УДК 531.36

А. А. Мартынюк (Ин-т механики НАН Украины, Киев)

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ ПОЛИУСТОЙЧИВОСТЬ РАЗДЕЛЯЮЩИХСЯ ДВИЖЕНИЙ

Conditions for exponential x_1-stability and polystability are obtained for systems with separating motions. The stability conditions of these types are obtained by using (scalar and matrix) Lyapunov's functions.

Наведено умови експоненціальної x_1-стійкості й полістійкості для систем з рухами, що розділяються. Умови стійкості заданого типу одержані шляхом застосування функцій Ляпунова (скалярних і матричних).

1. Введение. Задача о полиустойчивости движения [1–7] является мало изученной как в контексте общей теории, так и в плане приложений. Эта задача тесно связана с понятием устойчивости относительно части переменных [1].

2. Постановка задачи. Рассматривается система дифференциальных уравнений возмущенного движения

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

где $x \in R^n$, $f(t,x) \in C(R_+ \times D, R^n)$, $D \subseteq R^n$, и значит, $f(t,x) = 0$ для всех $t \in R_+$, если $x = 0$. Пусть это состояние равновесия является единственным для системы (1).

Вектор $x \in R^n$ разделим на два субвектора $x_i \in R^{n_i}$, $i = 1, 2$, $n_1 + n_2 = n$ и систему (1) перепишем в виде

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2), \quad x_i(t_0) = x_{i0}, \tag{2}$$

где $f_i \in C(R_+ \times D, R^{n_i})$, $i = 1, 2$.

Далее для норм векторов приняты обозначения

$$\| x_i \| = \left(\sum_{k=1}^{n_i} x_k^2 \right)^{1/2}, \quad \| x \| = \left(\sum_{s=1}^{n} x_s^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{j=1}^{2} \| x_j \|^2 \right)^{1/2}, \quad i = 1, 2.$$

О системе (1) (соответственно (2)), будем предполагать что ее правые части непрерывны в области $R_+ \times D$, где $D = \{ x : \|x_1\| + \|x_2\| \le H < +\infty \}$ либо $R_+ \times \times D^*$, $D^* = \{ x : \|x_1\| \le H, \ 0 < \|x_2\| < +\infty \}$.

Если система (2) рассматривается в области $R_+ \times D^*$, то предполагается, что решение $x(t; t_0, x_0)$ является x_2-продолжимым.

Сформулируем некоторые определения, принимая во внимание результаты работ [6, 8, 9].

***Определение* 1.** *Состояние равновесия* $x = 0$ *системы* (1) *называется экспоненциально* x_1*-устойчивым (в малом), если существует* $\lambda > 0$ *и для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta(\varepsilon) > 0$ *такое, что*

$$\| x_1(t; t_0, x_0) \| \le \varepsilon \exp[-\lambda(t - t_0)] \quad \textit{при всех} \quad t \ge t_0, \tag{3}$$

если $\| x_0 \| < \delta(\varepsilon)$.

***Определение* 2.** *Состояние равновесия* $x = 0$ *системы* (1) *называется экспоненциально* x_1*-устойчивым в целом, если существует* $\lambda > 0$ *и для любо-*

го Δ, $0<\Delta<\infty$, *существует* $K(\Delta)>0$ *такое, что*

$$\| x_1(t;t_0,x_0)\| \leq K(\Delta)\exp[-\lambda(t-t_0)] \quad \text{для всех} \quad t\geq t_0,$$

если $\| x_0\|<\Delta$, $t\geq 0$.

***Определение* 3.** *Состояние равновесия* $x=0$ *системы* (1) *называется экспоненциально полиустойчивым (в малом), если для положительных постоянных* r_1, r_2 *и для любого* $\varepsilon>0$ *существуют* $\Delta=\Delta(\varepsilon)>0$, $\lambda>0$ *такие, что*

$$\| x_1(t;t_0,x_0)\|^{2r_1} + \| x_2(t;t_0,x_0)\|^{2r_2} \leq \varepsilon\exp[-\lambda(t-t_0)] \quad \text{для всех} \quad t\geq t_0, \tag{4}$$

если $\| x_0\|<\Delta(\varepsilon)$.

