УДК 517. 927

Я. М. Дымарский (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

О МНОГООБРАЗИЯХ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ И ПОТЕНЦИАЛОВ, ПОРОЖДЕННЫХ СЕМЕЙСТВОМ ПЕРИОДИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

A family of boundary-value problems, with potential being a parameter, is considered. We study the manifold of normalized eigen functions, which have an even number of zeros in the period, and the manifold of potentials, which correspond to eigen values of multiplicity two. We prove that the manifold of normalized eigen functions is a trivial fiber bundle over the unit circle, and the manifold of potentials with eigen values of multiplicity two is trivially imbedded into the space of potentials.

Розглянуто сукупність крайових задач, в яких параметром є деякий потенціал. Досліджено многовид нормованих власних функцій, що мають на періоді парну кількість нулів, та многовид потенціалів, яким відповідають двократні власні значення. Доведено, зокрема, що многовид нормованих власних функцій є тривіально розшарованим простором над одиничним колом, а многовид потенціалів з двократними власними значеннями є гомотопно тривіальним много-видом, тривіально вкладеним у простір потенціалів.

Введение. Рассмотрим семейство периодических краевых задач

$$u'' + p(x)u + \lambda u = 0, \tag{1}$$

$$u(0) = u(2\pi), \quad u'(0) = u'(2\pi), \tag{2}$$

где параметром является потенциал $p(x)$ — действительная, непрерывная, 2π-периодическая функция. Банахово пространство потенциалов обозначим через P. Нас интересуют собственные функции (с. ф.) $u(x) \in C^2$ семейства (1), (2) и соответствующие собственные значения (с. зн.) $\lambda \in \mathbb{R}$. Известно [1, с. 377], что: 1) при фиксированном p с. зн. можно расположить в виде неубывающей последовательности $\lambda_0 < \lambda_1^- \leq \lambda_1^+ < \lambda_2^- \leq \lambda_2^+ < \ldots$; 2) если $\lambda_n^- < \lambda_n^+$, то оба с. зн. простые; если $\lambda_n^- = \lambda_n^+$, то с. зн. двукратное, т. е. все решения уравнения (1) с $\lambda = \lambda_n^\pm$ являются с. ф.; 3) нули с. ф. невырождены; на отрезке $[0, 2\pi)$ количество нулей с. ф., соответствующей с. зн. с номером n, равно $2n$. Обозначим через $P_n^* \subset P$ множество потенциалов, которым соответствуют двукратные с. зн. с номером n.

Очевидно, что двум потенциалам соответствует одна и та же с. ф. тогда и только тогда, когда они различаются на постоянную C. При этом соответствующее с. зн. изменяется на $-C$, а его номер не изменяется. Поэтому удобно пользоваться фактор-пространством $Q = P / \mathbb{R}$ и фактор-множеством $Q_n^* = P_n^* / \mathbb{R}$. Элементы последних обозначим $q = \{p\}$.

Обозначим через $(x_i) \subset [0, 2\pi)$, $i = 1, \ldots, 2n$, возрастающую последовательность нулей некоторой n-й с. ф. В дальнейшем предполагается, что n-я с. ф. удовлетворяет условию нормировки

$$\| u \| = \left(\sum_{i=1}^{2n} (u'(x_i))^2 \right)^{1/2} = 1. \tag{3}$$

Причина введения такой нормировки объяснена в замечании 4.

Обозначим через U_n^- (U_n^+) множество всех с. ф. семейства (1), (2), которым соответствуют простые с. зн. с индексом „–" („+"). Через U_n^* обозначим множество всех с. ф. семейства (1), (2), которым соответствуют двукратные с. зн., т. е. эти с. ф. порождены классами вырожденных потенциалов $q \in Q_n^*$. Очевидно, что введенные множества попарно не пересекаются. Их объединение (т. е. множество всех с. ф. с номером n) обозначим через $U_n = U_n^- \cup U_n^+ \cup U_n^*$.

Отождествим с. ф. отличающиеся знаком. Обозначим через V_n, V_n^-, V_n^+, V_n^* множества, полученные из введенных выше в результате отождествления. Последние три множества попарно не пересекаются и $V_n = V_n^- \cup V_n^+ \cup V_n^*$.

Целью работы является описание топологических свойств множеств U_n, V_n, P_n, Q_n и их подмножеств. В исследовании мы опираемся на аналитическое задание множества U_n^*, данное Ф. Нейманом [2, 3]. Будет доказано, что U_n и V_n являются расслоенными пространствами. Базы этих расслоений нетривиальны и требуют отдельного описания, с которого мы и начнем. Затем описано вспомогательное векторное расслоение, являющееся объемлющим пространством для множества с. ф. Основные результаты сформулированы в п. 3. Пункты 4 – 7 посвящены доказательствам теорем п. 3.

1. Многообразия наборов точек окружности. Пусть S^1 — ориентированная единичная окружность. Пусть $(x_1, \ldots, x_k) = (x_i)$ — набор упорядоченных точек S^1, заданных своими угловыми координатами, т. е. $x_i \in [0, 2\pi)$, $x_i < x_{i+1}$.

