УДК 517. 5

М. І. Нагнибіда (Чернівец. ун-т)

ПРО ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ У ПРОСТОРАХ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ ОПЕРАТОРІВ ЕЙЛЕРА – ПОММ'Є

In the space $A(\theta)$ of all one-valued functions $f(z)$ analytic in an arbitrary region $G \subset \mathbb{C}$ $(0 \in G)$ with the topology of compact convergence, we establish necessary and sufficient conditions for the equivalence of the operators $L_1 = \alpha_n z^n \Delta^n + \ldots + \alpha_1 z\Delta + \alpha_0 E$ and $L_2 = z^n a_n(z)\Delta^n + \ldots + za_1(z)\Delta + a_0(z)E$, where $\Delta : (\Delta f)(z) = (f(z) - f(0))/z$ is the Pommier operator in $A(G)$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n \in \mathbb{C}$, $a_k(z) \in A(G)$, $0 \le k \le n$, and the following condition is satisfied: $\sum_{j=s}^{n-1} \alpha_{j+1} \ne 0$, $s = 0, 1, \ldots, n-1$. We also prove that the operators $z^{s+1}\Delta + \beta(z)E$, $\beta(z) \in A_R$, $s \in \mathbb{N}$, and $z^{s+1}\Delta$ are equivalent in the spaces A_R, $0 < R \le \infty$, if and only if $\beta(z) = 0$.

У просторі $A(\theta)$ всіх однозначних аналітичних у довільній області $G \subset \mathbb{C}$ $(0 \in G)$ функцій $f(z)$ з топологією компактної збіжності встановлено необхідні і достатні умови еквівалентності операторів $L_1 = \alpha_n z^n \Delta^n + \ldots + \alpha_1 z\Delta + \alpha_0 E$ і $L_2 = z^n a_n(z)\Delta^n + \ldots + za_1(z)\Delta + a_0(z)E$, де Δ : $(\Delta f)(z) = (f(z) - f(0))/z$ — оператор Помм'є в $A(G)$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n \in \mathbb{C}$, $a_k(z) \in A(G)$, $0 \le k \le n$, і виконується умова $\sum_{j=s}^{n-1} \alpha_{j+1} \ne 0$, $s = 0, 1, \ldots, n-1$. Доведено також, що оператори $z^{s+1}\Delta + \beta(z)E$, $\beta(z) \in A_R$, $s \in \mathbb{N}$, і $z^{s+1}\Delta$ еквівалентні в просторах A_R, $0 < R \le \infty$, тоді і тільки тоді, коли $\beta(z) = 0$.

Нехай G — довільна область у комплексній площині $\mathbb{C}$ і $0 \in G$. Через $A(G)$ позначимо простір усіх однозначних і аналітичних в G функцій з топологією компактної збіжності [1], а символами $\mathcal{L}(A(G), A(G))$ і $\mathcal{L}^0(A(G), A(G))$ — відповідно множину всіх лінійних неперервних операторів, що діють з $A(G)$ в $A(G)$, та її підмножину, яка складається з ізоморфізмів простору $A(G)$ на себе (тобто тих і тільки тих операторів T з $\mathcal{L}(A(G), A(G))$, для яких існує обернений оператор T^{-1} і $T^{-1} \in \mathcal{L}(A(G), A(G))$).

Нехай далі Δ — оператор Помм'є в просторі $A(G)$, тобто

$$(\Delta f)(z) = \frac{f(z) - f(0)}{z} \quad \forall f(z) \in A(G).$$

Відомо, що оператори $L_i \in \mathcal{L}(A(G), A(G))$, $i = 1, 2$, називаються еквівалентними між собою $(L_1 \sim L_2)$ в просторі $A(G)$, якщо існує таке відображення T з $\mathcal{L}^0(A(G), A(G))$, що $TL_1 = L_2 T$ (або ж $L_2 = TL_1T^{-1}$). Оператор T називається при цьому оператором перетворення L_1 в L_2.

У просторах аналітичних функцій задача про еквівалентність операторів розв'язувалася в першу чергу для диференціальних та інтегральних операторів, з якими пов'язане саме поняття аналітичної функції (з цього приводу див., наприклад, [2]).

Зокрема, в просторах A_R (тобто просторах $A(G)$, якщо G є кругом $K_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$, де $0 < R \le \infty$) будь-який звичайний лінійний диференціальний оператор

$$L = D^n + a_1(z)D^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(z)D + a_n(z)E \tag{1}$$

$D = d/dz$; $a_k(z) \in A_R$, $k = 1, 2, \ldots, n$; $n \in \mathbb{N}$; E — оператор тотожного перетворення, завжди еквівалентний до оператора D^n [3–6, 2]. Знаходилися також умови еквівалентності диференціального оператора з регулярною особливою точкою

$$L = z^n D^n + z^{n-1} a_1(z) D^{n-1} + \ldots + z a_{n-1}(z) D + a_n(z) E, \tag{2}$$

де $a_j(z) \in A(G)$, і відповідного йому оператора Ейлера

$$L_0 = z^n D^n + z^{n-1} a_1(0) D^{n-1} + \ldots + z a_{n-1}(0) D + a_n(0) E. \tag{3}$$

Певні достатні умови еквівалентності операторів L і L_0 в просторі A_R наведено в [7, 8]. У [9] знайдено необхідні і достатні умови еквівалентності в A_R деяких спеціальних операторів вигляду (2) і (3) при $n = 2$, а в [10] — при $n = 3$. У згаданих роботах умови еквівалентності вказаних диференціальних операторів знаходяться матричним методом і виражаються через тейлорові коефіцієнти функцій $a_j(z)$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

В [11, 12] одержано критерій еквівалентності операторів L і L_0 для довільного n відповідно в просторах A_R і $A(G)$, де G — обмежена і зіркоподібна відносно нуля область в комплексній площині, яка задовольняє умову: до області G разом з точкою z належать також точки $z \exp[(1-\varepsilon_m)\ln t]$, $m = 1, \ldots, n-1$; $t \in [0; 1]$; $\varepsilon_m = \exp(2\pi i m/n)$, де у $\ln t$ береться головне значення. Цей критерій формулюється в термінах власних функцій оператора L.

Оскільки, починаючи з [13], увагу математиків все більше стали привертати оператори D_α узагальненого диференціювання Гельфонда – Леонтьєва, то, звичайно, виникає питання про еквівалентність в A_R оператора D_α^n і оператора вигляду (1), якщо в ньому звичайне диференціювання D замінити узагальненим D_α. Тут слід згадати в першу чергу роботу [14], в якій розглядалося таке диференціювання D_α Гельфонда – Леонтьєва, що породжується цілою функцією скінченного порядку зростання і скінченного типу (тобто вона в деякому розумінні „близька" до функції $\exp z$, яка породжує звичайне диференціювання D).