***Определение* 4.** *Состояние равновесия* $x=0$ *системы* (1) *называется экспоненциально полиустойчивым в целом, если существует* $\lambda>0$ *и для любого* Δ, $0<\Delta<+\infty$, *существует* $R(\Delta)>0$ *такое, что*

$$\| x_1(t;t_0,x_0)\|^{2r_1} + \| x_2(t;t_0,x_0)\|^{2r_2} \leq$$
$$\leq R(\Delta)\exp[-\lambda(t-t_0)] \quad \text{для всех} \quad t\geq t_0,$$

если $\| x_0\|<\Delta$, $t_0\geq 0$.

***Определение* 5.** *Функции* $\varphi_1,\varphi_2\in K(KR)$ *имеют величину одного порядка, если существуют постоянные* α_i, β_i, $i=1,2$, *такие, что*

$$\alpha_i\varphi_i(r)\leq\varphi_j(r)\leq\beta_i\varphi_i(r), \quad i\neq j, \quad i,j=1,2.$$

Экспоненциальные свойства решения $x=0$ будем рассматривать в следующих случаях:

Случай А. Исследуется экспоненциальная устойчивость решения $x=0$ относительно вектора x_1, т. е. экспоненциальная x_1-устойчивость.

Случай Б. Исследуется экспоненциальная полиустойчивость решения $x=0$.

***Замечание* 1.** В определениях 3 и 4 содержательная часть понятия полиустойчивости сводится к различию скорости убывания компонент решения $x(t;t_0,x_0)$ системы (1).

3. Метод решения задачи. Исследование экспоненциальных свойств решения $x=0$ системы (1) в случаях А и Б проводится с помощью скалярной и матричной функций Ляпунова соответственно.

Итак, рассмотрим случай А. Пусть с системой (1) связана скалярная функция $v(t,x)\in C(R_+\times D^*,R_+)$, $v(t,x_1,x_2)=0$ для всех $t\in R_+$, если $x_1=0$.

Теорема 1. *Пусть в системе* (1) *вектор-функция непрерывна на* $R_+\times D^*$ *и существуют*:

а) функции $v(t,x)\in C(R_+\times D^*,R_+)$ *и* $\varphi_1,\varphi_2\in K$, *имеющие величину одного порядка*;

б) положительные постоянные c *и* γ_1 *такие, что*

$$c\| x_1\|^{\gamma_1}\leq v(t,x_1,x_2)\leq\varphi_1(\| x\|); \tag{5}$$

$$D^+v(t,x_1,x_2)\big|_{(1)}\leq -\varphi_2(\| x\|). \tag{6}$$

Тогда состояние равновесия $x=0$ *системы* (1) *экспоненциально* x_1-*устойчиво в малом.*

Доказательство. Для функций φ_1, φ_2, удовлетворяющих условиям теоремы 1, существуют постоянные α_1 и β_1 такие, что

$$\alpha_1\varphi_1(r)\leq\varphi_2(r)\leq\beta_1\varphi_1(r). \tag{7}$$

Из неравенств (5), (6), принимая во внимание (7), получаем

$$D^+v(t,x_1,x_2)\big|_{(1)} \le -\alpha_1 v(t,x_1,x_2) \tag{8}$$

и, далее,

$$v((t,x(t)) \le v(t_0,x_0)\exp[-\alpha_1(t-t_0)] \quad \text{для всех} \quad t_0 \ge 0.$$

Учитывая оценку снизу функции $v(t,x)$, из неравенства (5) получаем

$$\|x_1(t;t_0,x_0)\| \le c^{-1/\gamma_1}\varphi_1^{1/\gamma_1}(\|x_0\|)\exp\left[-\frac{\alpha_1}{\gamma_1}(t-t_0)\right], \quad t \ge t_0. \tag{9}$$

Пусть $\lambda = \alpha_1/\gamma_1$ и для любого $\varepsilon > 0$ выберем $\delta(\varepsilon) = \varphi_1^{-1}(c\varepsilon^{\gamma_1})$. Тогда имеем оценку (3), если $\|x_0\| < \delta(\varepsilon)$, $t_0 \ge 0$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть в системе* (1) *вектор-функция* f *непрерывна на* $R_+ \times R^n$ *и существуют*:

