УДК 517. 54

В. Л. Потемкин (Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Киев)

О ВАРИАЦИЯХ ДЛЯ ОТОБРАЖЕНИЙ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ ПО МЕРЕ НА ДИЛАТАЦИЮ

Variations for classes of homomorphisms with generalized derivatives are constructed in the case where large values of dilatation are subject to measure restrictions of a general form. We use the method of variation construction which was use for the first time by V. J. Guttlyansky.

Побудовано варіації для класів гомеоморфізмів з узагальненими похідними у випадку, коли на великі значення дилатації накладено обмеження за мірою загального вигляду. Застосовано метод побудови варіацій, вперше використаний В. Я. Гутлянським.

Одним из основных результатов последнего времени для классов гомеоморфизмов с обобщенными производными, когда на большие значения дилатации наложены ограничения по мере, является теорема существования и единственности, доказанная Давидом [1]. Изучение свойств компактности гомеоморфизмов Давида начато Тукиа в [2] и продолжено в статье Потемкина В. Л, Рязанова В. И. [3]. В настоящей работе использован метод построения вариаций, впервые предложенный Гутлянским В. Я. [4].

1. Постановка проблемы. Как известно [5], любой сохраняющий ориентацию гомеоморфизм плоскости $f\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ с обобщенными производными в смысле Соболева ($f\in W^1_{1,\mathrm{loc}}$) удовлетворяет уравнению Бельтрами

$$f_{\bar z} = \mu(z) f_z, \tag{1}$$

где $\mu\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ — некоторая измеримая функция с

$$|\mu(z)| \le 1 \tag{2}$$

и, как обычно, $f_{\bar z} = (f_x + i f_y)/2$, $f_z = (f_x - i f_y)/2$, $z = x + iy$. Полагая $\mu(z) = 0$ при $f_z = f_{\bar z} = 0$, мы устраняем связанную с этим случаем неопределенность. Функцию $\mu(z)$ принято называть комплексной характеристикой, а величину

$$p(z) = (1+|\mu(z)|)/(1-|\mu(z)|) \tag{3}$$

— дилатацией отображения f.

Недавно Давид [1] доказал теорему существования и единственности гомеоморфных решений $f\colon \overline{\mathbb{C}}\to\overline{\mathbb{C}}$, $f\in W^1_{1,\mathrm{loc}}$, $f(0)=0$, $f(1)=1$, $f(\infty)=\infty$, уравнения Бельтрами с $\mu(z)$, удовлетворяющей условию

$$\operatorname{mes}\{z\in\mathbb{C}: |\mu(z)| > 1-\varepsilon\} \le c_0 e^{-\alpha/\varepsilon} \tag{4}$$

для всех $\varepsilon\le\varepsilon_0$: $\varepsilon_0\in(0,1]$, $\alpha>0$, $c_0>0$. Условие (4) удобнее переписать в эквивалентной форме через дилатацию:

$$\operatorname{mes}\{z\in\mathbb{C}: p(z) > t\} \le c e^{-\gamma t} \tag{5}$$

для всех $t\ge T$, $T = -1 + 2/\varepsilon \ge 1$, $\gamma = \alpha/2 > 0$, $c = c_0 e^{-\gamma} > 0$.

Давид установил локально равностепенную непрерывность и открытость таких гомеоморфизмов. Таким образом, ввиду известной теоремы Арцелла – Асколи (см., например, [6, с. 289]) указанный класс гомеоморфизмов является предкомпактным в пространстве H всех гомеоморфизмов относительно локально равномерной сходимости.