Замечания. **1.** Точки из введенных наборов будут интерпретированы далее как нули с. ф. Поэтому для них использовано то же обозначение.

2. В дальнейшем будем осуществлять различные преобразования наборов (x_i). Подразумевается, что точки наборов-образов автоматически упорядочиваются и берутся по $\bmod 2\pi$. Последнее относится и к образам при отображении наборов в S^1.

Множество $X_k = \{(x_i)\}$ наборов является C^∞-многообразием размерности k. Обозначим через M_k C^∞-подмногообразие размерности один, состоящее из наборов (x_i), которые являются вершинами правильных k-угольников.

Рассмотрим отображение

$$\alpha : X_k \to S^1, \quad \alpha((x_i)) = \sum_{i=1}^{n} x_i. \tag{4}$$

Следующее утверждение устанавливает связь между введенными многообразиями и отображением α.

Теорема 1. *Справедливы утверждения:* 1) *сужение* α *на* M_k *является* C^∞*-диффеоморфизмом на* S^1; 2) M_k *является строгим деформационным ретрактом* X_k; 3) X_k *гомотопически эквивалентно* S^1; 4) *отображение* α *является* C^∞*-гладким, локально тривиальным расслоением, слоем которого является диск* D^{k-1}; 5) *многообразие* X_k *ориентируемо в случае нечетного* k *и неориентируемо в случае четного* k; 6) *при нечетном* k *расслоение* α *тривиально.*

Доказательство. 1. При повороте правильного вписанного многоугольника на угол $2\pi/k$ величина $\sum x_i$ увеличивается на 2π. Таким образом, значение отображения (4) не меняется, а правильный многоугольник преобразуется сам в себя.

2. Деформацию X_k в M осуществим с помощью потока, порожденного векторным полем $(dx_i/dt) = \xi = (\xi_i) = (x_{i+1} - x_i) - (x_i - x_{i-1})$, где $i = 1, \ldots, k$; $x_0 = x_k$, $x_{k+1} = x_1$. Отметим, что $\sum \xi_i = 0$, поэтому поверхности $\alpha((x_i)) = \varphi$,

где $\varphi = \mathrm{const}$, являются интегральными для поля ξ. Кроме того, $\xi = -\operatorname{grad} J((x_i))$, где функционал $J((x_i)) = 2^{-1} \sum (x_{i+1} - x_i)^2$. На поверхности $\alpha^{-1}(\varphi)$ функционал J имеет только одну критическую точку (минимум) — набор вершин соответствующего правильного k-угольника. С помощью стандартных рассуждений [4, с. 225] нетрудно показать, что эта точка является асимптотически устойчивой для всей поверхности $\alpha^{-1}(\varphi)$. Поэтому поток поля ξ стягивает $\alpha^{-1}(\varphi)$ в точку $(x_i) \in M_k$, а все многообразие X_k — на M_k, оставляя при этом M_k в покое.

3. Утверждение следует из утверждений 1 и 2 теоремы.

4. Пусть $O(\varphi)$ — окрестность точки $\varphi \in S^1$, отличная от S^1. Отображение $A : \alpha^{-1}(O(\varphi)) \to O(\varphi) \times \alpha^{-1}(\varphi)$, где $A((x_i)) = (\alpha((x_i)), (x_i - (\alpha((x_i)) - \varphi)/k))$, осуществляет локальную тривиализацию расслоения (4). Гладкость расслоения очевидна; стягиваемость слоя следует из утверждений 1 и 2 теоремы.

5. В фиксированном слое $\alpha^{-1}(\varphi)$ рассмотрим настолько малую окрестность $O\varphi((x_i^0))$ точки $(x_i^0) \in M_k \cap \alpha^{-1}(\varphi)$, что в ней можно ввести аффинную структуру с помощью угловых координат x_i. Поворот окружности, содержащей (x_i), на угол $2\pi/k$ преобразует слой $\alpha^{-1}(\varphi)$ в себя. Выберем точку $(x_i) \in O_\varphi((x_i^0))$ такую, что точки $(x_i + 2\pi m/k)$, $m = 0, \ldots, k-1$, остаются в окрестности $O_\varphi((x_i^0))$ и являются последовательными вершинами невырожденного $(k-1)$-мерного симплекса. Поворот на угол $2\pi/k$ преобразует симплекс в себя, осуществляя циклическую перестановку вершин. Если количество вершин нечетно, то циклическая перестановки четная, т.е. сохраняющая ориентацию. При четном k — все наоборот.

6. Утверждение следует из ориентируемости X_k [5, с. 475].

Теорема доказана.

Примеры. X_2 — открытый лист Мебиуса; X_3 — открытое полноторие.

