\mathcal{M}u \equiv \operatorname{div}(\omega TA(x, Du)) = \operatorname{div}(\omega D\Delta^{-1}f), \tag{16}$$

где $T = D\Delta^{-1}\operatorname{div}$, оператор Δ^{-1} понимается как мультипликатор с символом $-|\zeta|^{-2}$, ω — вес вида (7) такой, что $f \in H_\omega^{-1}$. Нелинейный оператор

$$\mathcal{M}\colon\ H_\omega^1 \to \left(H_\omega^1\right)^*$$

понимается в смысле равенства

$$(\mathcal{M}u, \varphi) = \int \omega TA(x, Du)\, D\varphi\, dx \quad \forall\, \varphi \in H_\omega^1.$$

Покажем, что оператор $\mathcal{M}$ липшиц-непрерывен. Согласно лемме 1 и в силу ограниченности проекторов Рисса в L_2 со степенным весом $|x|^a$, $a \in (-n, n)$, оператор T будет ограничен в $L_{2,\omega}$ при $a, b \in (-n, n)$. Поэтому для u, v, $\varphi \in H_\omega^1$ имеем

$$|(\mathcal{M}u - \mathcal{M}v, \varphi)| \le \|TA(x, Du) - TA(x, Dv)\|_\omega \|D\varphi\|_\omega \le$$

$$\le c\|A(x, Du) - A(x, Dv)\|_\omega \|D\varphi\|_\omega \le$$

$$\le c\|Du - Dv\|_\omega \|D\varphi\|_\omega.$$

Покажем, что оператор $\mathcal{M}$ сильно монотонен, т. е.

$$(\mathcal{M}u - \mathcal{M}v, u - v) \ge c\left\|u - v; H_\omega^1\right\|^2 \quad \forall\, u,\ v \in H_\omega^1.$$

Представим функцию A в виде $A(x, \xi) = \xi + B(x, \xi)$, где по условию (10)

$$|B(x, \xi) - B(x, \eta)| \le K|\xi - \eta|. \tag{17}$$

Тогда

$$\mathcal{M}u = \operatorname{div}(\omega Du) + \operatorname{div}(\omega TB(x, Du)).$$

Для произвольных u, $v \in H_\omega^1$ по неравенству Гельдера получаем

$$(\mathcal{M}u - \mathcal{M}v, u - v) \ge \|Du - Dv\|_\omega^2 -$$

$$- \|TB(x, Du) - TB(x, Dv)\|_\omega \|Du - Dv\|_\omega.$$

Далее, с учетом (17) имеем

$$\|TB(x, Du) - TB(x, Dv)\|_\omega \le T_\omega \|B(x, Du) - B(x, Dv)\|_\omega \le$$

$$\le T_\omega K\|Du - Dv\|_\omega,$$

откуда в свою очередь,

$$(\mathcal{M}u - \mathcal{M}v, u - v) \ge (1 - KT_\omega)\|Du - Dv\|_\omega^2.$$

В силу лемм 1, 2 с учетом условия теоремы a, $b \in (-a^*, a^*)$ получаем сильную монотонность оператора $\mathcal{M}$.

По следствию 2.3 из [2, с. 97] сильно монотонный липшиц-непрерывный оператор имеет обратный, который также сильно монотонен и липшиц-непрерывен. Поэтому система $\mathcal{M}u = g$ однозначно разрешима для любой функции $g \in \left(H_\omega^1\right)^*$, причем

$$\left\| u; H^1_\omega \right\| \asymp \left\| g; \left(H^1_\omega\right)^* \right\| \tag{18}$$

(это следует из липшицевости с учетом $\mathcal{M}0 = 0$).