А що можна сказати про еквівалентність вказаних операторів, якщо перейти до узагальненого диференціювання D_α, породжуюча функція якого „далека" від експоненціальної ? Тут заслуговує уваги саме оператор Помм'є, породжений функцією $1/(1-z)$. Вже при $n = 1$ в [15] встановлено факт, який кардинально відрізняється від результатів з робіт [3, 4]: оператори $\Delta + \varphi(z)E$ $(\varphi(z) \in A_R)$ і Δ еквівалентні між собою тоді і тільки тоді, коли $\varphi(z) \equiv 0$.

У [16] та [17] вивчені умови еквівалентності в просторі A_R $(0 < R \leq \infty)$ операторів Δ^n і

$$L = \Delta^n + \varphi_1(z)\Delta^{n-1} + \ldots + \varphi_{n-1}(z)\Delta + \varphi_n(z)E,$$

де $\varphi_k(z) \in A_R$, $k = 1, 2, \ldots, n$, а n, $n \geq 2$, — довільне натуральне число. Одержані результати також досить істотно відрізняються від відповідних результатів [3, 4] для звичайних диференціальних операторів.

Мета цієї роботи — дослідження (при одному вказаному далі додатковому припущенні) умов еквівалентності в просторі $A(G)$ операторів

$$L_1 = \alpha_n z^n \Delta^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} \Delta^{n-1} + \ldots + \alpha_1 z \Delta + \alpha_0 E \tag{4}$$

$$L_2 = z^n a_n(z) \Delta^n + z^{n-1} a_{n-1}(z) \Delta^{n-1} + \ldots + z a_1(z) \Delta + a_0(z) E, \tag{5}$$

де $n \in \mathbb{N}$ і відповідно α_k, $k = 0, 1, \ldots, n$, — фіксовані комплексні числа, а $a_k(z)$, $0 \le k \le n$, — фіксовані функції з простору $A(G)$. Такі оператори природно називати операторами Ейлера – Помм'є. Досліджуються також оператори $z^{s+1}\Delta + \beta(z)E$ і $z^{s+1}\Delta$, $s \in \mathbb{N}$.

1. Почнемо із знаходження необхідних умов еквівалентності в просторі $A(G)$ операторів (4) і (5). З цією метою спочатку зауважимо, що (див. (4)) для будь-якої функції $f(z)$ з простору $A(G)$, очевидно,

$$(L_1 f)(z) = (\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n) f(z) - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \sum_{s=0}^{j-1} \frac{f^{(s)}(0)}{s!} z^s, \tag{6}$$

оскільки

$$(\Delta^m f)(z) = z^{-m}\left(f(z) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} z^j \right); \quad m \in \mathbb{N},$$

і відповідно

$$(L_2 f)(z) = (a_0(z) + a_1(z) + \ldots + a_n(z)) f(z) - \sum_{j=1}^{n} a_j(z) \sum_{s=0}^{j-1} \frac{f^{(s)}(0)}{s!} z^s. \tag{7}$$

Крім того, зображення (6) і (7) можна записати також у вигляді

$$(L_1 f)(z) = \beta f(z) - \sum_{s=0}^{n-1} \frac{f^{(s)}(0)}{s!} \beta_s z^s \tag{8}$$

і

$$(L_2 f)(z) = b(z) f(z) - \sum_{s=0}^{n-1} \frac{f^{(s)}(0)}{s!} z^s b_s(z), \tag{9}$$

де

$$\beta = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k, \quad b(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k(z), \quad \beta_s = \sum_{j=s}^{n-1} \alpha_{j+1}, \quad b_s(z) = \sum_{j=s}^{n-1} a_{j+1}(z).$$

Надалі будемо вважати, що $\beta_s \ne 0$, $s = 0, 1, \ldots, n-1$.

Якщо тепер існує такий $T \in \mathcal{L}^0(A(G), A(G))$, що $TL_1 = L_2 T$, то з урахуванням зображень (6) і (7) одержуємо такі співвідношення:

$$\left(\sum_{j=0}^{n} a_j(z) - \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \right) (Tf)(z) = \sum_{j=1}^{n} a_j(z) \sum_{s=0}^{j-1} \frac{(Tf)^{(s)}(0)}{s!} z^s -$$

$$- \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \sum_{s=0}^{j-1} \frac{f^{(s)}(0)}{s!} T z^s \quad \forall f(z) \in A(G). \tag{10}$$

Оскільки (див. (10)) кожний нуль функції

$$\gamma(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j(z) - \sum_{j=0}^{n} \alpha_j$$

є в той же час нулем (не меншої кратності) правої частини одержаного співвідношення, у випадку $\gamma(z) \not\equiv 0$ множина $\operatorname{Im} T$ значень оператора T може бути тільки деяким $2n$-мірним підпростором простору $A(G)$. Це випливає з очевидної рівності

$$(Tf)(z) = \frac{1}{\gamma(z)}\left[\sum_{j=1}^{n} a_j(z) \sum_{s=0}^{j-1} \frac{(Tf)^{(s)}(0)}{s!} z^s - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \sum_{s=0}^{j-1} \frac{f^{(s)}(0)}{s!} Tz^s\right]$$
$$\forall f(z) \in A(G).$$

Тому $\operatorname{im} T \neq A(G)$ і, таким чином, $T \notin \mathcal{L}^0(A(G), A(G))$.

Отже, однією з необхідних умов еквівалентності операторів L_1 і L_2 в просторі $A(G)$ є така:

$$\sum_{j=0}^{n} a_j(z) \equiv \sum_{j=0}^{n} \alpha_j. \tag{11}$$

При її виконанні (див. (10))

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(z) \sum_{s=0}^{j-1} \frac{(Tf)^{(s)}(0)}{s!} z^s \equiv \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \sum_{s=0}^{j-1} \frac{f^{(s)}(0)}{s!} Tz^s$$

або ж

$$\sum_{s=0}^{n-1} \beta_s \frac{f^{(s)}(0)}{s!} Tz^s \equiv \sum_{s=0}^{n-1} \frac{(Tf)^{(s)}(0)}{s!} z^s b_s(z) \quad \forall f(z) \in A(G). \tag{12}$$

***Приклад* 1.** Якщо $L_1 = z\Delta + \alpha_0 E$, $\alpha_0 \in \mathbb{C}$, а $L_2 = z\Delta + a_0(z)E$, $a_0(z) \in \in A(G)$, то $L_2 \sim L_1$ тоді і тільки тоді, коли $a_0(z) \equiv \alpha_0$, тобто $L_2 = L_1$.

Далі скористаємося очевидним фактом, що для еквівалентних операторів збігаються як множини їх власних значень, так і розмірності підпросторів власних функцій, що відповідають одному й тому ж власному значенню. Таке твердження, зокрема, справедливе і для ядер відповідних операторів. Проте виділяти окремо нулі операторів ми не будемо. Вони трактуються тут як власні функції, що відповідають нульовому власному значенню.