а) функции $v(t,x) \in C(R_+ \times R^n, R_+)$, $\varphi_1, \varphi_2 \in KR$, *имеющие величину одного порядка*;

б) положительные постоянные d *и* γ_2 *такие, что*

$$d\|x_1\|^{\gamma_2} \le v(t,x_1,x_2) \le \varphi_1(\|x\|), \tag{10}$$

$$D^+v(t,x_1,x_2)\big|_{(1)} \le -\varphi_2(\|x\|). \tag{11}$$

Тогда состояние равновесия $x = 0$ *системы* (1) *экспоненциально* x_1*-устойчиво в целом.*

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 1 получим оценку

$$\|x_1(t;t_0,x_0)\| \le d^{-1/\gamma_2}\varphi_1^{1/\gamma_2}(\|x_0\|)\exp\left[-\frac{\alpha_2}{\gamma_2}(t-t_0)\right], \quad t \ge t_0. \tag{12}$$

Обозначим $\lambda = \alpha_2/\gamma_2$ и для любого $0 < \Delta < +\infty$ найдем $K(\Delta) = d^{-1/\gamma_2} \times \times \varphi_1^{1/\gamma_2}(\Delta)$. Тогда имеем

$$\|x_1(t;t_0,x_0)\| \le K(\Delta)\exp[-\lambda(t-t_0)], \quad t \ge t_0,$$

при $\|x_0\| < \Delta$, $t_0 \ge 0$.

Далее рассмотрим случай Б. Для системы (2) будем рассматривать матричную функцию [11, 12]

$$U(t,x) = [v_{ij}(t,x)], \quad i,j = 1,2, \tag{13}$$

элементы $v_{ij}(t,x)$ которой удовлетворяют специальным условиям.

***Предположение* 1.** *Существуют*:

1) *функции* $\varphi_1, \varphi_2 \in K(KR)$ *имеют величину одного порядка*;

2) *матрица-функция* (13), *элементы которой удовлетворяют оценкам*:

а)
$$\underline{c}_{11}\|x_1\|^{2r_1} \le v_{11}(t,x_1,x_2) \le \overline{c}_{11}\varphi_1^2(\|x\|)$$

для всех $(t,x) \in R_+ \times D$ (*для всех* $(t,x) \in R_+ \times R^n$);

б)
$$\underline{c}_{22}\|x_2\|^{2r_2} \le v_{22}(t,x_1,x_2) \le \overline{c}_{22}\varphi_2^2(\|x\|)$$

для всех $(t,x) \in R_+ \times D$ (*для всех* $(t,x) \in R_+ \times R^n$),

где $\underline{c}_{ii} > 0$, $\overline{c}_{ii} > 0$, $i = 1,2$;

в) $$\underline{c}_{12}\|x_1\|^{r_1}\|x_2\|^{r_2} \le v_{12}(t,x_1,x_2) \le \overline{c}_{12}\varphi_1(\|x\|)\varphi_2(\|x\|);$$

г) $$v_{12}(t,x_1,x_2) = v_{21}(t,x_1,x_2)$$

для всех $(t,x)\in R_+\times D$ (*для всех* $(t,x)\in R_+\times R^n$),

где $\underline{c}_{ij} = \underline{c}_{ji}$, $\overline{c}_{ij} = \overline{c}_{ji}$, $i\ne j$, $r_i>0$, $i,j=1,2$.

Лемма 1. *Если выполняются все условия предположения* 1, *то для функции*

$$V(t,x,\eta) = \eta^T U(t,x)\eta, \tag{14}$$

где $\eta\in R_+^2$ *выполняется двустороннее неравенство*

$$u_1^T A_1 u_1 \le V(t,x,\eta) \le u_2^T A_2 u_2 \tag{15}$$

при всех $(t,x)\in R_+\times D$ (*для всех* $(t,x)\in R_+\times R^n$). *Здесь*

$$u_1^T = \left(\|x_1\|^{r_1}, \|x_2\|^{r_2}\right), \quad u_2^T = (\varphi_1(\|x\|),\varphi_2(\|x\|)), \quad A_1 = H^T C_1 H;$$

$$A_2 = H^T C_2 H, \quad H = \mathrm{diag}(\eta_1,\eta_2), \quad C_1 = \begin{pmatrix}\underline{c}_{11} & \underline{c}_{12}\\ \underline{c}_{21} & \underline{c}_{22}\end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix}\overline{c}_{11} & \overline{c}_{12}\\ \overline{c}_{21} & \overline{c}_{22}\end{pmatrix}.$$