Покажем, что для $g = \operatorname{div}(\omega D \Delta^{-1} f)$ выполнено

$$\left\| g; \left(H^1_\omega\right)^* \right\| \asymp \left\| f; H^{-1}_\omega \right\|. \tag{19}$$

Имеем

$$\left\| g; \left(H^1_\omega\right)^* \right\| \le \| D\Delta^{-1} f \|_\omega = \| (DI_1) I_1 f \|_\omega, \tag{20}$$

где I_1 — мультипликатор с символом $|\zeta|^{-1}$. Известно, что это определение I_1 отличается от определения (8) только на числовой множитель, что для нас не существенно. Оператор DI_1, переводящий скалярные функции в вектор-функции размерности n, состоит из проекторов Рисса. Их ограниченность в $L_{2,\omega}$ устанавливается полностью аналогично лемме 1. Поэтому из (20) следует

$$\left\| g; \left(H^1_\omega\right)^* \right\| \le c \left\| f; H^{-1}_\omega \right\|.$$

Для получения обратного неравенства применим функционал g к функции $v = \Delta^{-1} f \in H^1_\omega$:

$$\left\| g; \left(H^1_\omega\right)^* \right\| \ge (g, v) \left\| v; H^1_\omega \right\|^{-1} = \| D\Delta^{-1} f \|_\omega.$$

Учитывая равенство $I_1 f = I_1 \operatorname{div}(D\Delta^{-1} f)$ и ограниченность оператора $I_1 \operatorname{div}$ в $L_{2,\omega}$, получаем

$$c \left\| g; \left(H^1_\omega\right)^* \right\| \ge \left\| f; H^{-1}_\omega \right\|.$$

Из (18), (19) следует, что решение системы (16) удовлетворяет (15).

Покажем, что решение системы (16) является также решением системы (1). Уравнение

$$\operatorname{div}(\omega D \varphi) = \Delta \psi,$$

понимаемое в смысле

$$\int \omega D\varphi\, Dv\, dx = \int D\psi\, Dv\, dx \quad \forall\, v \in H^1_\omega,$$

имеет решение $\varphi \in H^1_\omega$ при $\psi \in H^1_{1/\omega}$, поскольку оператор $\operatorname{div} \omega D \colon H^1_\omega \to \left(H^1_\omega\right)^*$ ограничен и сильно монотонен. Из $u \in H^1_\omega$, $f \in H^{-1}_\omega$ следует $\Delta^{-1}(\operatorname{div} A(x, Du) - f) \in H^1_\omega$, поэтому для произвольного $\psi \in H^1_{1/\omega}$ при соответствующем выборе φ получаем

$$0 = \int \omega D\Delta^{-1}(\operatorname{div} A(x, Du) - f)\, D\varphi\, dx =$$

$$= \int D\Delta^{-1}(\operatorname{div} A - f)\, D\psi\, dx = \int (A - D\Delta^{-1} f)\, D\psi\, dx.$$

Если, кроме того, ψ финитная, то

$$-\int D\Delta^{-1} f\, D\psi\, dx = \int \Delta\Delta^{-1} f\, \psi\, dx = \int f\, \psi\, dx.$$

Тем самым доказано существование решения системы (1), удовлетворяющего (15) при некотором ω. Справедливость оценки (15) для любого ω, для которого $f \in H_\omega^{-1}$, вытекает из единственности, доказываемой ниже.

Единственность решения системы (1) имеет место для более широкого пространства, чем в теореме 4.

Теорема 5. *Система* (1) *имеет не более одного решения в пространстве* $H^1_{a,b}$ *при* $a = a^*$, $b = -a^*$.

Доказательство. Пусть $u, v \in H^1_{a,b}$ — два решения системы (1), $a = a^*$, $b = -a^*$. Определим вес ω формулой

$$\omega(x) = \left[|x|^a + 1 + \int |x-y|^{-a} d\sigma(y)\right]^{-1},$$

где σ — конечная борелевская мера такая, что $u, v \in H^1_\omega$. Легко видеть, что такая σ существует: если $u \in H^1_\pi$, $v \in H^1_\rho$,

$$\pi(x) = \left[|x|^{-b} + \int |x-y|^{-a} d\mu(y)\right]^{-1},$$

$$\rho(x) = \left[|x|^{-b} + \int |x-y|^{-a} d\nu(y)\right]^{-1},$$

то достаточно взять $\sigma = \mu + \nu$. Из $u, v \in H^1_\omega$ следует $\Delta^{-1}\operatorname{div}(\omega D(u - v)) \in H^1_{1/\omega}$, поэтому справедливо интегральное тождество

$$\int (A(x, Du) - A(x, Dv))\, D\Delta^{-1}\operatorname{div}(\omega D(u-v))\, dx = 0.$$