Теперь рассмотрим C^∞-гладкое многообразие

$$X_{n,2} = \{((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n))\} = \{((x_i), (y_i))\}$$

пар наборов упорядоченных чередующихся точек S^1, т.е. или $x_i < y_i < x_{i+1}$, или $y_i < x_i < y_{i+1}$. Пусть $M_{n,2} \subset X_{n,2}$ — C^∞-гладкое подмногообразие размерности один, состоящее из пар $((x_i), (y_i))$, которые являются вершинами правильных $2n$-угольников. Рассмотрим C^∞-отображение

$$\beta : X_{n,2} \to X_n, \quad \beta((x_i), (y_i)) = (x_i). \tag{5}$$

Теорема 2. *Справедливы утверждения:* 1) *отображение* β *есть* C^∞-*гладкое, тривиальное расслоение, слоем которого является диск* D^n; 2) *сужение* $\alpha\beta$ *на* $M_{n,2}$ *является* C^∞-*диффеоморфизмом на* S^1; 3) $M_{n,2}$ *является строгим деформационным ретрактом* $X_{n,2}$; 4) *отображение* $\alpha\beta$ *является* C^∞-*гладким локально тривиальным расслоением над* S^1, *слоем которого является диск* D^{2n-1}; $X_{n,2}$ *гомотопически эквивалентно* S^1; 5) *многообразие* $X_{n,2}$ *ориентируемо в случае нечетного* n *и неориентируемо при четном* n.

Доказательство. 1. Пусть $y_i \in (x_i, x_{i+1})$. Обозначим $\Delta y_i = x_{i+1} - x_i$, $z_i = y_i - x_i$. Отображение $B: X_{n2} \to X_n \times (0, 1)^n$, тривиализующее β, имеет вид $B((x_i), (y_i)) = ((x_i), (z_i / \Delta y_i))$.

2. Утверждение следует из п. 1 теоремы 1 и п. 1 теоремы 2.

3. Сначала продеформируем $X_{n,2}$ в C^∞-гладкое n-мерное подмногообразие X_n' пар наборов вида $((x_i), (y_i'))$, где y_i' — середина дуги (x_i, x_{i+1}). Заметим, что X_n' диффеоморфно X_n. Затем продеформируем X_n' в M с помощью конструкции, описанной в доказательстве теоремы 1, оставляя в ходе деформации y_i' серединой соответствующей дуги.

Утверждения 4, 5 следуют из пп. 1–3 и теоремы 1.

2. Вспомогательное векторное расслоение. Пусть $L((x_i))$ — линейное пространство C^2-гладких и 2π-периодических функций, обращающихся в нуль в точках x_i, $i = 1, \ldots 2n$, и имеющих свойства: 1) $u''(x_i) = 0$; 2) существуют $u'''(x_i)$. Определим на $L((x_i))$ норму по формуле

$$\| u \|_1 = \max \{ | u''(x) |, | u'''(x_i) | \}, \quad x \in [0, 2\pi), \ i = 1, \ldots . 2n.$$

Пространство $L((x_i))$ становится банаховым. Обозначим через $W_{2n} = \sum L((x_i))$ сумму по $(x_i) \in X_{2n}$ банаховых пространств в смысле определения, данного в [5, с. 11], т.е. множество пар $(u, (x_i))$ таких, что u есть элемент $L((x_i))$. Рассмотрим отображение

$$\gamma: W_{2n} \to X_{2n}, \quad \gamma(u, (x_i)) = (x_i). \tag{6}$$

Определим на W_{2n} структуру векторного расслоения. С этой целью введем биективное отображение между „близкими" слоями. Обозначим через (Δx_i), $i = 1, \ldots . 2n$, набор действительных чисел, удовлетворяющих неравенствам

$$| \Delta x_i | < 2^{-1} \min \{ x_{i+1} - x_i, x_i - x_{i-1} \}.$$

Пусть $y(x)$ — C^2-гладкая, 2π-периодическая функция, удовлетворяющая условиям: 1) $y(x_i) = x_i + \Delta x_i$; 2) всюду $y'(x) > 0$; 3) $y'(x) \equiv 1$ в некоторых окрестностях точек x_i. Отображение

$$\tau((x_i)) : \gamma^{-1}((x_i + \Delta x_i)) \to \gamma^{-1}((x_i)), \tag{7}$$

где

$$\tau((x_i)) (u, (x_i + \Delta x_i)) = ((y'(x))^{-1/2} u(y(x)), (x_i)),$$

является непрерывным линейным изоморфизмом слоев. (Причина введения сомножителя $(y')^{-1/2}$ станет понятной ниже (см. замечание 4).)

Для каждой фиксированной точки $(x_i) \in X_{2n}$ возьмем $2n$-параметрическое C^0-семейство функций $y(x_i + \Delta x_i)(x)$, параметризованное приращениями Δx_i. Обозначим через $O((x_i))$ окрестность точки $(x_i) \in X_{2n}$, порожденную набором (Δx_i) допустимых приращений. Отображение (7) и введенное семейство функций индуцируют биекцию

$$\mathrm{T}: \gamma^{-1}(O((x_i))) \to O((x_i)) \times \gamma^{-1}((x_i)), \tag{8}$$

где

$$\mathrm{T}(u, (x_i + \Delta x_i)) = ((x_i + \Delta x_i), \tau((x_i)) (u, (x_i + \Delta x_i))).$$

Теорема 3. *На множестве W_{2n} существует единственная структура банахова C^0-многообразия такая, что γ есть векторное расслоение класса C^0.*

Доказательство. Во-первых, отображение (8) коммутирует с проектированием (6). Во-вторых, отображение ν, действующее из пересечения $O((x_i)) \cap \cap O((z_i))$ в банахово пространство $\mathcal{L}(\gamma^{-1}((x_i)), \gamma^{-1}((z_i)))$ непрерывных линейных изоморфизмов между слоями, задаваемое формулой $\nu((\Delta x_i)) = = \tau((z_i))\tau^{-1}((x_i))$, принадлежит классу C^0 [6, с. 174]. В силу предложения 2 [6, с. 57] на W_{2n} существует единственная структура многообразия такая, что отображение (8) становится локальной тривиализацией векторного расслоения (6). Теорема доказана.