Доказательство. Оценка (15) получается прямой подстановкой неравенств а) – в) из предположения 1 в выражение

$$V(t,x,\eta) = \sum_{i,j=1}^{2}\eta_i\eta_j v_{ij}(t,x_1,x_2). \tag{16}$$

Предположение 2. *Существуют:*

1) *функции* $\psi_1,\psi_2\in K(KR)$, *имеющие величину одного порядка с функциями* $\varphi_1,\varphi_2\in K(KR)$;

2) *непрерывные на любом конечном интервале функции* $\mu_{ij}(t)$, $i=1,2$, $j=1,2,\ldots,10$, *такие, что:*

а) $$D_t^+ v_{ii}(t,x_i) + \left(D_{x_i}^+ v_{ii}\right)^T f_i(t,x_i) \le \mu_{ij}(t)\psi_i^2\left(\|x_i\|\right) + r_{i1}(t,\psi)$$

для всех $(t,x)\in R_+\times D$ (*для всех* $(t,x)\in R_+\times R^n$);

б) $$\left(D_{x_i}^+ v_{ii}\right)^T g_i(t,x_1,x_2) \le$$

$$\le \mu_{i2}(t)\psi_1^2\left(\|x_1\|\right) + \mu_{i3}(t)\psi_1(\|x_1\|)\psi_2(\|x_2\|) + \mu_{i4}\psi_2^2\left(\|x_2\|\right) + r_{i2}(t,\psi)$$

для всех $(t,x)\in R_+\times D$ (*для всех* $(t,x)\in R_+\times R^n$);

в) $$D_t^+ v_{12}(t,x_1,x_2) + \left(D_{x_i}^+ v_{12}\right)^T f_i(t,x_i) \le$$

$$\le \mu_{i5}(t)\psi_1^2\left(\|x_1\|\right) + \mu_{i6}(t)\psi_1(\|x_1\|)\psi_2(\|x_2\|) + \mu_{i7}\psi_2^2\left(\|x_2\|\right) + r_{i3}(t,\psi)$$

для всех $(t,x)\in R_+\times D$ (*для всех* $(t,x)\in R_+\times R^n$);

г) $$\left(D_{x_i}^+ v_{12}\right)^T y_i(t,x_1,x_2) \le$$

$$\le \mu_{i8}(t)\psi_1^2\left(\|x_1\|\right) + \mu_{i9}(t)\psi_1(\|x_1\|)\psi_2(\|x_2\|) + \mu_{i10}\psi_2^2\left(\|x_2\|\right) + r_{i4}(t,\psi)$$

для всех $(t,x)\in R_+\times D$ (*для всех* $(t,x)\in R_+\times R^n$).

Здесь $f_i(t, x_i) = f_i(t, x_i, x_j)$ *при* $x_j = 0$ $j = 1, 2$, $g_i(t, x_1, x_2) = f_i(t, x_i, x_j) - f_i(t, x_i)$, $i, j = 1, 2$, $r_{ik}(t, \psi)$, $i = 1, 2$, $k = 1, 2, 3, 4$, — *полиномы по* ψ_i, $i = 1, 2$, *степени выше второй.*

Лемма 2. *При выполнении всех условий предположения 2 для функции* $D^+V(t, x, \eta)$ *верна оценка*

$$\eta^T D^+ U(t, x)\eta \le u_3^T(\|x\|) A_3(t) u_3(\|x\|) + R(t, \psi) \tag{17}$$

$$\text{для всех} \quad (t, x) \in R_+ \times D \quad (\text{для всех } (t, x) \in R_+ \times R^n).$$