Представляя A в виде $A(x,\xi) = \xi + B(x,\xi)$ и учитывая (17), находим

$$0 = \|Du - Dv\|_\omega^2 + \int (B(x, Du) - B(x, Dv))\, T(\omega D(u-v))\, dx \geq$$

$$\geq \|Du - Dv\|_\omega^2 - K\|Du - Dv\|_\omega \|T(\omega D(u-v))\|_{1/\omega}, \tag{21}$$

где, как и выше, $T = D\Delta^{-1}\operatorname{div}$. Для произвольной функции $\varphi \in L_{2,1/\omega}$ имеем

$$\|T\varphi\|_{1/\omega}^2 = \int |T\varphi|^2 \left(|x|^{-b} + 1 + \int |x-y|^{-a} d\sigma(y)|\right) dx =$$

$$= \int |T\varphi|^2 |x|^{-b} dx + \int |T\varphi|^2 dx + \int \left(\int |T\varphi|^2 |x-y|^{-a} dx\right) d\sigma(y) \leq$$

$$\leq T_{-b}^2 \int \varphi^2 |x|^{-b} dx + \int \varphi^2 dx + T_{-a}^2 \int\int \varphi^2 |x-y|^{-a} d\sigma(y)\, dx,$$

где перемена порядка интегрирования допустима по теореме Фубини, T_a — норма оператора T в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n; |x|^a)$ (строго говоря, в декартовом произведении n таких пространств). Поскольку $T_a = 1/K$, при $a = \pm a^*$, имеем

$$\|T\varphi\|_{1/\omega}^2 \leq K^2\left[\|\varphi\|_{1/\omega}^2 - \left(1 - K^2\right)\|\varphi; L_2\|^2\right].$$

Из (21) получаем

$$\|Du - Dv\|_\omega^2 -$$

$$- \|Du - Dv\|_\omega K^2\left[\|Du - Dv\|_\omega^2 - \left(1-K^2\right)\|\omega D(u-v)\|^2\right]^{1/2} \leq 0,$$

откуда следует $\|\omega D(u-v)\| \leq 0$. Так как вес ω почти всюду положителен, заключаем, что $u - v$ — постоянный вектор, т. е. $u = v$ в смысле $H^1_{a,b}$.

4. Регулярность решений. Приведем без доказательства результат о локальном повышении регулярности решений системы (1) в шкале пространств $H^1_{a,b}$ вплоть до совпадения со стандартным обобщенным решением из H^1, если правая часть имеет соответствующую регулярность. Вопрос о дальнейшем повышении регулярности обобщенных решений из $H^1 = W_2^1$ исследован в [4, 5].

Поскольку повышение регулярности исследуется локально, вместо $H^1_{a,b}$ используем пространства H^1_a, определяемые аналогично $H^1_{a,b}$ по весовым функциям

$$\omega(x) = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |x-y|^{-a}\, d\sigma(y) \right)^{-1}.$$

Теорема 6. *Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $u \in H^1_{a,\mathrm{loc}}(\Omega)$ — решение системы* (1) *в Ω, $a = a^*$. Тогда если $f \in H^{-1}_{b,\mathrm{loc}}(\Omega)$ для некоторого b, $0 \le b < a$, то $u \in H^1_{b,\mathrm{loc}}(\Omega)$.*

5. Оценка нормы модельного оператора. Для оператора $T = D\Delta^{-1}\operatorname{div}$, как и выше, обозначим через T_a его норму в весовом пространстве $(L_2(\mathbb{R}^n; |x|^a))^n$, см. (12).