Отже, нехай $\lambda \in \mathbb{C}$ і $\lambda \neq \beta$. Знайдемо розв'язки рівнянь $(L_1\varphi)(z) = \lambda\varphi(z)$ і $(L_2\psi)(z) = \lambda\psi(z)$. З урахуванням зображень (8) і (9) та умови (11) маємо, що всі власні функції $\varphi(z)$ і $\psi(z)$ відповідно операторів L_1 і L_2, які відповідають власному значенню λ, визначаються за допомогою співвідношень

$$(\beta - \lambda)\varphi(z) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(\nu)}(0)}{\nu!} \beta_\nu z^\nu \tag{13}$$

і

$$(\beta - \lambda)\psi(z) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{\psi^{(\nu)}(0)}{\nu!} z^\nu b_\nu(z). \tag{14}$$

З (13) і (14) видно, що функції $\varphi(z)$ і $\psi(z)$ повністю характеризуються першими n тейлоровими коефіцієнтами своїх розвинень в околі точки $z = 0$ в степеневі ряди. Ці величини шукаються як розв'язки систем, котрі одержуються з (13) і (14) за допомогою диференціювання в точці $z = 0$:

$$(\beta - \lambda - \beta_\nu)\varphi^{(\nu)}(0) = 0, \quad \nu = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{15}$$

$$\sum_{\nu=0}^{l-1} C_l^\nu b_\nu^{(l-\nu)}(0)\,\psi^{(\nu)}(0) + (b_l(0) - \beta + \lambda)\psi^{(l)}(0) = 0, \quad l = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{16}$$

Для одержання (16) потрібно скористатися тим, що, очевидно,

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{\psi^{(\nu)}(0)}{\nu!}(z^{\nu}b_{\nu}(z))^{(l)}\big|_{z=0} = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{\psi^{(\nu)}(0)}{\nu!} \sum_{s=0}^{l} C_l^s b_{\nu}^{(l-s)}(0)(z^{\nu})^{(s)}\big|_{z=0} =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{l} \psi^{(\nu)}(0) C_l^{\nu} b_{\nu}^{(l-\nu)}(0).$$

Тому ранги матриць систем (15) та (16) при кожному $\lambda \neq \beta$ повинні бути однаковими.

Покладемо $\lambda = \beta - \beta_s$, $s = 0, 1, \ldots, n-1$. Тоді з (15) видно, що ці числа є власними для оператора L_1 і їм відповідають власні функції z^s. Тому вони повинні бути власними й для оператора L_2 і, таким чином, матриці відповідних систем (див. (15) і (16))

$$M_s^{(1)} = \begin{Vmatrix} \beta_s - \beta_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \beta_s - \beta_1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \beta_s - \beta_{n-1} \end{Vmatrix}$$

та

$$M_s^{(2)} = \begin{Vmatrix} b_0(0) - \beta_s & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ C_1^0 b_0'(0) & b_1(0) - \beta_s & 0 & \ldots & 0 \\ C_2^0 b_0''(0) & C_2^1 b_1'(0) & b_2(0) - \beta_s & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ C_{n-1}^0 b_0^{(n-1)}(0) & C_{n-1}^1 b_1^{(n-2)}(0) & C_{n-1}^2 b_2^{(n-3)}(0) & \ldots & b_{n-1}(0) - \beta_s \end{Vmatrix}$$

також повинні мати рівні ранги для кожного s, $s = 0, 1, \ldots, n-1$.

Отже, одержано ще одну необхідну умову еквівалентності операторів L_1 і L_2 в просторі $A(G)$:

$$\operatorname{rang} M_s^{(2)} = \operatorname{rang} M_s^{(1)}, \quad s = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{17}$$

При цьому, очевидно, $\operatorname{rang} M_s^{(1)} \leq n-1$, $0 \leq s \leq n-1$.

Виявляється, що умови (11) і (17) є вже й достатніми для еквівалентності L_1 і L_2 в $A(G)$. Покажемо це.

Нехай s — фіксоване число і $0 \leq s \leq n-1$. Тоді якщо ранги матриць $M_s^{(1)}$ і $M_s^{(2)}$ дорівнюють $n - r_s$ (тобто серед $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$ є точно r_s рівних між собою чисел), система (див. (16))

$$\sum_{k=0}^{l} C_l^k b_k^{(l-k)}(0) x_k + (b_l(0) - \beta_s) x_l = 0, \quad l = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{18}$$

має r_s лінійно незалежних розв'язків (відносно $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$). Позначимо їх через $\{C_k^{(\nu)}\}_{k=0}^{n-1}$ (тут ν збігається з номерами тих β_μ, для яких $\beta_\mu = \beta_s$). Вектори $(C_0^{(\nu)}, C_1^{(\nu)}, \ldots, C_{n-1}^{(\nu)})$ можна трактувати як власні (що відповідають власному значенню β_ν) для оператора, який діє в просторі $\mathbb{R}^n$ і визначається за допомогою матриці

$$\left\| \begin{array}{ccccc} b_0(0) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ C_1^0 b_0'(0) & b_1(0) & 0 & \dots & 0 \\ C_2^0 b_0''(0) & C_2^1 b_1'(0) & b_2(0) & \dots & 0 \\ \hdashline C_{n-1}^0 b_0^{(n-1)}(0) & C_{n-1}^1 b_1^{(n-2)}(0) & C_{n-1}^2 b_2^{(n-3)}(0) & \dots & b_{n-1}(0) \end{array} \right\|.$$

Тому завжди можна побудувати систему

$$\{(C_0^{(s)}, C_1^{(s)}, \dots, C_{n-1}^{(s)})\}_{s=0}^{n-1}$$

лінійно незалежних між собою векторів, кожний з яких є розв'язком відповідної системи (18).

А тепер розглянемо в просторі $A(G)$ оператор T, для якого

$$(Tg)(z) = g(z) + \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{g^{(\nu)}(0)}{\nu!} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{C_k^{(\nu)}}{k!} z^k b_k(z) - z^\nu \right] \quad \forall\, g(z) \in A(G), \tag{19}$$

де числа $C_k^{(\nu)}$ вибрано вище. Перевіримо, що T є одним з операторів перетворення L_1 в L_2 (тобто $TL_1 = L_2 T$). Для цього досить показати, що він є неперервно оборотним оператором у просторі $A(G)$ (тобто $T \in \mathscr{L}^0(A(G), A(G))$) і для нього виконуються співвідношення (12).

Оскільки T є сумою скінченномірного оператора і оператора E, то $T \in \in \mathscr{L}(A(G), A(G))$. Покажемо далі, що рівняння $(Tg)(z) = f(z)$ має єдиний розв'язок у просторі $A(G)$ для довільної функції $f(z)$ з $A(G)$. Це за відомою теоремою Банаха про обернений оператор гарантуватиме неперервну оборотність T.