Тукиа [2] установил, что предельные отображения также являются гомеоморфизмами Давида, но, вообще говоря, с другими постоянными T, γ и c из неравенства (5). В связи с этим возник естественный вопрос с секвенциальной компактности классов с ограничениями по мере общего вида на дилатацию:

$$\operatorname{mes}\{z \in \mathbb{C} : p(z) > t\} \leq \varphi(z), \tag{6}$$

где $\varphi : I \to \overline{\mathbb{R}}^+$, $I = [1, \infty]$, — произвольная функция. В дальнейшем через $H(\varphi)$ обозначаем класс всех гомеоморфизмов плоскости $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$, $f \in W^1_{1,\mathrm{loc}}$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(\infty) = \infty$, дилатации которых удовлетворяют условию (6). Обозначим через $\mathfrak{M}(\varphi)$ и $\overline{\mathfrak{M}(\varphi)}$ множества комплексных характеристик отображений из классов $H(\varphi)$ и $\overline{H(\varphi)}$ соответственно, где замыкание $\overline{H(\varphi)}$ понимается относительно топологии локально равномерной сходимости.

В [3] показано, что если $\varphi : I \to \overline{\mathbb{R}}^+$ возрастает и непрерывна справа, то для компактности класса $H(\varphi)$ необходимо и достаточно, чтобы он совпадал с классом Q-квазиконформных отображений. Там же установлено, что класс комплексных характеристик $\overline{\mathfrak{M}(\varphi)}$ является выпуклым множеством при условии, что $\varphi : I \to \overline{\mathbb{R}}^+$ экспоненциально убывает на ∞. Исходный класс характеристик $\mathfrak{M}(\varphi)$ может быть невыпуклым. Именно выпуклость класса $\mathfrak{M}(\varphi)$ позволяет строить очень простые вариации, исходя из способа, предложенного Гутлянским В. Я. [4].

2. Сравнение с интегральными ограничениями. В [7] дан критерий компактности классов H^{Φ} нормированных гомеоморфизмов плоскости, выделяемых интегральными ограничениями вида

$$\iint\limits_{\mathbb{C}} \Phi(p(z))\, dx\, dy \leq 1, \tag{7}$$

где $\Phi : I \to \overline{\mathbb{R}}^+$, $I = [1, \infty]$, — произвольная функция с ростом на ∞. Для непустоты классов H^{Φ} необходимо и достаточно, чтобы $\inf \Phi = 0$. Критерий компактности состоял в том, что для этого необходимо и достаточно, чтобы функция Φ была неубывающей, выпуклой и непрерывной в смысле $\overline{\mathbb{R}}^+$ слева в точке

$$K = \sup_{\Phi(t) < \infty} t. \tag{8}$$

В [7] показано, что, замыкая классы с интегральным ограничением H^{Φ}, получаем классы того же типа.

Как установлено в [3], в замыкании класса $H(\varphi)$ получаются классы другого типа, что усложняет построение вариаций в классе $\overline{H(\varphi)}$.

3. Построение вариаций в классе $\overline{H(\varphi)}$.

Теорема. *Пусть $\varphi : I \to \overline{\mathbb{R}}^+$ — произвольная функция с экспоненциальным убыванием на ∞ и $\mu \in \mathfrak{M}(\varphi)$ — комплексная характеристика отображения $f \in H(\varphi)$, а $\nu \in \mathfrak{M}(\varphi)$ такова, что функция*

$$\kappa = (\nu - \mu) / (1 - |\mu|^2) \tag{9}$$

принадлежит открытому единичному шару в $L^{\infty}(\mathbb{C})$. Тогда существует вариация f_ε, $\varepsilon \in [0, 1]$, отображения f в классе $\overline{H(\varphi)}$ вида

$$f_\varepsilon(\zeta) = f(\zeta) - \frac{\varepsilon}{\pi} \iint\limits_{\mathbb{C}} (\nu(z) - \mu(z)) S(f(z), f(\zeta))\, f_z^2\, dx\, dy + o(\varepsilon, z), \tag{10}$$