Теорема 7. *При $a \in (-n, n)$ справедливы равенства*

$$T_a^2 = \max_{j=1,2,\ldots} M(a, \lambda_j),$$

$$M(a,\lambda) = 1 + a^2 \left(\lambda^{1/2} + \lambda^{-1/2} \frac{(n-2)^2 - a^2}{4} \right)^{-2}, \quad \lambda_j = j(j+n-2).$$

Отметим, что функция $M(a) = \max\{M(a,\lambda_j)\colon j = 1, 2, \ldots\}$ легко вычисляется. Действительно, $M(a,\lambda)$ возрастает по λ при $0 < \lambda < ((n-2)^2 - a^2)/4$ (если этот интервал не пуст), и убывает по λ при $\lambda > \max\{0; ((n-2)^2 - a^2)/4\}$. Поэтому $M(a) = \max\{M(a,\lambda_j), M(a,\lambda_{j+1})\}$, где j определяется условием $\lambda_j \le ((n-2)^2 - a^2)/4 \le \lambda_{j+1}$. Решая уравнение $M(a,\lambda_j) = M(a,\lambda_{j+1})$ относительно a, получаем

$$M(a) = M(a,\lambda_j) \quad \text{при} \quad a_j \le |a| < a_{j-1},$$

$$a_0 = n, \quad a_j = \max(0; (n-2)^2 - 4(\lambda_j\lambda_{j+1})^{1/2})^{1/2}, \quad j \ge 1.$$

Отметим также, что

$$M(a) = M(a,\lambda_1) = 1 + a^2(n-1)\left(\frac{n^2 - a^2}{4}\right)^{-2} \quad \forall\, a \in (-n, n), \quad n \le 8,$$

а для $n > 8$ $a_1 < n-4$.

***Замечание* 3.** В полученных результатах для системы (1) важнейшую роль играет число $a^* \in (0, n)$ — корень уравнения $T_a = 1/K$. Оно вычисляется по формуле

$$a^* = \left(\frac{4\lambda_j}{1-K^2} + (n-2)^2 \right)^{1/2} - \left(\frac{4K^2\lambda_j}{1-K^2} \right)^{1/2} \quad \text{при} \quad K_{j-1} \le K \le K_j,$$

$$K_0 = 0, \quad K_j = \min\left\{1; \frac{\left(\lambda_{j+1}^{1/2} + \lambda_j^{1/2}\right)^2}{(n-2)^2 + \left(\lambda_{j+1}^{1/2} - \lambda_j^{1/2}\right)^2}\right\}, \quad j \geq 1.$$

Отметим, что $K_1 = 1$ при $n \leq 8$, откуда

$$a^* = \left(\frac{n^2 - K^2(n-2)^2}{1-K^2}\right)^{1/2} - 2K\left(\frac{n-1}{1-K^2}\right)^{1/2} \qquad \forall\, K \in (0,1), \quad n \leq 8,$$

а также, что при $n = 2$ формула упрощается:

$$a^* = 2\left(\frac{1-K}{1+K}\right)^{1/2}, \quad n = 2.$$

Доказательство теоремы 7. *Шаг* 1. Пусть $\lambda > 0$, $a^2 < (n-2)^2 + 4\lambda$, $u(r)$ — функция на $(0,\infty)$ с конечной нормой

$$|u|_a^2 = \int_0^\infty \left(u'^2 + \lambda r^{-2} u^2\right) r^{a+n-1} dr, \tag{22}$$

штрих обозначает дифференцирование по r. Тогда для решения v на $(0,\infty)$ задачи

$$(v' r^{n-1})' - \lambda r^{n-3} v = (u' r^{a+n-1})' - \lambda r^{a+n-3} u, \quad |v|_{-a} < \infty, \tag{23}$$