Справді, якщо $(Tg)(z) = f(z)$, то

$$g(z) = f(z) - \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{g^{(\nu)}(0)}{\nu!} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{C_k^{(\nu)}}{k!} z^k b_k(z) - z^\nu \right] \tag{20}$$

і нам залишається тільки знайти $g^{(\nu)}(0)$, $\nu = 0, 1, \dots, n-1$. З цією метою продиференціюємо (20) l, $l = 0, 1, \dots, n-1$, разів у точці $z = 0$. Тоді з урахуванням вибору чисел $C_k^{(\nu)}$ (див. (18)) маємо

$$g^{(l)}(0) = f^{(l)}(0) - \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{g^{(\nu)}(0)}{\nu!} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{C_k^{(\nu)}}{k!} (z^k b_k(z))^{(l)} \Big|_{z=0} + g^{(l)}(0) =$$

$$= f^{(l)}(0) + g^{(l)}(0) - \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{g^{(\nu)}(0)}{\nu!} \sum_{k=0}^{l} C_k^{(\nu)} C_l^k b_k^{(l-k)}(0) =$$

$$= f^{(l)}(0) + g^{(l)}(0) - \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{g^{(\nu)}(0)}{\nu!} \beta_\nu C_l^{(\nu)}.$$

Таким чином, для знаходження величин $g^{(\nu)}(0)$, $\nu = 0, 1, \dots, n-1$, одержуємо систему рівнянь

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{g^{(\nu)}(0)}{\nu!} \beta_\nu C_l^{(\nu)} = f^{(l)}(0), \quad l = 0, 1, \dots, n-1,$$

яка завжди має єдиний розв'язок, оскільки $\beta_\nu \neq 0$, $\nu = 0, 1, \ldots, n-1$, і $\det \| C_l^{(\nu)} \| \neq 0$ (вектори $(C_0^{(\nu)}, C_1^{(\nu)}, \ldots, C_{n-1}^{(\nu)})$ лінійно незалежні).

Залишається переконатися в справедливості співвідношень (12). Очевидно,

$$\sum_{s=0}^{n-1} \beta_s \frac{f^{(s)}(0)}{s!} Tz^s = \sum_{s=0}^{n-1} \beta_s \frac{f^{(s)}(0)}{s!} \left[\sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{(z^s)^{(\nu)}|_{z=0}}{\nu!} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{C_k^{(\nu)}}{k!} z^k b_k(z) \right] =$$

$$= \sum_{s=0}^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \beta_s \frac{C_k^{(s)}}{k!} z^k b_k(z) \right) \frac{f^{(s)}(0)}{s!}.$$

З другого боку,

$$\sum_{s=0}^{n-1} \frac{(Tf)^{(s)}(0)}{s!} z^s b_s(z) = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{z^s b_s(z)}{s!} \left[\sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{C_k^{(\nu)}}{k!} z^k b_k(z) \right]^{(s)} \Bigg|_{z=0} =$$

$$= \sum_{s=0}^{n-1} \frac{z^s b_s(z)}{s!} \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{C_k^{(\nu)}}{k!} \sum_{l=0}^{s} C_s^l b_k^{(s-l)}(0)(z^k)^{(l)} \Bigg|_{z=0} =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n-1} \left\{ \sum_{s=0}^{n-1} \left(\sum_{l=0}^{s} C_s^{(\nu)} C_s^l b_l^{(s-l)}(0) \right) \frac{z^s b_s(z)}{s!} \right\} \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n-1} \left(\sum_{s=0}^{n-1} \beta_\nu C_s^{(\nu)} \frac{z^s b_s(z)}{s!} \right) \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!}.$$

Отже, співвідношення (12) виконуються для довільної функції $f(z)$ з простору $A(G)$.

Таким чином, встановлено основний результат цієї роботи.

Теорема. *Нехай оператори* L_1 *і* L_2 *визначаються в просторі* $A(G)$ *за допомогою співвідношень* (4) *і* (5), *причому* $\sum_{j=s}^{n-1} \alpha_{j+1} \neq 0$, $s = 0, 1, \ldots, n-1$. *Для того щоб вони були еквівалентними між собою, необхідно і досить, щоб виконувались умови* (11) *і* (17).

***Приклад* 2.** Нехай $L_1 = z\Delta - E$ і $L_2 = a_1(z)z\Delta + a_2(z)E$. Тоді умова (11) рівносильна, очевидно, тому, що $a_1(z) + a_2(z) \equiv 0$, а (17) — рівності $a_1(0) = 1$.

Цей тривіальний приклад ще раз демонструє ті кардинальні відмінності, які з'являються при розгляді питання про еквівалентність звичайних диференціальних операторів та операторів Помм'є.

Досить просто формулюються умови еквівалентності операторів L_1 і L_2 у випадку, коли $\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_{n-1} = 0$, а $\alpha_n = 1$, тобто коли $L_1 = z^n \Delta^n$ (виділено тільки „старший" член оператора вигляду (4), як це звичайно робиться при вивченні диференціальних операторів). Тепер $\beta_s = 1$, $s = 0, 1, \ldots, n-1$, а всі матриці $M_s^{(1)}$ нульові. Тому нульовими повинні бути й матриці $M_s^{(2)}$ (див. умову (17)), і ми одержуємо такий результат.

***Наслідок* 1*.** *Для того щоб оператори* $L_1 = z^n \Delta^n$ *і* $L_2 = z^n a_n(z) \Delta^n + z^{n-1} a_{n-1}(z) \Delta^{n-1} + \ldots + z a_1(z) \Delta + a_0(z) E$ *були еквівалентними в просторі* $A(G)$, *необхідно і досить, щоб виконувались умови:*

---

* Іншим способом (з використанням так званих характеристичних функцій операторів) це твердження встановлено в 1992 р. у дипломній роботі В. Шемберка.

а) $$\sum_{j=0}^{n} a_j(z) \equiv 1;$$

б) $$\sum_{j=s}^{n-1} a_{j+1}(0) = 1, \quad s = 0, 1, \dots, n-1;$$

в) $$\sum_{j=s}^{n-1} a_{j+1}^{(k)}(0) = 0, \quad k = 1, \dots, n-1-s; \quad s = 0, 1, \dots, n-2.$$

Зокрема, оператори $L_1 = z^n\Delta^n$ і $L_2 = a_n z^n \Delta^n + \dots + a_1 z\Delta + a_0 E$, $a_k \in \mathbb{C}$; $k = 0, 1, \dots, n$, *еквівалентні в просторі* $A(G)$ *тоді і тільки тоді, коли* $a_0 = a_1 = \dots = a_{n-1} = 0$ *і* $a_n = 1$.

Нарешті, сформулюємо ще одне твердження для операторів Ейлера – Помм'є зі сталими коефіцієнтами в загальному випадку.

Наслідок 2. *Нехай* $L_1 = \gamma_n z^n \Delta^n + \dots + \gamma_1 z\Delta + \gamma_0 E$ *і* $L_2 = \delta_n z^n \Delta^n + \dots + \delta_1 z\Delta + \delta_0 E$, $\gamma_k, \delta_k \in \mathbb{C}$, $k = 0, 1, \dots, n$. *Для того щоб оператори* L_1 *і* L_2 *були еквівалентними в просторі* $A(G)$, *необхідно і досить, щоб* $\gamma_0 = \delta_0$, *а множини* $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ *і* $\{\delta_1, \dots, \delta_n\}$ *(з урахуванням кратностей їх елементів) збігалися між собою.*

Друга з наведених умов — це умова (17) для цього випадку, яка разом з рівністю $\gamma_0 = \delta_0$ рівносильна умові (11).