***Замечание* 3.** Увеличение гладкости семейства функций $y(x)$ не повышает гладкости расслоения γ, как это следует из [6, с. 174] (омега-теорема).

3. Формулировка основных теорем. Начнем с описания аналитических свойств собственных функций из U_n (V_n).

Теорема 4. *C^2-гладкая и 2π-периодическая функция $u(x)$ (класс $\mathfrak{v}$ с. ф. $\pm u(x)$) принадлежит U_n (V_n) тогда и только тогда, когда она имеет следующие свойства:*

1) *на отрезке* $[0, 2\pi)$ *имеет в точности* $2n$ *невырожденных нулей* x_i, $i = = 1, \ldots, 2n$; 2) $u''(x_i) = 0$; 3) *существуют производные* $u'''(x_i)$.

Введем топологию в U_n (V_n).

Теорема 5. *Многообразие W_{2n} индуцирует в U_n (V_n) структуру топологического пространства.*

Обозначим нуль x_i с. ф. $u(x)$ через x_i^+ (x_i^-), если $u'(x_i) > 0$ (< 0). Рассмотрим расслаивающее отображение

$$\delta\colon U_n \to X_{n,2} \quad \delta(u) = \big((x_i^+), (x_i^-)\big), \tag{9}$$

которое сопоставляет с. ф. пару наборов ее упорядоченных чередующихся нулей.

Теорема 6. 1. *Отображение δ является локально тривиальным C^0-расслоением.* 2. *Слой $\delta^{-1}(\cdot)$ расслоения δ является гомотопически тривиальным банаховым C^∞-многообразием.* 3. *U_n является банаховым C^0-многообразием.*

Обозначим через δ^* сужение расслоения (9) на U_n^*. Теоремы 7 – 9 описывают взаимные свойства U_n, U_n^* и $U_n^\pm$ в терминах δ и δ^*.

Теорема 7. 1. *Отображение δ^* является C^0-подрасслоением расслоения δ.* 2. *Слой $(\delta^*)^{-1}(\cdot)$ является гомотопически тривиальным C^∞-подмногообразием коразмерности один слоя $\delta^{-1}(\cdot)$.* 3. *U_n^* является C^0-подмногообразием U_n коразмерности один.*

Теорема 8. 1. *Множества $U_n^\pm$ являются открытыми подмногообразиями U_n.* 2. *U_n^* является строгим деформационным ретрактом замыканий $\mathrm{Cl}\, U_n^\pm$ и многообразия U_n; все деформации можно выбрать согласованными с расслоением δ.*

Теорема 9. *U_n является тривиально C^0-расслоенным пространством над U_n^*, слой которого C^∞-изоморфен $\mathbb{R}$.*

Теперь сформулируем теоремы о расслоении U_n и U_n^* над S^1. Рассмотрим произведение отображений

$$\alpha\beta\delta\colon U_n \to S^1, \tag{10}$$

которое с. ф. $u(x)$ ставит в соответствие сумму $\sum x_i$ всех ее нулей, для которых $u'(x_i^+) > 0$ (см. (4), (5)).

Теорема 10. *Отображение* $\alpha\beta\delta$ *является тривиальным* C^0*-расслоением, слой которого — гомотопически тривиальное банахово* C^0*-многообразие. Сужение* $\alpha\beta\delta^*$ *расслоения* (10) *на* U_n^* *является тривиальным подрасслоением, слой которого — гомотопически тривиальное банахово многообразие.*

Теорема 11. *Многообразия* $U_n, U_n^*, U_n^\pm$ *гомотопически эквивалентны* S^1.

Теоремы 12 – 14 о многообразиях $V_n, V_n^*, V_n^\pm$ являются аналогами теорем 6–11. Рассмотрим отображение

$$\theta\colon V_n \to X_{2n}, \quad \theta(v) = (x_i), \tag{11}$$

которое классу с. ф. v сопоставляет набор его упорядоченных нулей. Обозначим через θ^* сужение θ на V_n^*.

Теорема 12. 1. *Отображение* θ *является локально тривиальным* C^0*-расслоением.* 2. *Слой расслоения* θ *является* C^∞*-гладким, гомотопически тривиальным банаховым многообразием.* 3. V_n *является банаховым* C^0*-многообразием.*

Теорема 13. *Для многообразий* $V_n, V_n^*, V_n^\pm$ *и расслоений* θ, θ^* *справедливы утверждения, являющиеся полными аналогами теорем* 7 – 9.

Рассмотрим произведение отображений

$$\alpha\theta\colon V_n \to S^1, \tag{12}$$

которое классу с. ф. v ставит в соответствие сумму $\sum x_i$ всех ее нулей.