справедлива оценка

$$|v|_{-a}^2 \leq M(a,\lambda)\, |u|_a^2. \tag{24}$$

В самом деле, уравнение для v является уравнением Эйлера. Решая его методом неопределенных коэффициентов, получаем

$$v = u r^a - \frac{q_2}{\Delta} r^{q_1} v_1 + \frac{q_1}{\Delta} r^{q_2} v_2, \tag{25}$$

$$v_1 = a \int_0^r u_1(\rho)\, \rho^{a-1} d\rho, \quad v_2 = a \int_{+\infty}^r u_2(\rho)\, \rho^{a-1} d\rho,$$

$u_1 = u r^{-q_1}$, $u_2 = u r^{-q_2}$, q_1, q_2 — корни характеристического уравнения

$$q^2 + (n-2) q - \lambda = 0, \qquad q_1 < 0 < q_2,$$

$$\square \qquad \square \qquad \square\Delta = q_2 - q_1 = \left((n-2)^2 + 4\lambda\right)^{1/2}.$$

То, что $|v|_{-a} < \infty$, следует из $|u|_a < \infty$ ввиду неравенства Харди

$$\int_0^\infty z'^2 r^{\alpha+1} dr \geq \frac{\alpha^2}{4} \int_0^\infty z^2 r^{\alpha-1} dr,$$

$\alpha \in \mathbb{R}$, функция z удовлетворяет условию

$$\begin{aligned} &\liminf_{r\to\infty} z^2(r) r^\alpha = 0 \quad \text{при} \quad \alpha > 0, \\ &\liminf_{r\to 0} z^2(r) r^\alpha = 0 \quad \text{при} \quad \alpha < 0. \end{aligned} \tag{26}$$

Оценим норму v. Поскольку v — решение задачи (23) и функция u является допустимой пробной функцией в интегральном тождестве, имеем

$$|v|_{-a}^2 - |u|_a^2 \equiv$$
$$\equiv \int \left[(v' - u'r^a)(v'r^{-a} + u') + \lambda r^{-2}(v - ur^a)(vr^{-a} + u)\right] r^{n-1}\,dr =$$
$$= \int \left[(v' - u'r^a)^2 + \lambda r^{-2}(v - ur^a)^2\right] r^{-a+n-1}\,dr.$$

С учетом формул Виета для корней квадратного уравнения имеем

$$v' = u'r^a + \frac{\lambda}{\Delta}(r^{q_1-1}v_1 - r^{q_2-1}v_2),$$

откуда, в свою очередь,

$$|v|_{-a}^2 - |u|_a^2 = \frac{\lambda}{\Delta}\int (q_2 v_1^2 r^{-\Delta} - q_1 v_2^2 r^{\Delta})\, r^{-a-1}\,dr. \tag{27}$$

По неравенству Харди отсюда следует

$$|v|_{-a}^2 - |u|_a^2 \le a^2\,\frac{\lambda}{\Delta}\left[q_2\left(\frac{2}{\Delta+a}\right)^2 - q_1\left(\frac{2}{\Delta-a}\right)^2\right]\int u^2 r^{a+n-3}\,dr,$$

справедливость условия (26) для v_1, v_2 обеспечивается исходным предположением $|a| < \Delta$. Учитывая, что $q_2 = (\Delta+2-n)/2$, $-q_1 = (\Delta+n-2)/2$, после арифметических преобразований получаем

$$|v|_{-a}^2 - |u|_a^2 \le 4a^2\lambda(\Delta^2 - a^2)^{-2}(\Delta^2 + a^2 + 2a(n-2))\int u^2 r^{a+n-3}\,dr.$$

Ввиду неравенства Харди справедливы соотношения

$$|u|_a^2 \ge \left(\left(\frac{a+n-2}{2}\right)^2 + \lambda\right)\int u^2 r^{a+n-3}\,dr =$$
$$= \frac{1}{4}(\Delta^2 + a^2 + 2a(n-2))\int u^2 r^{a+n-3}\,dr,$$

откуда вытекает оценка (24):

$$|v|_{-a}^2 - |u|_a^2 \le 16a^2\lambda(\Delta^2 - a^2)^{-2}|u|_a^2 = (M(a,\lambda) - 1)\,|u|_a^2.$$