2. Маючи на увазі вже відомі з п. 1 твердження про еквівалентність у просторах A_R, $0 < R \le \infty$, операторів $\Delta + \varphi(z)E$ і Δ та, наприклад, операторів $z\Delta + a(z)E$, $a(z) \in A_R$, і $z\Delta + \alpha E$, $\alpha \in \mathbb{C}$, нагадаємо ще один результат для звичайних лінійних диференціальних операторів першого порядку. В роботі [18] показано, що оператор $z^s D + \beta(z)E$, $s \ge 2$, еквівалентний у просторі A_R, $0 < R \le \infty$, до оператора $z^s D$ тоді і тільки тоді, коли $\beta(0) = \beta'(0) = \dots = \beta^{(s-2)}(0) = 0$ і $\beta^{(s-1)}(0) = -l(s-1)!$, де $l = 0, 1, \dots, s-2$, а $zD + \beta(z)E \sim zD$ — тільки при виконанні умови $\beta(0) = 0$. Тому розглянемо питання про еквівалентність у просторах A_R операторів $z^{s+1}\Delta + \beta(z)E$ і $z^{s+1}\Delta$, $s \in \mathbb{N}$.

Знайдемо необхідні умови еквівалентності вказаних операторів. Нехай $z^{s+1}\Delta + \beta(z)E \sim z^{s+1}\Delta$, тобто існує такий ізоморфізм T простору A_R, $0 < R \le \infty$, на себе, що $T(z^{s+1}\Delta) = (z^{s+1}\Delta + \beta(z)E)T$. Тоді для довільного k, $k = 0, 1, \dots$, $T(z^{s+1}\Delta z^k) = (z^{s+1}\Delta + \beta(z)E)Tz^k$ або, якщо покласти $\varphi_k(z) = Tz^k$ і $c_k = \varphi_k(0)$,

$$\begin{gathered} (z^{s+1}\Delta + \beta(z))\varphi_0(z) = 0, \\ \varphi_{k+s}(z) = z^s(\varphi_k(z) - c_k) + \beta(z)\varphi_k(z), \quad k \ge 1. \end{gathered} \tag{21}$$

Іншими словами,

$$\begin{gathered} [z^s + \beta(z)]\varphi_0(z) = c_0 z^s, \\ \varphi_{k+1+s}(z) = [z^s + \beta(z)]\varphi_{k+1}(z) - c_{k+1}z^s, \quad k \ge 0. \end{gathered} \tag{22}$$

З першої з рівностей (22) випливає, що $c_0 \ne 0$. Справді, якщо $c_0 = 0$, то $[z^s + \beta(z)]\varphi_0(z) \equiv 0$ і, в чому легко переконатися з використанням теореми єдиності для аналітичних функцій (див. [19], задача 19), або $z^s+\beta(z)\equiv 0$, або $\varphi_0(z)\equiv 0$. Але $\varphi_0(z)$ — це значення ізоморфізму T на функції $f(z)\equiv 1$ і тому перетворюватися в тотожний нуль ця функція не може. Якщо ж $z^s+\beta(z)\equiv 0$, то (див. другі із співвідношень (22)) $\varphi_{k+1+s}(z)=-c_{k+1}z^s$, $k\ge 0$, і T, очевидно, — скінченномірний оператор в A_R. Тому бути ізоморфізмом цього простору на себе він не може.

Оскільки $c_0\ne 0$, то з рівняння $[z^s+\beta(z)]\varphi_0(z)=c_0z^s$ видно, що точка $z=0$ для функції $z^s+\beta(z)$ є нулем s-го порядку, тобто $\beta(z)=z^s\beta_1(z)$, де $\beta_1(z)\in A_R$, причому обов'язково $\beta_1(0)=0$. Крім того,

$$\varphi_0(z) = \frac{c_0z^s}{z^s+\beta(z)}, \quad c_0 = \varphi_0(0)\ne 0. \tag{23}$$

Розглянемо рекурентні співвідношення

$$\varphi_{k+1+s}(z) = [z^s+\beta(z)]\varphi_{k+1}(z)-c_{k+1}z^s, \quad k\ge 0. \tag{24}$$

В них, очевидно, $\varphi_1(z), \varphi_2(z), \dots, \varphi_s(z)$ — деякі, взагалі кажучі, довільні функції з простору A_R. Але вони обов'язково лінійно незалежні, оскільки $\varphi_k(z)=Tz^k$, $k=1,2,\dots,s$, а T — ізоморфізм простору A_R на себе.

Зауваживши, що $c_{k+1+s}=0$ при $k=0,1,\dots$ (див. (24)), з (24) одержуємо (наприклад, за допомогою методу математичної індукції)

$$\varphi_{ks+\nu}(z) = [z^s+\beta(z)]^k\varphi_\nu(z)-c_\nu z^s[z^s+\beta(z)]^{k-1},$$
$$k = 1,2,\dots;\quad \nu = 1,2,\dots,s,$$

або

$$\varphi_{ks+\nu}(z) = \left(\varphi_\nu(z) - \frac{c_\nu z^s}{z^s+\beta(z)}\right)[z^s+\beta(z)]^k,$$
$$k = 1,2,\dots;\quad \nu = 1,2,\dots,s.$$

Введемо позначення

$$\alpha(z) = z^s+\beta(z),\qquad \psi_\nu(z) = \varphi_\nu(z)-\frac{c_\nu z^s}{z^s+\beta(z)},\quad \nu = 1,2,\dots,s$$

(зауваживши, що $\psi_\nu(0)=0$) і розглянемо систему

$$\{\varphi_l(z)\}_{l=0}^s \cup \{[\alpha(z)]^k(\psi_1(z),\dots,\psi_s(z))\}_{k=1}^\infty. \tag{25}$$

Система (25), будучи образом системи $\{z^m\}_{m=0}^\infty$ при відображенні за допомогою ізоморфізму T простору A_R на себе, є квазістепеневим базисом цього простору [2]*.

Якщо тепер виписати [2] матрицю ізоморфізму T (або ж системи (25)), то легко побачити (з урахуванням наведеної вище інформації про функції системи (25)), що її структура є майже нижньотрикутною. А саме: по „головній діагоналі" зверху вниз розміщуються клітинка $\{\tilde T_0\}$ — матриця $(s+1)$-го порядку, причому $\det\{\tilde T_0\}\ne 0$, і клітинки $\{\tilde T_m\}$, $m=1,2,\dots$, — матриці s-го порядку (і також $\det\{\tilde T_m\}\ne 0$), над вказаними клітинками всі елементи матриці опера-

* Щоб не збільшувати й так досить об'ємний список використаної літератури, ми надалі (де це можливо) будемо посилатися на монографію [2].

тора T дорівнюють нулю, а під ними стоять відповідні тейлорові коефіцієнти функцій системи (25).