Теорема 14. 1. *Отображение* $\alpha\theta$ *является тривиальным* C^0*-расслоением, слой которого — гомотопически тривиальное банахово* C^0*-многообразие.* 2. *Сужение* $\alpha\theta^*$ *расслоения* (12) *на* V_n^* *является тривиальным подрасслоением, слой которого — гомотопически тривиальное банахово многообразие.* 3. *Многообразия* $V_n, V_n^*, V_n^\pm$ *гомотопически эквивалентны* S^1.

Теоремы 15–17 посвящены многообразиям Q и P. Известно [7], что P_n^* является C^∞-подмногообразием коразмерности два. Уточним топологические свойства Q_n^* и P_n^*.

Определение. *Подмногообразие банахова пространства коразмерности два называется тривиально вложенным в пространство, если дополнение к нему гомотопически эквивалентно* S^1.

Теорема 15. *Многообразие* Q_n^* (P_n^*) *гомотопически тривиально и тривиально вложено в* Q (P).

Теорема 16. *Подмногообразие* Q_n^* (P_n^*) *является строгим деформационным ретрактом пространства* Q (P).

Теорема 17. *Пространство* Q (P) *тривиально* C^0*-расслоено над* Q_n^* (P_n^*). *Слой расслоения гомеоморфен* $\mathbb{R}^2$.

4. Доказательства теорем 4 – 6, 12. ***Доказательство теоремы 4.*** Необходимость указанных свойств очевидна. Для доказательства достаточности рассмотрим отображение

$$F: U_n \to Q, \quad F(u) = \{-u''/u\}. \tag{13}$$

Отображение F корректно определено в силу свойств 1–3 с. ф. $u(x)$. С его помощью однозначно определяется класс потенциалов, для которых функция $u(x)$ является собственной с номером n. Поскольку отображение F четно, оно индуцирует отображение $\tilde{F}$ из V_n в Q, с помощью которого также однозначно определяется класс q по классу v, что и требовалось доказать.

Аналитические и топологические свойства F ($\tilde{F}$) будут определены после того, как мы определим топологию множества U_n (V_n).

***Доказательство теоремы* 5.** Удалим из пространства $L((x_i))$ замкнутое подмножество, состоящее из функций, у которых или существуют нули, отличные от x_i, или нули x_i неустойчивы. Полученное дополнение состоит из двух открытых связных компонент, каждая из которых является выпуклым конусом. Условие нормировки (3), будучи на каждом из конусов невырожденным и C^∞-гладким функционалом, высекает на них C^∞-гладкие центрально-симметричные многообразия коразмерности один. Объединение этих многообразий по всем (x_i) из X_{2n} есть U_n. С другой стороны, это объединение можно трактовать как подмножество W_{2n}. Таким образом, в U_n индуцируется структура топологического пространства.

Отождествление описанных выше центрально-симметричных многообразий индуцирует структуру топологического пространства в V_n. Теорема доказана.

***Доказательство теоремы* 6.** В силу теоремы 5 и благодаря свойствам 1–3 функций $y(x)$ отображение (8) сохраняет свойства 1–3 с. ф. (теорема 4) и условие нормировки (3). Поэтому сужение отображения Т на U_n является локальной тривиализацией δ.

2. Прообразом $\delta^{-1}(\cdot)$ точки $(\cdot) = ((x_i^+), (x_i^-))$ является множество тех с. ф., для которых указанные фиксированные числа являются нулями и в них определены знаки первой производной с. ф.. Из рассуждений, приведенных при доказательстве теоремы 5, следует, что: а) $\delta^{-1}(\cdot)$ — C^∞-гладкое подмногообразие коразмерности один пространства $L((x_i))$; б) гомотопия

$$((1-t)u + tu_0) / \|(1-t)u + tu_0\|, \quad 0 \le t \le 1.$$

стягивает $\delta^{-1}(\cdot)$ в точку u_0.

3. Утверждение следует из п. 1.

Доказательство теоремы 12 повторяет доказательство теоремы 6.

5. *Доказательства теорем* 7–9, 13. Исследование множеств U_n^*, V_n^* осуществим с помощью теоремы Ф. Неймана, которая гласит, что функция $u \in \gamma^{-1}((x_i))$ принадлежит множеству U_n^* только в том случае, когда она удовлетворяет условию $f(u) = 0$, где

$$f(u) = \int_0^{2\pi} \left(u^{-2}(x) - \sum_{i=1}^{2n} (2u'(x_i)\sin((x - x_i)/2))^{-2} \right) dx. \tag{14}$$

***Доказательство теоремы* 7.** 1. Функционал f принадлежит классу C^∞ и невырожден на каждом слое $\delta^{-1}(\cdot)$. Он непрерывен на U_n. Благодаря свойствам 1 – 3 функций $y(x)$ и специальному виду послойного отображения (7) (наличие сомножителя $(y')^{-1/2}$), отображение (8) сохраняет каждое слагаемое в выражении (14) для функционала f. Поэтому сужение (8) на U_n^* является локальной тривиализацией расслоения δ^*.