Шаг 2. Пусть $|a| < n$, u — функция в $\mathbb{R}^n$ с конечной нормой

$$\|Du\|_a = \|Du; L_2(\mathbb{R}^n; |x|^a)\|.$$

Тогда для решений уравнения

$$\Delta v = \operatorname{div}(r^a Du) \tag{28}$$

таких, что $\|Dv\|_{-a} < \infty$, справедлива оценка

$$\|Dv\|_{-a}^2 \le M(a)\,\|Du\|_a^2. \tag{29}$$

Установим справедливость этой оценки. Пусть (r, θ) — полярные координаты с полюсом в нуле. Разложим u, v в ряд по полной ортонормированной системе сферических функций $Y_j(\theta)$, $j = 0, 1, \ldots$, соответствующих собственным числам $\lambda_j = j(j+n-2)$ оператора Лапласа–Бельтрами на единичной сфере (индекс, указывающий кратность λ_j, для краткости опускаем). Имеем

$$u(x) = \sum_{j=0}^{\infty} u_j(r)\, Y_j(\theta), \qquad u_j(r) \equiv \int\limits_S u(r,\theta)\, Y_j(\theta)\, d\theta\,,$$

и аналогично для v. Для коэффициентов разложения v_j уравнение (28) переходит в (23) с $\lambda = \lambda_j$, $u = u_j$. Для норм имеем

$$\|Du\|_a^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \int (u_j'^2 + \lambda_j r^{-2} u_j^2)\, r^{a+n-1}\, dr \equiv \sum_j U_j\,,$$

$$\|Dv\|_{-a}^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \int (v_j'^2 + \lambda_j r^{-2} v_j^2)\, r^{-a+n-1}\, dr \equiv \sum_j V_j\,,$$

и ввиду шага 1

$$V_j \le M(a,\lambda_j)\, U_j \le M(a)\, U_j, \quad j \ge 1,$$

так как $(n-2)^2 + 4\lambda_j \ge n^2 > a^2$ при $j \ge 1$. Это также гарантирует сходимость ряда $\sum_j v_j Y_j$ в $L_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n \setminus 0)$.

При $j = 0$ решение порождаемого (28) уравнения имеет вид

$$v_0(r) = \int^r u_0'(\rho)\, \rho^a\, d\rho\,,$$

нижний предел произвольный. Тогда

$$V_0 = \int v_0'^2 r^{-a+n-1}\, dr = \int u_0'^2 r^{a+n-1}\, dr = U_0 \le M(a)\, U_0,$$

что завершает доказательство (29).

Шаг 3. Докажем оценку $T_a^2 \le M(a)$.

Пусть $f = (f_1, \ldots, f_n)$ — ограниченная функция с компактным носителем (достаточно ограничиться такими функциями, поскольку они плотны в $L_2(\mathbb{R}^n; |x|^a)$ при $a \in (-n, n)$). Тогда определена функция $u = \Delta^{-1} \operatorname{div} f$, и в силу ограниченности проекторов Рисса $\|Du\|_a < \infty$. Пусть $R < \infty$, $B_R = \{x : |x| < R\}$, $\varphi \in \overset{\circ}{C}{}^{\infty}(B_{2R})$ — срезающая функция: $0 \le \varphi \le 1$, $\varphi = 1$ в B_R, $|D\varphi| \le c/R$. Обозначим $Q = B_{2R} \setminus B_R$, u_Q — среднее значение u по множеству Q. Пусть v — решение (28), v_Q — среднее значение v по Q. Тогда

$$\int |Du|^2 \varphi r^a dx = \int Du\, D((u - u_Q)\,\varphi)\, r^a dx + \ldots =$$

$$= \int Dv \cdot D((u - u_Q)\,\varphi)\, dx + \ldots = \int \varphi\, Dv\, Du\, dx + \ldots =$$

$$= \int D((v - v_Q)\,\varphi)\, Du\, dx + \ldots = \int D((v - v_Q)\,\varphi)\, f\, dx + \ldots =$$