Здесь $u_3^T(\|x\|) = (\psi_1(\|x_1\|), \psi_2(\|x_2\|))$, $A_3(t)$, — (2×2)-*мерная матрица, непрерывная на каждом конечном интервале с элементами:*

$$a_{11}(t) = \eta_1^2(\mu_{11}(t) + \mu_{12}(t)) + \eta_2^2\mu_{22}(t) + 2\eta_1\eta_2(\mu_{15}(t) + \mu_{18}(t) + \mu_{25}(t) + \mu_{28}(t));$$

$$a_{22}(t) = \eta_1^2\mu_{14}(t) + \eta_2^2(\mu_{21}(t) + \mu_{24}(t)) +$$
$$+ 2\eta_1\eta_2(\mu_{17}(t) + \mu_{110}(t) + \mu_{27}(t) + \mu_{210}(t));$$

$$a_{12}(t) = a_{21}(t) = \frac{1}{2}\left(\eta_1^2\mu_{13}(t) + \eta_2^2\mu_{23}(t)\right) +$$
$$+ \eta_1\eta_2(\mu_{16}(t) + \mu_{19}(t) + \mu_{26}(t) + \mu_{29}(t)),$$

$$R(t, \psi) = \eta_1^2(r_{11}(t, \psi) + r_{12}(t, \psi)) + \eta_2^2(r_{21}(t, \psi) + r_{22}(t, \psi)) +$$
$$+ 2\eta_1\eta_2(r_{13}(t, \psi) + r_{14}(t, \psi) + r_{23}(t, \psi) + r_{24}(t, \psi)).$$

Если матрица $A_3(t)$ *определенно-отрицательная при всех* $t \in R_+ = [0, \infty)$, *то для любого* $\mu \in (0, 1)$ *существует* $H(\mu) > 0$ *такое, что при* $x \in \Omega(H) \subset D$, $\Omega(H) = \{x : \|x\| < H(\mu)\}$ *выполняется оценка*

$$|R(t, \psi)| < -\mu u_3^T(\|x\|) A_3(t) u_3(\|x\|) \tag{18}$$

при всех $t \in R_+$, *и оценка* (17) *принимает вид*

$$\eta^T D^+ U(t, x)\eta \le (1 - \mu) u_3^T(\|x\|) A_3(t) u_3(\|x\|) \tag{19}$$

в области $(t, x) \in R_+ \times \Omega$.

Пусть $\|u\| = (u^T u)^{1/2}$ — евклидова норма вектора u в конусе $K = \{u : u \ge \ge 0\}$.

Доказательство леммы 2 состоит в применении оценок из предположения 2 к функции $D^+V(t, x, \eta)$ в развернутом виде.

Лемма 3. *Для квадратичных форм* $u_1^T A_1 u_1$ *и* $u_2^T A_2 u_2$ *верны оценки*

$$\kappa_{\min}(A_1) u_1^T u_1 \le u_1^T A_1 u_1 \le \kappa_{\max}(A_1) u_1^T u_1, \tag{20}$$

$$\kappa_{\min}(A_2) u_{20}^T u_{20} \le u_{20}^T A_2 u_{20} \le \kappa_{\max}(A_2) u_{20}^T u_{20}, \tag{21}$$

где $u_{20}^T = (\varphi_1(\|x_0\|), \varphi_2(\|x_0\|))$.

Доказательство леммы 3 стандартно для квадратичных форм.

Теорема 3. *Пусть в системе* (1) *вектор-функция* f *непрерывна на* $R_+ \times \Omega$ *и*:

1) *выполняются условия предположений* 1 *и* 2;
2) *матрицы* A_1 *и* A_2 *положительно-определенные*;
3) *при всех* $t \in R_+$ *матрица* $A_3(t)$ *отрицательно-определенная.*

Тогда состояние равновесия $x = 0$ *системы* (1) *экспоненциально полиустойчиво в малом.*

Доказательство. Из условия 1 предположения 2 следует, что для квадратичных форм $u_2^T A_2 u_2$ и $\psi^T A_3 \psi$ существуют постоянные $\alpha, \beta > 0$ такие, что

$$\alpha\, u_2^T A_2 u_2 \le \psi^T A_3(t)\psi \le \beta\, u_2^T A_2 u_2. \tag{22}$$