2. Рассмотрим вспомогательное C^∞-расслоение

$$\mu: \delta^{-1}(\cdot) \to (\mathbb{R}^+)^n \times (\mathbb{R}^-)^n, \tag{15}$$

где $\mu(u) = \left(u'(x_1^+), u'(x_3^+), \ldots, u'(x_{2n}^-)\right)$.

Сужение μ на $(\delta^*)^{-1}(\cdot)$ обозначим μ^*. Рассмотрим произвольное непрерывное нулевое сечение расслоения μ^*. Пусть u_0 — точка из образа сечения. В слое расслоения μ^*, которому принадлежит u_0, гомотопия, стягивающая слой в точку u_0, имеет, например, вид

$$u(x, t) = u_0(((1-t)u_0^2 + tu^2)/u^2)^{-1/2}, \quad 0 \le t \le 1.$$

В самом деле, не изменяются производные в отмеченных точках: $u_x'(x_i^\pm, t) = u_0'(x_i^\pm)$ и не изменяется значение f:

$$f(u(x, t)) = (1-t)f(u) + tf(u_0) = 0.$$

Из стягиваемости базы и каждого слоя расслоения μ^* следует стягиваемость $(\delta^*)^{-1}(\cdot)$.

3. Утверждение следует из пп. 1, 2.

Замечание 4. Условие нормировки (3) и послойное отображение (7) выбраны такими, чтобы проще было подобрать тривиализацию, сохраняющую одновременно и условие нормировки и значение функционала f.

Доказательство теоремы 8. 1. Утверждение следует из теоремы 7.

2. Каждое многообразие $U_n^\pm$ определяется одним из неравенств: $f > 0$ или $f < 0$. Но мы не знаем, как между собой связаны индексы „+", „–" и знаки функционала f. Поэтому докажем, что U_n^* является строгим деформационным ретрактом замыкания каждого из подмногообразий

$$f^{-1}(\pm) = \{u : f(u) > 0 \ (< 0)\}.$$

Воспользуемся тем, что слой $\delta^{-1}(\cdot)$ является C^∞-многообразием. Искомые деформации осуществим с помощью потока $S(u, t)$, порожденного векторным полем (в.п.) $du/dt = \zeta(u) = f(u)u^3/(1+u^2)$.

Лемма 1. *Поток* $S(u, t)$ *имеет следующие свойства:* 1) *инвариантен относительно слоев* $\delta^{-1}(\cdot)$ *и* $\mu^{-1}(\cdot)$ *расслоений* (9) *и* (15) *соответственно;* 2) *неподвижен на* $U_n^* = f^{-1}(0)$; 3) *инвариантен относительно* $f^{-1}(\pm)$; 4) *определен на* $[0, \infty)$; 5) *каждая точка* $u \in U_n^*$ *является предельной в точности для двух фазовых кривых, которые принадлежат многообразиям* $f^{-1}(\pm)$.

Доказательство. Рассмотрим сначала поток $T(u, t)$, порожденный вспомогательным в.п. $\kappa(u) = u^3/(1+u^2)$. Поскольку

$$dT(u(x_i^\pm), t)/dt = \kappa(u(x_i^\pm)) = 0$$

и

$$dT_x'(u(x_i^\pm), t)/dt = d\kappa(u(x_i^\pm))/dx = 0,$$

то поток $T(u, t)$ инвариантен относительно $\delta^{-1}(\cdot)$ и $\mu^{-1}(\cdot)$. Из оценки

$|\kappa(u)| < |u|$ следует, что $T(u,t)$ определен по t на всей оси. Если $u(x_0) \neq 0$, то $T(u(x_0), t)$ монотонно изменяется на всей полуоси $\mathbb{R}^{\pm}$ в зависимости от знака $u(x_0)$. Следовательно, на фазовой кривой $T(u,t)$ функционал f монотонно изменяется на всей оси. Из указанных свойств потока T следует, что его каждая фазовая кривая распадается на три фазовых кривых потока S: неподвижную точку $u \in U_n^*$ и две фазовые кривые из $f^{-1}(\pm)$, для которых она является предельной. Лемма доказана.

Деформация U_n в U_n^*, определяемая следующим образом:

$$g: U_n \times [0,1] \to U_n, \tag{16}$$

где

$$g(u,s) = \begin{cases} S(u, \operatorname{tg}(\pi s/2)), & 0 \le s \le 1; \\ \lim\limits_{s\to 1} S(u, \operatorname{tg}(\pi s/2)), & s = 1, \end{cases}$$

и ее сужения на $\operatorname{Cl} f^{-1}(\pm)$ являются искомыми, что и завершает доказательство теоремы 8.

***Доказательство теоремы* 9.** Поскольку отображение $g(\cdot, 1): U_n \to U_n^*$ порождено потоком, то оно является C^0-расслоением. Тривиализация $g(\cdot, 1)$ имеет вид

$$G: U_n \to U_n^* \times \mathbb{R}, \tag{17}$$

где $G(u) = (g(u,1), f(u))$, что и требовалось доказать.