где

$$S(w, w') = \frac{1}{w - w'} \frac{w'}{w} \frac{w' - 1}{w - 1}. \tag{11}$$

Доказательство. Пусть

$$\kappa_\varepsilon(z) = \frac{\varepsilon\kappa(z)}{1-\varepsilon\kappa(z)\overline{\mu(z)}} = \varepsilon\kappa(z)\sum_{n=0}^{\infty}\left[\varepsilon\kappa(z)\overline{\mu(z)}\right]^n.$$

Поскольку $\|\kappa\|_\infty = k < 1$, то при $\varepsilon \in [0, 1/2]$

$$\|\kappa_\varepsilon\|_\infty \le \frac{\varepsilon k}{1-\varepsilon k} \le \frac{k}{2-k} = q < 1.$$

Далее, пусть

$$\gamma_\varepsilon(w) = \left(\kappa_\varepsilon \frac{f_z}{\overline{f_z}}\right) \circ f^{-1}(w).$$

В силу теоремы Давида f является локально абсолютно непрерывным гомеоморфизмом вместе со своим обратным f^{-1} [1, с. 27]. Поэтому $\|\gamma_\varepsilon\|_\infty \le q <$ < 1 при $\varepsilon \in [0, 1/2]$.

Рассмотрим семейство Q-квазиконформных $(Q = (1+q)/(1-q))$ отображений $g_\varepsilon\colon \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$, $\varepsilon \in [0, 1/2]$, с характеристиками γ_ε, которые оставляют неподвижными точки 0, 1 и ∞. Тогда по теореме о дифференцировании Q-квазиконформных отображений по параметру [8, с. 96]

$$g_\varepsilon(w') = w' - \frac{\varepsilon}{\pi}\iint_{\mathbb{C}} \gamma(w) S(w, w')\, du\, dv + o(\varepsilon, w'),$$

где

$$\gamma(w) = \left(\kappa \frac{f_z}{\overline{f_z}}\right) \circ f^{-1}(w)$$

и $o(\varepsilon, w')/\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ локально равномерно относительно $w' \in \mathbb{C}$.

Легко видеть, что $f_\varepsilon = g_\varepsilon \circ f$, где через $f_\varepsilon \in \overline{H(\varphi)}$ обозначим отображения с характеристиками $\mu_\varepsilon = \mu(z) + \varepsilon(\nu(z) - \mu(z))$.

Следовательно,

$$f_\varepsilon(\zeta) = f(\zeta) - \frac{\varepsilon}{\pi}\iint_{\mathbb{C}} \gamma(w) S(w, f(\zeta))\, du\, dv + o(\varepsilon, \zeta), \tag{12}$$

где $o(\varepsilon, \zeta)/\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ локально равномерно относительно $\zeta \in \mathbb{C}$. Отсюда в силу локально абсолютной непрерывности гомеоморфизма f, делая замену переменной [5, с. 126, 136], после элементарных преобразований получаем (10). Теорема доказана.

1. *David G.* Solutions de l'equation de Beltrammi avec $\|\mu\|_\infty = 1$ // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math. – 1988. – **13**. – P. 25–70.
2. *Tokia P.* Comactness properties of μ-homeomorphisms // Ibid. – 1991. – **16**. – P. 47–69.
3. *Потемкин В. Л., Рязанов В. И.* О гомеоморфизмах класса Соболева с ограничениями по мере на дилатацию // Докл. НАН Украины. – 1995. – № 7. – С. 15–19.
4. *Гутлянский В. Я.* О методе вариаций для однолистных аналитических функций с квазиконформным продолжением // Сиб. мат. журн. – 1980. – **21**, № 2. – С. 61–78.
5. *Lehto O., Virtanen K.* Quasikonforme Abbildungen. – Berlin etc.: Springer, 1965. — 269 p.
6. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 896 с.
7. *Рязанов В. И.* О квазиконформных отображениях с ограничениями по мере // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 7. – С. 1009–1019.
8. *Альфорс Л.* Лекции по квазиконформным отображениям. – М.: Мир, 1969. – 133 с.

Получено 10.04.95