Из оценки (19), учитывая (22), получаем

$$\eta^T D^+ U(t,x)\eta \le -\alpha(1-\mu)\eta^T U(t,x)\eta. \tag{23}$$

Из (23) находим

$$V(t, x(t), \eta) \le V(t_0, x_0, \eta)\exp[-\alpha(1-\mu)(t-t_0)], \quad t \ge t_0. \tag{24}$$

Вследствие лемм 1 и 3 имеем

$$u_1^T(t) A_1 u_1(t) \le u_{20}^T A_2 u_{20} \exp[-\alpha(1-\mu)(t-t_0)], \quad t \ge t_0, \tag{25}$$

и, далее,

$$\kappa_{\min}(A_1)\, u_1^T(t) u_1(t) \le \kappa_{\max}(A_2)\, u_{20}^T u_{20} \exp[-\alpha(1-\mu)(t-t_0)], \quad t \ge t_0. \tag{26}$$

Обозначим $a = \kappa_{\min}^{-1}(A_1)\kappa_{\max}(A_2)$ и оценку (26) представим в виде

$$\|x_1(t)\|^{2r_1} + \|x_2(t)\|^{2r_2} \le$$
$$a\left(\varphi_1^2(\|x_0\|) + \varphi_2^2(\|x_0\|)\right)\exp[-\alpha(1-\mu)(t-t_0)], \quad t \ge t_0. \tag{27}$$

Так как функции $\varphi_1, \varphi_2 \in K$ имеют величину одного порядка (см. условие 1 предположения 1), найдется функция $\varphi \in K$ такая, что

$$\varphi_1^2(\|x_0\|) + \varphi_2^2(\|x_0\|) \le \varphi^2(\|x_0\|). \tag{28}$$

Неравенство (27) будет выполняться при выполнении неравенства

$$\|x_1(t)\|^{2r_1} + \|x_2(t)\|^{2r_2} \le a\varphi^2(\|x_0\|)\exp[-\alpha(1-\mu)(t-t_0)], \quad t \ge t_0. \tag{29}$$

Далее, для любого $\varepsilon > 0$ выберем $\delta(\varepsilon) = \min\left(H(\mu), \varphi_1^{-1}\left(a^{-1/2}\varepsilon^{1/2}\right)\right)$ и обозначим $\lambda = \alpha(1-\mu)$, $0 < \mu < 1$. Тогда из (29) следует, что если $\|x_0\| < \delta(\varepsilon)$, $t_0 \ge$ ≥ 0, то

$$\|x_1(t)\|^{2r_1} + \|x_2(t)\|^{2r_2} \le \varepsilon\exp[-\lambda(t-t_0)], \quad t \ge t_0,$$

т. е. разделяющиеся движения системы (1) экспоненциально полиустойчивы. Теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть в системе* (1) *вектор-функция f непрерывна на* $R_+ \times R^n$ *и:*

1) *выполняются условия предположений* 1 *и* 2 *с функциями* $\varphi_1, \varphi_2 \in KR$ *и* $\psi_1, \psi_2 \in KR$ *соответственно*;

2) *при любом* $\mu \in (0, 1)$ *неравенство* (18) *выполняется для значений* $(t, x) \in R_+ \times R^n$;

3) *выполняются условия* 2 *и* 3 *теоремы* 3.

Тогда состояние равновесия $x = 0$ *системы* (1) *экспоненциально полиустойчиво в целом.*

Доказательство. Аналогично тому, как это сделано при доказательстве теоремы 3, получаем неравенство (29), в котором функция $\varphi(\|x_0\|) \in KR$. Обозначим, как и выше, $\lambda = \alpha(1-\mu)$, $0 < \mu < 1$, и для любого $0 < \Delta < +\infty$

выберем $R(\Delta)$ в виде $R(\Delta) = a\varphi^2(\Delta)$. Тогда при $\|x_0\| < \Delta$, $t_0 \geq 0$, справедлива оценка

$$\|x_1(t)\|^{2r_1} + \|x_2(t)\|^{2r_2} \leq R(\Delta)\exp[-\lambda(t-t_0)], \quad t \geq t_0.$$

Теорема доказана.

Следующий результат устанавливает связь между экспоненциальной x_1-устойчивостью в целом решения $x = 0$ и другими типами устойчивости этого решения.