***Доказательство теоремы* 13.** Все конструкции, применяемые в формулировках и доказательствах теорем 7 – 9 (отображения F и δ, функционал f, деформация g, расслоение $g(\cdot, 1)$ и тривиализация G) при отождествлении противоположных с. ф. индуцируют конструкции на V_n (отображения $\tilde{F}$, θ (см. (11), функционал $\tilde{f}$, деформацию $\tilde{g}$, расслоение $\tilde{g}(\cdot, 1)$), которые имеют свойства, аналогичные описанным в теоремах 7 – 9.

6. *Доказательства теорем* 10, 11, 14. Предварительно исследуем свойства отображения (13) и его сужений на $U_n^{\pm}$ и U_n^*.

Лемма 2. *Отображение F имеет следующие свойства:* 1) *непрерывно на U_n, принадлежит классу C^∞ на каждом слое $\delta^{-1}(\cdot)$;* 2) *является локальным гомеоморфизмом в каждой точке $u \in U_n \setminus U_n^*$: сужение F на U_n^+ (U_n^-) является двулистным накрытием $Q \setminus Q_n^*$: в точку $q \in Q \setminus Q_n^*$ отображаются две с. ф., отличающиеся знаком.*

Доказательство. 1. Утверждение следует из теорем 4, 6. 2. Локальная биективность и двулистность F следуют из простоты с. зн., соответствующих с. ф. из $U_n^{\pm}$. Непрерывность обратной локальной биекции следует из непрерывной зависимости от $p \in P / P_n^*$ с. зн. и с. ф. задачи (1), (2) [1, с. 283].

Лемма 3. 1. *Прообраз $(\alpha\beta\delta^*)^{-1}(\varphi)$ любой точки $\varphi \in S^1$ является гомотопически тривиальным банаховым C^0-многообразием.* 2. *Сужение $F_{n,\varphi}^*$ отображения F на $(\alpha\beta\delta^*)^{-1}(\varphi)$ является гомеоморфизмом на Q_n^*.* 3. *Сужение F_n^* отображения F на U_n^* является тривиальным C^0-расслоением над Q_n^*, слой которого гомеоморфен S^1.*

Доказательство. 1. Утверждение следует из теорем 2, 7.

2. Рассмотрим подмножество $F^{-1}(q^*)\subset U_n^*$ с. ф., которые порождены классом $q^*\in Q_n^*$. Поскольку класс q^* вырожден, существуют линейно независимые с. ф. $u_1, u_2\in F^{-1}(q^*)$. Пусть $(\alpha\beta\delta^*)(u_1)=\varphi\in S^1$. Прообраз

$$F^{-1}(q^*) = \{u(x,\psi) = (u_1\cos\psi + u_2\sin\psi)/\|u_1\cos\psi + u_2\sin\psi\|,\ \psi\in S^1\}.$$

Пусть $x_i^+(\psi)$ — зависимость i-го нуля с. ф. $u(x,\psi)$. Тогда $u_1(x_i^+(0))=0$, $u_2(x_i^+(0))\neq 0$, $u_1'(x_i^+(0))>0$. Применим теорему о неявной функции к тождеству $u_1(x_i^+(\psi))\cos\psi + u_2(x_i^+(\psi))\sin\psi\equiv 0$ в точке $\psi = 0$: $(x_i^+)'(0) = -u_2(x_i^+(0))/u_1'(x_i^+(0))\neq 0$. Таким образом, с ростом ψ значение $x_i^+(\psi)$ изменяется монотонно. Для всех нулей с. ф. $u(x,\psi)$ монотонность имеет один вид. Проследим за значением функции $(\alpha\beta\delta^*)(u(\psi))$ с ростом ψ. Когда $x_i^+(\psi)$ займет положение следующего нуля $x_{i+1}^+(0)$ с. ф. $u_1(x)$, функция $u(x,\psi)$ с необходимостью совпадет с $u_1(x)$, так как задача Штурма (1) с краевыми условиями $u(x_{i+1}^+) = u(x_{i+1}^+ + 2\pi) = 0$ имеет единственное решение. При этом значение функции $(\alpha\beta\delta^*)(u(\psi))$ увеличится на 2π, т. е. совпадет с исходным значением. Следовательно, сужение отображения $\alpha\beta\delta^*$ на $F^{-1}(q^*)$ является гомеоморфизмом на S^1.

Из предыдущих рассуждений и п. 1 леммы 2 следует, что отображение $F_{n,\varphi}^*$ является непрерывной биекцией на Q_n^*. Непрерывность $\left(F_{n,\varphi}^*\right)^{-1}$ следует из непрерывной зависимости от $p\in P_n^*$ с. зн. и с. ф. u задачи (1), (2), подчиняющихся условию $(\alpha\beta\delta^*)(u)=\varphi$.

3. Тривиализация расслоения F_n^* имеет вид $N: U_n^*\to Q_n^*\times S^1$, где $N(u) = (F(u), (\alpha\beta\delta^*)(u))$, что и требовалось доказать.