Розглянемо оператор T_0, в матриці якого по „головній діагоналі" розміщуються клітинка $\{T_0'\}$ — обернена матриця до $\{\tilde{T}_0\}$, і клітинки $\{T_m'\}$, $m = 1, 2, \ldots$, кожна з яких є одиничною матрицею s-го порядку, а поза цією „головною діагоналлю" всі елементи дорівнюють нулю. Очевидно, T_0 — ізоморфізм простору A_R на себе. Ізоморфізмом цього ж простору є й оператор $T_1 = T_0 T$. Структури матриць операторів T_1 і T є цілком ідентичними, тільки замість клітинки $\{\tilde{T}_0\}$ в матриці оператора T_1 стоїть одинична матриця $(s+1)$-го порядку. А це означає, що коли на функції системи (25) подіяти ізоморфізмом T_0 (або на функції z^m, $m = 0, 1, \ldots$, — ізоморфізмом T_1), то одержимо квазістепеневий базис простору A_R вигляду

$$\{\tilde{\varphi}_l(z)\}_{l=0}^{s} \cup \{[\alpha(z)]^k(\psi_1(z), \ldots, \psi_s(z))\}_{k=1}^{\infty}, \tag{26}$$

де функції $\tilde{\varphi}_l(z)$, $l = 0, 1, \ldots, s$, задовольняють умови

$$\tilde{\varphi}_l^{(\mu)}(0) = \delta_{\mu,l}\mu!, \quad 0 \le \mu, \quad l \le s \tag{27}$$

($\delta_{\mu,l}$ — символ Кронекера). Іншими словами, якщо дотримуватися загальноприйнятої термінології [2], то оператор T_1 зберігає початкові умови Коші

$$(T_1 f)^{(\mu)}(0) = f^{(\mu)}(0), \quad \mu = 0, 1, \ldots, s, \tag{28}$$

для довільної функції $f(z)$ з простору A_R.

З того, що система (26) є квазістепеневим базисом простору A_R, можна одержати деякі необхідні для подальших міркувань факти. Встановимо їх, вважаючи, що R — скінченне додатне число.

а) Насамперед зауважимо, що система (26) є квазістепеневим базисом і в кожному з просторів A_{R_1}, $0 < R_1 \le R$. Справді, оскільки матриця відповідного їй оператора T_1 є майже нижньотрикутною і такою ж є, очевидно, й матриця оберненого оператора T_1^{-1}, оператори T_1 і T_1^{-1} — це лінійні неперервні відображення в себе кожного з указаних просторів A_{R_1}. Цей факт доводиться так само, як і для операторів з нижньотрикутними матрицями (з цього приводу див. задачу 3, § 16 в [20]).

б) Переконаємося, що $\alpha(z) \ne 0$, якщо тільки $|z| < R$ і $z \ne 0$ (тобто єдиним нулем функції $\alpha(z)$, причому s-ї кратності, є точка $z = 0$). З цією метою (для доведення вказаного твердження від супротивного) візьмемо довільну функцію $f(z)$ з простору A_R і розвинемо її в ряд за функціями системи (26):

$$f(z) = c_0\tilde{\varphi}_0(z) + c_1\tilde{\varphi}_1(z) + \ldots + c_s\tilde{\varphi}_s(z) + \sum_{\nu=1}^{s}\sum_{k=1}^{\infty} c_{k,\nu}\psi_\nu(z)[\alpha(z)]^k. \tag{29}$$

Покладаючи в (29) $z = z_0$, де $\alpha(z_0) = 0$, $z_0 \ne 0$, $|z_0| < R$, і враховуючи умови (27) (або ж очевидні рівності $c_l = f^{(l)}(0)/l!$, $l = 0, 1, \ldots, s$, одержуємо співвідношення

$$f(z_0) = f(0)\tilde{\varphi}_0(z_0) + \frac{f'(0)}{1!}\tilde{\varphi}_1(z_0) + \ldots + \frac{f^{(s)}(0)}{s!}\tilde{\varphi}_s(z_0),$$

яке, звичайно, виконуватися одночасно для всіх функцій $f(z)$ з простору A_R не може.

в) Наступним кроком у наших міркуваннях буде доведення того, що функція $\alpha(z)$ відображає круг $K_R=\{z: |z|<R\}$ на круг $K_{R^s}=\{z: |z|<R^s\}$, тобто, що $\alpha(K_R)=K_{R^s}$. Звідси випливатиме (див. а)), що також $\alpha(K_{R_1})=K_{R_1^s}$ для всіх $R_1\le R$.

Те, що $|\alpha(z)|<R^s$ $\forall z\in K_R$ можна одержати, наприклад, так. Оскільки T_1 — неперервне відображення простору A_R на себе, то [2] $\forall\ \rho<R$ $\exists\, r<R$ і $\exists\, C=\text{const}\ge 0$:

$$\max_{|z|\le\rho}|T_1z^m|\le Cr^m,\quad m=0,1,\ldots .$$

Звідси, зокрема, випливає

$$\max_{|z|\le\rho}|\psi_\nu(z)[\alpha(z)]^k|\le Cr^{ks+\nu},\quad k\ge 1;\quad 1\le\nu\le s.$$

Тому для довільної точки z_1 із замкненого круга $\overline{K}_\rho$ (і, таким чином, довільної точки з K_R) і фіксованого ν_0, $1\le\nu_0\le s$, маємо

$$|\alpha(z_1)|=\overline{\lim_{k\to\infty}}\sqrt[k]{|\psi_{\nu_0}(z_1)||\alpha(z_1)|^k}\le r^s<R^s.$$

Цей факт, до речі, випливає також з того, що коли $f(z)=\sum_{m=0}^\infty f_mz^m$ — довільна функція з простору A_R, то

$$(T_1f)(z)=\sum_{m=0}^{s}f_m\tilde{\varphi}_m(z)+\sum_{\nu=1}^{s}\sum_{k=1}^{\infty}f_{ks+\nu}\psi_\nu(z)[\alpha(z)]^k$$

і ряди з правої частини цієї рівності повинні збігатися за топологією простору A_R.

Залишається перевірити, що для будь-якого $w_0\in K_{R^s}$ існує принаймні одна така точка $z_0\in K_R$, що $\alpha(z_0)=w_0$ (цей факт треба встановити, звичайно, лише для випадку $w_0\ne 0$). Якщо це не так, тобто $\alpha(z)\ne w_0$ $(\forall z\in K_R)$ для деякого $w_0\in K_{R^s}$, то $\psi_{\nu_0}(z)\alpha(z)/(w_0-\alpha(z))\in A_R$ (ν_0: $1\le\nu_0\le s$ — деяке фіксоване число) і також $T_1^{-1}[\psi_{\nu_0}(z)\alpha(z)/(w_0-\alpha(z))]\in A_R$. Тому

$$T_1^{-1}\left[\frac{\psi_{\nu_0}(z)\alpha(z)}{w_0-\alpha(z)}\right]=\sum_{m=0}^{\infty}c_mz^m\left(\overline{\lim_{m\to\infty}}\sqrt[m]{|c_m|}\le\frac{1}{R}\right).\tag{30}$$