$$= \int f \varphi\, Dv\, dx + \ldots,$$

где под многоточием подразумеваются члены, содержащие производную φ. По неравенству Гельдера и неравенству Пуанкаре они оцениваются величиной $R^a \|Du; L_2(Q)\|^2 + R^{-a} \|Dv; L_2(Q)\|^2$, стремящейся к нулю при $R \to \infty$ по абсолютной непрерывности интеграла, так как $\|Du\|_a$, $\|Dv\|_{-a} < \infty$. Следовательно,

$$\|Du\|_a^2 = \int f\, Dv\, dx.$$

По неравенству Гельдера и ввиду шага 2 получаем

$$\|Du\|_a^2 \le \|Dv\|_{-a}\|f\|_a \le M(a)^{1/2}\|Du\|_a\|f\|_a,$$

откуда с учетом $Du = Tf$ следует искомая оценка.

Шаг 4. Докажем, что $T_a^2 \ge M(a)$.

Для решения уравнения (28) имеем

$$\|Dv\|_{-a} = \|T(r^a Du)\|_{-a} \le T_{-a}\|Du\|_a = T_a\|Du\|_a,$$

поэтому для наилучшей константы в (29) справедливо неравенство $M(a) \le T_a^2$. Чтобы показать точность приведенной в теореме константы $M(a)$, достаточно рассмотреть функцию $u(x) = r^\alpha\varphi(r)Y_j(\theta)$, $\alpha = (2-n-a)/2$, j определяется условием $a_j \le |a| < a_{j-1}$, φ — срезающая функция: $0 \le \varphi \le 1$, $\varphi(r) = 1$ при $1/R < r < R$, $\varphi(r) = 0$ при $r < 1/2R$ или $r > 2R$, $r|\varphi'(r)| \le c$, где R — произвольно большое положительное число. Решение соответствующего уравнения (28) имеет вид $v(r)Y_j(\theta)$, где $v(r)$ определяется формулой (25) при $\lambda = \lambda_j = j(j+n-2)$, $u(r) = r^\alpha\varphi(r)$. Для функций v_1, v_2, интегрируя по частям, находим

$$v_i(r) = \frac{a}{a+\alpha-q_i}\left(r^{a+\alpha-q_i}\varphi + w_i\right), \quad i = 1, 2,$$

$$|w_1(r)| \le cR^{q_1-\alpha-a}\chi(r-1/2R) + cR^{a+\alpha-q_1}\chi(r-R),$$

$$|w_2(r)| \le cR^{a+\alpha-q_2}\chi(2R-r) + cR^{q_2-\alpha-a}\chi(1/R-r),$$

где χ — характеристическая функция интервала $(0, +\infty)$. Подставляя эти выражения в (27), получаем

$$|v|_{-a}^2 - |u|_a^2 = a^2\frac{\lambda}{\Delta}\left[\frac{q_2}{(a+\alpha-q_1)^2}\int\left(\varphi + w_1 r^{-(\Delta+a)/2}\right)^2\frac{dr}{r} - \right.$$

$$\left. - \frac{q_1}{(a+\alpha-q_2)^2}\int\left(\varphi + w_2 r^{(\Delta-a)/2}\right)^2\frac{dr}{r}\right].$$

Учитывая $|a| < \Delta$, легко видеть, что интегралы от слагаемых, содержащих w_1, w_2, оцениваются константами, не зависящими от R. Поскольку $a+\alpha-q_1 = (a+\Delta)/2$, $a+\alpha-q_2 = (a-\Delta)/2$, аналогично шагу 1 имеем

$$|v|_{-a}^2 - |u|_a^2 = a^2\lambda(\Delta^2-a^2)^{-2}(\Delta^2+a^2+2a(n-2))\int\varphi^2\frac{dr}{r} + \text{const}.$$

Подставляя $r^\alpha\varphi(r)$ в (22), находим

$$|u|_a^2 \le \left(\left(\frac{a+n-2}{2}\right)^2 + \lambda\right)\int\varphi^2\frac{dr}{r} + \text{const}.$$

При $R \to \infty$

$$\int \varphi^2 \frac{dr}{r} \geq \int_{1/R}^{R} \frac{dr}{r} = 2\ln R \to \infty,$$

поэтому для построенных функций

$$|v|_{-a}^2 / |u|_a^2 \geq M(a, \lambda_j) - c/\ln R \to M(a).$$

Следовательно, константа $M(a)$ в (29) не может быть уменьшена, и неравенство $M(a) \leq T_a^2$ доказано.