Теорема 5. *Состояние равновесия $x = 0$ системы* (1) *экспоненциально x_1-устойчиво в целом, если и только если оно экспоненциально x_1-устойчиво в малом и равномерно асимптотически x_1-устойчиво в целом.*

Доказательство. *Необходимость.* Если состояние равновесия $x = 0$ системы (1) экспоненциально x_1-устойчиво в целом, то оно экспоненциально x_1-устойчиво в малом. Из определения 2 находим

$$\|x_1(t; t_0, x_0)\| < M(\Delta) \quad \text{для всех } t \geq t_0 \quad \text{при} \quad \|x_0\| < \Delta, \tag{30}$$

где $M(\Delta) = K(\Delta)\Delta$. Это следует из того, что из равномерной асимптотической x_1-устойчивости в целом следует равномерная x_1-ограниченность решения $x = 0$. Если $\|x_0\| < \delta(\varepsilon)$ при $t \geq t_0$, где $\delta(\varepsilon) = \varepsilon > 0$, из оценки (3) следует

$$\|x_1(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon \quad \text{для всех} \quad t \geq t_0,$$

так как состояние равновесия $x = 0$ равномерно x_1-устойчиво.

Далее нетрудно убедиться, что при любых $\Delta > 0$ и $\varepsilon > 0$, $t_0 \in R_+$, существует $T(\varepsilon, \Delta) = (1/\lambda)\ln(M(\Delta)/\varepsilon)$ такое, что как только $\|x_0\| < \Delta$, $t_0 \geq 0$, то

$$\|x_1(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon \quad \text{для всех} \quad t \geq t_0 + T(\delta, \Delta). \tag{31}$$

Следовательно, состояние равновесия $x = 0$ системы (1) равномерно x_1-устойчиво в целом.

Достаточность. Из экспоненциальной x_1-устойчивости в малом решения $x = 0$ следует существование $\lambda > 0$ для любого $\delta > 0$, $0 < \delta \leq r_0 < 1$ и $a > 0$ таких, что из условия $\|x_0\| \leq \beta$, $t_0 \geq 0$ следует оценка

$$\|x_1(t; t_0, x_0)\| \leq a\|x_0\|\exp(-\lambda(t-t_0)) \quad \text{для всех} \quad t \geq t_0. \tag{32}$$

При любом $\varepsilon > 0$ выберем $\delta(\varepsilon) = \varepsilon/2$. Тогда, при $\|x_0\| < \delta(\varepsilon)$, из (32) получаем

$$\|x_1(t; t_0, x_0)\| \leq \varepsilon\exp(-\lambda(t-t_0)), \quad t \geq t_0.$$

Здесь $0 < \delta \leq \varepsilon$, $a \geq 1 \geq \varepsilon$, $S(r_0) = \{x : \|x_1\| < r_0, \ 0 < \|x_2\| < \infty\}$. Из другого условия теоремы 5 (равномерной асимптотической x_1-устойчивости в целом) следует, что при любых $\Delta > 0$ существует $M(\Delta) > 0$ такое, что если $\|x_0\| < \Delta$, то

$$\|x_1(t; t_0, x_0)\| < M(\Delta) \quad \text{для всех} \quad t \geq t_0, \tag{33}$$

и, кроме того, для произвольных $\Delta > 0$, $\varepsilon > 0$, $t_0 \in R_+$ существует $T = T(\varepsilon, \Delta) > 0$ такое, что из условия $\|x_0\| \leq \Delta$ следует оценка

$$\|x_1(t; t_0, x_0)\| < \delta(\varepsilon) \quad \text{для всех} \quad t \geq t_0 + T(\varepsilon, \Delta). \tag{34}$$

Пусть

$$R(\Delta) = \max(M(\Delta)\exp(\lambda T(\varepsilon, \Delta), a).$$

Теперь найдем оценки решения $x_1(t; t_0, x_0)$ для $t_0 \le t \le t_0 + T(\varepsilon, \Delta)$ и $t \ge t_0 + T(\varepsilon, \Delta)$ соответственно. Пусть $t_0 \le t \le t_0 + T(\varepsilon, \Delta)$. Так как

$$R(\Delta)\exp[-\lambda(t-t_0)] \ge R(\Delta)\exp[-\lambda T(\varepsilon,\Delta)] \ge$$
$$\ge M(\Delta)\exp[-\lambda T(\varepsilon,\Delta)]\exp[-\lambda T(\varepsilon,\Delta)] = M(\Delta),$$