Оскільки точка $z=0$ є для функції $\psi_{\nu_0}(z)\alpha(z)/(w_0-\alpha(z))$ нулем не меншої кратності, ніж $s+1$, і оператор T_1 (див. (28) з заміною там $f(z)$ на $(T_1^{-1}f)(z)$) також зберігає початкові умови Коші, то $c_m=0$, $0\le m\le s$. Тому

$$\frac{\psi_{\nu_0}(z)\alpha(z)}{w_0-\alpha(z)}=\sum_{\nu=1}^{s}\sum_{k=1}^{\infty}c_{ks+\nu}\psi_\nu(z)[\alpha(z)]^k.$$

Домножуючи це співвідношення на функцію $w_0-\alpha(z)$ і прирівнюючи потім відповідні коефіцієнти (при функціях $\psi_\nu(z)[\alpha(z)]^k$ квазістепенового базису), зокрема, одержуємо $c_{s+\nu_0}w_0 = 1$ і $c_{(k+1)s+\nu_0}w_0 = c_{ks+\nu_0}$, $k \geq 1$, звідки $c_{ks+\nu_0} = 1 / w_0^k$ і

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c_{ks+\nu_0}|} = \frac{1}{|w_0|} > \frac{1}{R^s}.$$

З другого боку (див. (30)),

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c_{ks+\nu_0}|} \leq \frac{1}{R^s},$$

що призводить до суперечності.

г) Покажемо (від супротивного), що для деякого $R_1 < R$, $R_1 > 0$, на колі $\gamma_{R_1} = \{z : |z| = R_1\}$ похідна $\alpha'(z)$ не обертається в нуль. Справді, якщо на кожному γ_{R_1} є хоча б одна така точка ζ, що $\alpha'(\zeta) = 0$, то візьмемо деяке число R_2, $R_2 < R$, і деяку послідовність $\{\rho_n\}_{n=0}^{\infty}$, яка монотонно зростає до R_2. Через $\{\zeta_n\}_{n=0}^{\infty}$, $|\zeta_n| = \rho_n$, позначимо відповідну послідовність точок, в яких $\alpha'(z)$ обертається в нуль. Будемо вважати її збіжною до $\tilde{\zeta}_0$, де $|\tilde{\zeta}_0| \leq R_2 < R$ (інакше треба перейти до збіжної підпослідовності обмеженої послідовності $\{\zeta_n\}_{n=0}^{\infty}$).

Отже, $\alpha'(\zeta_n) = 0$, $n \geq 0$, де $\zeta_n \to \tilde{\zeta}_0$, $n \to \infty$, і $|\tilde{\zeta}_0| < R$. Тоді за теоремою єдиності для аналітичних функцій $\alpha'(z) \equiv 0$ в K_R, а $\alpha(z) \equiv \mathrm{const}$. Така функція відображати круг K_R на K_{R^s} не може.

д) Нехай тепер γ_ρ — одне з тих кіл, на якому $\alpha'(z) \neq 0$. Тоді, повторюючи міркування, які проводилися при доведенні теореми 4 з [21], одержуємо, що $\alpha(\gamma_\rho) = \gamma_{\rho^s}$.

Звідси вже легко отримати й такий факт. Нехай w_1 — довільна точка з круга K_{ρ^s}, тобто $|w_1| < \rho^s$. Тоді також $|w_1| < |\alpha(z)|$ $\forall z \in \gamma_\rho$ і за відомою теоремою Руше функція $\alpha(z) - w_1$ має в крузі K_ρ стільки ж нулів, скільки й функція $\alpha(z)$, тобто s.

Скориставшись, нарешті, лемою 3 з [22], робимо висновок, що з необхідністю

$$\alpha(z) = \frac{\rho^2(z-\alpha_1)}{\rho^2 - \overline{\alpha}_1 z}\frac{\rho^2(z-\alpha_2)}{\rho^2 - \overline{\alpha}_2 z} \cdots \frac{\rho^2(z-\alpha_s)}{\rho^2 - \overline{\alpha}_s z} e^{i\theta}, \quad z \in K_\rho,$$

де $|\alpha_j| < \rho$, $j = 1, 2, \ldots, s$, і $\mathrm{Im}\,\theta = 0$. Але точка $z = 0$ є нулем s-ї кратності для функції $\alpha(z)$ і тому всі $\alpha_j = 0$, а $\alpha(z) = e^{i\theta}z^s$, $\mathrm{Im}\,\theta = 0$. Згадуючи тепер, що $\alpha(z) = z^s + \beta(z)$ і $\beta(z) = z^s\beta_1(z)$, де $\beta_1(z) \in A_R$ і $\beta_1(0) = 0$, переконуємося в тому, що коли $z^{s+1}\Delta + \beta(z)E \sim z^{s+1}\Delta$, $s \in \mathbb{N}$, то $\beta(z) \equiv 0$.

Твердження. *Нехай $\beta(z)$ — фіксована функція з простору A_R, $0 < R < \infty$, $s \in \mathbb{N}$. Для того щоб оператори $z^{s+1}\Delta + \beta(z)E$ і $z^{s+1}\Delta$ були еквівалентними в просторі A_R, необхідно і досить, щоб $\beta(z) \equiv 0$.*

Точно таке ж твердження справедливе і для простору A_∞ всіх цілих функцій з топологією компактної збіжності. І доведення його значно спрощується: те, що $\beta(z) \equiv 0$, в цьому випадку одержується безпосередньо тільки з повноти в A_∞ відповідної системи (26). Справді, якщо система (26) є повною у вказаному просторі (а її повнота випливає з квазістепеневої базисності), то повною є й кожна з систем (більш „багатша", ніж (26))

$$\{\tilde{\varphi}_l(z)\}_{l=0}^{s} \cup \{[\alpha(z)-\gamma]^k(\psi_1(z), \dots, \psi_s(z))\}_{k=0}^{\infty}, \tag{31}$$

де γ — довільне фіксоване комплексне число. Іншими словами, будь-яку функцію $f(z)$ з простору A_∞ можна подати у вигляді рівномірно збіжної на кожному компакті $\mathbb{K}$ з $\mathbb{C}$ послідовності лінійних комбінацій функцій системи (31):

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} \Big(c_0^{(n)}\tilde{\varphi}_0(z) + c_1^{(n)}\tilde{\varphi}_1(z) + \dots + c_s^{(n)}\tilde{\varphi}_s(z) + c_{s+1}^{(n)}\psi_1(z) + \dots$$

$$\dots + c_{2s}^{(n)}\psi_s(z) + c_{2s+1}^{(n)}\psi_1(z)[\alpha(z)-\gamma] + \dots + c_n^{(n)}\psi_\mu(z)[\alpha(z)-\gamma]^{n_1} \Big), \tag{32}$$

$$n = n_1 s + \mu.$$

Звідси (з урахуванням відповідної інформації про функції

$$\tilde{\varphi}_0(z), \tilde{\varphi}_1(z), \dots, \tilde{\varphi}_s(z), \psi_1(z), \dots, \psi_s(z))$$