6. **Системы с мерой.** Докажем теоремы 1, 2.

Доказательство теоремы 1. При $n \geq 3$ по теореме 7 $T_{n-2}^2 = 1 + (n-2)^2/(n-1)$, поэтому из (3) с учетом $K^2 \leq 1 - \lambda^2$ следует $T_{n-2} < 1/K$. Отсюда $a^* > n-2$, и по теореме 4 система (1) разрешима в $H_{a,0}^1$ для любого $f \in H_{a,0}^{-1}$ при некотором $a > n-2$. При $n = 2$ по теореме 4 система (1) разрешима в $H_{a,-a}^1$ для любого $f \in H_{a,-a}^{-1}$, $a \in (0, a^*)$. По теореме 3 получаем, что система (1) разрешима при $f = d\sigma/dx$, если σ — конечная борелевская мера в $\mathbb{R}^n$.

Оценка (4) следует из (15), (9).

Доказательство теоремы 2. Существование решения класса $H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n \setminus y)$ следует из теоремы 1.

Из (3) по теореме 7 следует $a^* > n-2$. При $n \geq 3$ положим $\omega(x) = (1 + (r/R)^{-a})^{-1}$, где $a \in (n-2, a^*)$, $r = |x-y|$, $R \in (0, \infty)$. Для $f(x) = h\delta(x-y)$ имеем $I_1 f(x) = h|x-y|^{1-n}$. Легко видеть, что $f \in H_\omega^{-1}$ с оценкой

$$\left\| f; H_\omega^{-1} \right\|^2 = \|I_1 f\|_\omega^2 = c|h|^2 \int_0^\infty \frac{r^{2-n}}{1 + (r/R)^{-a}} \frac{dr}{r} \asymp |h|^2 R^{2-n}.$$

Поскольку вес ω эквивалентен константе в кольце $Q = \{x\colon R < r < 2R\}$, с учетом (15) находим

$$\|Du; L_2(Q)\| \leq c\|Du\|_\omega \asymp \left\| f; H_\omega^{-1} \right\| \asymp |h| R^{1-n/2}.$$

При $n = 2$ следует положить

$$\omega(x) = ((r/R)^a + (r/R)^{-a})^{-1}, \quad a \in (0, a^*).$$

1. *Serrin J.* Local behaviour of solutions of quasilinear elliptic equations // Acta Math. – 1964. – **111**. – P. 247–302.
2. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1978. – 336 с.
3. *Cordes H. O.* Über die erste Randvertaufgabe bei quasilinear Differentialgleichungen zweiter Ordnung in mehr als zwei Variablen // Math. Ann. – 1956. – **131**. – S. 287–312.
4. *Koshelev A. I., Chelkak S. I.* Regularity of solutions of quasilinear elliptic systems. – Leipzig: Teubner, 1985. – 208 p.
5. *Калита Е. А.* О предельном порядке гладкости решений эллиптических систем второго порядка // Изв. вузов. Математика. – 1992. – № 3. – С. 10–17.
6. *Калита Е. А.* Об особых точках решений нелинейных эллиптических уравнений и систем высокого порядка // Мат. сб. – 1993. – **184**, № 7. – С. 117–141.
7. *Дынькин Е. М., Осиленкер Б. П.* Весовые оценки сингулярных интегралов и их приложения // ВИНИТИ. Мат. анализ. – 1981. – **21**. – С. 42–129.

Получено 10.04.95