***Доказательство теоремы* 10.** Из леммы 3 следует, что для любого фиксированного $\varphi\in S^1$ корректно определено непрерывное проектирование η: $U_n^*\to(\alpha\beta\delta^*)^{-1}(\varphi)$ такое, что $F(u)=F(\eta(u))$. Искомая тривиализация расслоения $\alpha\beta\delta^*$ имеет вид

$$K_n^*:\ U_n^*\ \to\ S^1\times(\alpha\beta\delta^*)^{-1}(\varphi), \tag{18}$$

где

$$K_n^*(u)\ =\ ((\alpha\beta\delta^*)(u), \eta(u)).$$

Гомотопическая тривиальность прообраза $(\alpha\beta\delta^*)^{-1}(\varphi)$ доказана в лемме 3. Теперь с помощью (17) тривиализуем расслоение (10):

$$K_n:\ U_n\ \to\ S^1\times(\alpha\beta\delta^*)^{-1}(\varphi)\times\mathbb{R}, \tag{19}$$

где

$$K_n(u)\ =\ ((\alpha\beta\delta)(u), \eta(g(u,1)), f(u)).$$

Гомотопическая тривиальность слоя следует из леммы 3. Сужение (19) на U_n^* совпадает с (18), что и завершает доказательство теоремы.

***Доказательство теоремы* 11.** Утверждение теоремы является очевидным следствием теорем 8, 10.

***Доказательство теоремы* 14.** Сразу отметим, что при отождествлении противоположных с. ф. отображение (10) не превращается в (12). Поэтому нельзя сослаться на теоремы 10, 11, как это было сделано при доказательстве теоремы 13. Однако метод доказательства леммы 3 применим для исследования слоя $(\alpha\theta^*)^{-1}(\varphi)$. Справедливо утверждение: сужение $\tilde{F}^*_{n,\varphi}$ отображения $\tilde{F}$ на $(\alpha\theta^*)^{-1}(\varphi)$ является гомеоморфизмом на Q^*_n. Отсюда, в свою очередь, следует, что существует единственное непрерывное проектирование χ многообразия V^*_n на $(\alpha\theta^*)^{-1}(\varphi)$, для которого $\tilde{F}(v) = \tilde{F}(\chi(v))$. Теперь очевидно, что отображения $\alpha\theta^*$ и $\alpha\theta$ являются тривиальными расслоениями над S^1 для многообразий соответственно V^*_n и V_n. Выпишем тривиализацию расслоения $\alpha\theta$:

$$H_n\colon V_n \to S^1 \times (\alpha\theta^*)^{-1}(\varphi) \times \mathbb{R}, \tag{20}$$

где

$$H_n(v) = ((\alpha\theta)(v), \chi\,\tilde{g}(v,1), \tilde{f}(v)).$$

Сужение (20) на V^*_n становится тривиализацией расслоения $\alpha\theta^*$. Теорема доказана.

7. *Доказательства теорем* 15 – 17.

***Доказательство теоремы* 15.** Утверждение теоремы является очевидным следствием теоремы 11 и леммы 3.

***Доказательство теоремы* 16.** Из леммы 3 следует, что сужение $\tilde{F}^+$ отображения $\tilde{F}$ на V^+_n является гомеоморфизмом на $Q \setminus Q^*_n$. Искомую деформацию r определим с помощью $\tilde{F}^+$ и $\tilde{g}$ (см. (16) и доказательство теоремы 13): $r\colon Q \times [0,1] \to Q$, где $r(q,s) = \tilde{F}^+\tilde{g}\left((\tilde{F}^+)^{-1}(q), s\right)$, если $q \in Q \setminus Q^*_n$, и $r(q,s) = q$, если $q \in Q^*_n$.

***Доказательство теоремы* 17.** Отображение $r(\cdot, 1)\colon Q_n \to Q^*_n$ в силу теоремы 16 является C^0-расслоением. Его тривиализация $R\colon Q \to Q^*_n \times \mathbb{R}^2$ задается следующим образом. На $\mathbb{R}^2$ введем полярные координаты (ρ, φ). Тогда

$$R(q) = ((r(q,1), (\rho(q), \varphi(q))),$$

где

$$(\rho, \varphi) = \left(|f((\tilde{F}^+)^{-1}(q))|, (\alpha\theta)((\tilde{F}^+)^{-1}(q))\right).$$

Теорема доказана.

Автор благодарен И. В. Соловьеву за подробное обсуждение методов исследования многообразия X_n.

1. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Изд-во иностр. лит., 1951. – 640 с.
2. *Neuman F.* Linear differential equations of the second order and their application // Rend. mat. 3. – 1971. – **4**, Ser. 6. – P. 559–616.
3. *Ургиньон Ж. П.* Уравнение Штурма–Лиувилля, у которого все решения периодические // Бессе А. Многообразия с замкнутыми геодезическими. – М.: Мир, 1981. – С. 290–305.
4. *Федорюк М. В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1980. – 356 с.
5. *Рохлин В. А., Фукс Д. Б.* Начальный курс топологии. – М.: Наука, 1977. – 572 с.
6. *Ленг С.* Введение в теорию дифференцируемых многообразий. – М.: Мир, 1967. – 285 с.
7. *Fujiwara D., Tanikawa M., Yukita Sh.* The spectrum of the Laplacian and boundary perturbation. 1 // Proc. Jap. Acad. Ser. A. – 1978. – **54**, № 4. – P. 87–91.

Получено 27.05.94