випливає, що (при $z=0$)

$$\lim_{n\to\infty} c_0^{(n)} = f_0.$$

Далі, якщо $\alpha(z)$ — трансцендентна ціла функція, то будемо вважати, що в (32) за γ взято деяке її не виключне пікарове значення (тобто значення γ функція $\alpha(z)$ приймає за теоремою Пікара в послідовності $\{z_m\}_{m=1}^{\infty}$ різних точок з $\mathbb{C}$). Тоді з (32) маємо

$$f(z_m) = \lim_{n\to\infty} \Big(c_1^{(n)}\tilde{\varphi}_1(z_m) + \dots + c_s^{(n)}\tilde{\varphi}_s(z_m) + c_{s+1}^{(n)}\psi_1(z_m) + \dots$$

$$\dots + c_{2s}^{(n)}\psi_s(z_m)\Big) + f(0)\tilde{\varphi}_0(z_m), \quad m = 1, 2, \dots, 2s. \tag{33}$$

Розглянемо визначник δ ($2s$-го порядку), m-й рядок якого складається з чисел

$$\tilde{\varphi}_1(z_m), \dots, \tilde{\varphi}_s(z_m), \quad \psi_1(z_m), \dots, \psi_s(z_m), \quad m = 1, 2, \dots, 2s.$$

Якщо $\delta = 0$, то, очевидно, деяка нетривіальна лінійна комбінація величин $f(z_m) - f(0)\tilde{\varphi}_0(z_m)$ дорівнює нулю для будь-якої функції $f(z)$ з A_∞, що не можливо.

До аналогічної суперечності легко приходимо і в тому випадку, коли $\delta \neq 0$. Тільки тепер попередньо (з використанням методу Крамера розв'язування лінійних алгебраїчних рівнянь) ми переконуємося в існуванні границь $\lim\limits_{n\to\infty} c_l^{(n)}$, $l = 1, 2, \dots, 2s$, а потім (див. (32)) у тому, що нулю дорівнює вже деяка лінійна комбінація значень $f(0), f(z_1), \dots, f(z_{2s})$ і $f(z_{2s+1})$ довільної функції $f(z)$ з простору A_∞.

Отже, $\alpha(z)$ — многочлен, для якого точка $z=0$ є єдиним нулем кратності s, тобто $\alpha(z) = az^s$, $a \in \mathbb{C}$. Звідси випливає рівність $z^s + \beta(z) = az^s$ і з урахуванням того, що $\beta(z) = z^s\beta_1(z)$, де $\beta_1(0) = 0$, тотожність $\beta(z) \equiv 0$.

1. *Köthe G.* Dualität in der Funktionen theorie // J. reine und angew. Math. – 1953. – **191**. – S. 30–49.
2. *Фаге М. К., Нагнибида Н. И.* Проблема эквивалентности обыкновенных линейных дифференциальных операторов. – Новосибирск: Наука, 1987. – 280 с.
3. *Delsartes J., Lions J. L.* Transmutations d'opérateurs differentieles dans le domaine complexe // Comment. math. helv. – 1957. – **32**, № 2. – P. 113–128.
4. *Фаге М. К.* Операторно-аналітичні функції однієї незалежної змінної. – Львів: Вид-во Львів. ун-ту, 1959. – 140 с.
5. *Фишман К. М.* К вопросу об эквивалентности дифференциальных операторов в пространстве аналитических функций в круге // Успехи мат. наук. – 1964. – **19**, вып. 5 (119). – С. 143–147.
6. *Леонтьев А. Ф.* Оценка решений одного дифференциального уравнения при больших по модулю значениях параметра и ее применение к некоторым вопросам теории функций // Сиб. мат. журн. – 1960. – **1**, № 3. – С. 456–487.
7. *Кушнирчук И. Ф., Нагнибида Н. И., Фишман К. М.* Эквивалентность дифференциальных операторов с регулярной особой точкой // Функцион. анализ и его прил. – 1974. – **8**, вып. 2. – С. 83–84.
8. *Ибрагимов И. И., Нагнибида Н. И.* Матричный метод и квазистепенные базисы в пространстве аналитических в круге функций // Успехи мат. наук. – 1975. – **30**, вып. 6. – С. 101–146.
9. *Кушнирчук И. Ф.* Необходимые и достаточные условия эквивалентности дифференциальных операторов с регулярной особой точкой // Сиб. мат. журн. – 1977. – **19**, № 2. – С. 340–347.
10. *Габорак Я. Н., Кушнирчук И. Ф., Понюк М. И.* Эквивалентность дифференциальных операторов третьего порядка с регулярной особой точкой // Сиб. мат. журн. – 1978. – **19**, № 6. – С. 1254–1259.
11. *Рындина В. В.* Об эквивалентности дифференциального оператора n-го порядка с регулярной особой точкой и оператора Эйлера в пространстве A_R // Дифференц. уравнения. – 1979. – **15**, № 4. – С. 636–639.
12. *Рындина В. В.* Об эквивалентности дифференциального оператора n-го порядка с регулярной особой точкой и оператора Эйлера в пространстве $A(G)$ // Сиб. мат. журн. – 1979. – **20**, № 3. – С. 674–678.
13. *Гельфонд А. О., Леонтьев А. Ф.* Об одном обобщении ряда Фурье // Мат. сб. – 1951. – **29**, № 3. – С. 477–500.
14. *Ткаченко В. А.* Об операторах преобразования в пространстве целых функций // Сиб. мат. журн. – 1979. – **20**, № 1. – С. 152–163.
15. *Линчук С. С.* О представлении линейных непрерывных операторов в пространствах аналитических функций. – Черновцы, 1982. – Деп. в ВИНИТИ 13.04.82; № 1798–82.
16. *Линчук С. С., Нагнибида Н. И.* Об эквивалентности операторов Поммье в пространствах аналитических в круге функций // Сиб. мат. журн. – 1990. – **31**, № 3. – С. 55–61.
17. *Нагнибида Н. И.* Об условиях полноты одной системы целых функций и их применении к операторам Поммье // Мат. заметки. – 1991. – 49, № 1. – С. 154–156.
18. *Нагнибида Н. И.* Об эквивалентности некоторых дифференциальных операторов первого порядка с „особенностями" // Сиб. мат. журн. – 1969. – **10**, № 6. – С. 1453–1456.
19. *Нагнибида Н. И.* Избранные задачи университетских туров олимпиады по математике „Студент и НТП" в Черновицком госуниверситете // Математика сегодня – 90: Науч.-метод. сб. / Под ред. А. Я. Дороговцева. – К.: Вища шк., 1990. – С. 143–155.
20. *Грищенко А. Е., Нагнибида Н. И., Настасиев П. П.* Теория функций комплексного переменного. Решение задач. – К.: Вища шк., 1986. – 336 с.
21. *Березовский Н. И., Нагнибида Н. И.* Об эквивалентности операторов умножения в пространствах аналитических функций // Теория функций, функцион. анализ и их прил. – 1976. – Вып. 25. – С. 21–30.
22. *Березовский Н. И.* Об эквивалентности операторов умножения в пространствах $A(G)$ и $A(F)$ // Укр. мат. журн. – 1976. – **28**, № 4. – С. 443–452.

Одержано 08.09.94