при $\|x_0\| < \Delta$ имеем

$$\|x_1(t; t_0, x_0)\| \le R(\Delta)\exp(-\lambda(t-t_0)), \quad t_0 \le t \le t_0 + T(\varepsilon,\Delta). \tag{35}$$

Пусть $t \ge t_1 \overset{\Delta}{=} t_0 + T(\varepsilon, \Delta)$. Обозначим $\tilde{x} = x(t_1, t_0, x_0)$; значит, $\|x_1\| < \delta(\varepsilon)$. Из оценки (32) имеем

$$\|x_1(t; t_0, \tilde{x})\| \le \varepsilon \exp[-\lambda(t-t_0)], \quad t \ge t_1. \tag{36}$$

Заметим, что вследствие непрерывности и единственности решений системы (1) справедливо соотношение

$$x_1(t; t_0, \tilde{x}) = x_1(t; t_1, x(t_1; t_0, x_0)) \equiv x_1(t; t_1, \tilde{x}), \quad t \ge t_1.$$

Теперь нетрудно видеть, что существует $\lambda > 0$ и для любого $\beta > 0$ существует $R(\Delta) > 0$ такое, что если $\|x_0\| < \Delta$, $t_0 \ge 0$, то

$$\|x_1(t; t_0, x_0)\| \le R(\Delta)\exp[-\lambda(t-t_0)], \quad t \ge t_0. \tag{37}$$

При $\|x_0\| \le r_0$ имеем оценку (32). Следовательно, необходимо рассмотреть значения x_0, для которых $r_0 \le \|x_0\| \le \Delta < +\infty$. При $\|x_0\| / r_0 \ge 1$ получаем $K(\Delta) = R(\Delta)/r_0$, и из неравенства (31) вытекает оценка

$$\|x_1(t; t_0, x_0)\| \le K(\Delta)\|x_0\|\exp[-\lambda(t-t_0)], \quad t \ge t_0.$$

Это и завершает доказательство теоремы.

1. *Аминов А. Б., Сиразетдинов Т. К.* Метод функций Ляпунова в задачах о полиустойчивости движения // Прикл. математика и механика. – 1987. – **51**, № 5. – С. 709–716.
2. *Мартынюк А. А.* Одна теорема о полиустойчивости // Докл. АН СССР. – 1991. – **381**, № 4. – С. 808–811.
3. *Мартынюк А. А.* Новое направление в методе матричных функций Ляпунова // Там же. – 1991. – **319**, № 3. – С. 554–557.
4. *Мартынюк А. А., Чернецкая Л. Н.* О полиустойчивости линейных автономных систем // Докл. АН Украины. Сер. А. – 1993, № 8. – С. 17–20.
5. *Мартынюк А. А., Чернецкая Л. Н.* О полиустойчивости линейных систем с периодическими коэффициентами // Там же. – № 11. – С. 61–65.
6. *Мартынюк А. А.* Об экспоненциальной полиустойчивости разделяющихся движений // Докл. АН России. – 1994. – **36**, № 4. – С. 446–447.
7. *Мартынюк А. А.* О полиустойчивости движения относительно части переменных // Там же. – 1992. – **324**, № 1. – С. 39–41.
8. *Мартынюк А. А.* Об экспоненциальной устойчивости относительно части переменных // Там же. – 1993. – **331**, № 1. – С. 17–19.
9. *He Jianxun, Wang Musong,* Remarks on exponential stability by comparison functions of the same order magnitude // Ann. Different Equats. – 1991. – **7**(4). – P. 409–414.
10. *Hahn W.* Stability of motion. – Berlin: Springer-Verlag, 1967. – 448 p.
11. *Мартынюк А. А.* О матрице-функции Ляпунова и устойчивости движений // Докл. АН СССР. – 1985. – **280**, № 5. – С. 1062–1066.
12. *Martynyuk A. A.* The Lyapunov matrix function // Nonlinear Analysis. – 1984. – № 8. – P. 1223–1226.

Одержано 23.03.94