УДС 517.937

В. Г. Палюткин (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ С МЕДЛЕННО РАСТУЩИМ ПОТЕНЦИАЛОМ

An asymptotic representation of the function

$$\tilde{n}(R) = \int_0^R \frac{n(r) - n(0)}{r}\,dr, \quad R \in \Re \subseteq [0, \infty), \quad R \to \infty,$$

where $n(r)$ is the number of eigenvalues in $(\lambda : |\lambda| \le r)$, multiplicity included, of Sturm – Liouville problem on $[0, \infty)$ is obtained under the hypothesis that $q(x) \to \infty$ slowly (not faster than $\ln x$) when $x \to \infty$ and satisfies some additional conditions on certain intervals $[x_-(R), x_+(R)]$, $R \in \Re$.

Встановлено асимптотичне зображення функції

$$\tilde{n}(R) = \int_0^R \frac{n(r) - n(0)}{r}\,dr, \quad R \in \Re \subseteq [0, \infty), \quad R \to \infty,$$

де $n(r)$ — кількість власних значень в $(\lambda : |\lambda| \le r)$ (з урахуванням кратності) задачі Штурма – Ліувілля на $[0, \infty)$, у припущенні, що $q(x) \to \infty$ повільно (не швидше $\ln x$), коли $x \to \infty$, і задовольняє додаткові умови на певних інтервалах $[x_-(R), x_+(R)]$, $R \in \Re$.

1. Пусть на полуоси $[0, \infty)$ рассматривается задача

$$y''(x, \lambda) - (q(x) + \lambda)\, y(x, \lambda) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{1}$$

$$p_0(\lambda)\, y(0, \lambda) + p_1(\lambda)\, y'(0, \lambda) = 0, \quad y(x, \lambda) \to 0, \quad x \to \infty, \tag{2}$$

где p_0 и p_1 — произвольные полиномы от λ без общих нулей.

Рассматривается вопрос о распределении собственных значений (с. з.) задачи (1), (2) в терминах функции

$$\tilde{n}(R) := \int_0^R \frac{n(r) - n(0)}{r}\,dr, \quad R \ge 0, \tag{3}$$

где $n(r)$ — число с. з. (с учетом кратностей) в круге $\{\lambda : |\lambda| = r\}$, $r \ge 0$.

Цель работы — установить асимптотическую формулу для функции $\tilde{n}(R)$, $R \to \infty$, $R \in \Re \subseteq [0, \infty)$, соответствующей задаче (1), (2) с дважды непрерывно дифференцируемым неотрицательным потенциалом, растущим медленно и регулярно. В точных терминах это означает, что

$$0 \le q(x) \to \infty, \quad x \to \infty, \tag{4}$$

$$|q'(x)| \le \frac{C}{x+1}, \quad \int_x^\infty |q''(\xi)|\,d\xi \le \frac{C}{x+1}, \quad x \ge 0, \quad C > 0. \tag{5}$$

Кроме (4) и (5), потенциал удовлетворяет дополнительным условиям, для формулировки которых, а затем и основного результата, введем такие обозначения:

$$k(r) := \int_{\xi:\, 0 \le q(\xi) \le r} \sqrt{r - q(\xi)}\,d\xi, \quad r \ge 0, \tag{6}$$

$$\tilde{k}(R) := \int_0^R \frac{k(r)}{r}\,dr, \quad R \ge 0, \tag{7}$$

$$q_+(x) := \sup_{0 \le \xi < x} q(\xi), \quad q_-(x) := \inf_{\xi > x} q(\xi). \tag{8}$$

Предполагается, что каждому элементу R некоторого неограниченного множества $\mathfrak{R} \subseteq [0, \infty)$ сопоставлена пара $x_{\pm}(R)$ точек из $[0, \infty)$ и число $\Phi(R) > 0$: $\Phi(R)/R \to 0$ при $R \to \infty$, $R \in \mathfrak{R}$, таким образом, что выполнены следующие условия:

$$R - q_+(x_-(R)) \to \infty, \quad R \to \infty, \quad R \in \mathfrak{R}, \tag{9}$$

$$q_-(x_+(R)) - R \ge \Phi(R), \quad R >> 1, \quad R \in \mathfrak{R}, \tag{10}$$

$$x_-(R)\Phi(R)^{5/2} \to \infty, \quad R \to \infty, \quad R \in \mathfrak{R}, \tag{11}$$

$$\frac{x_+(R)\sqrt{q_+(x_+(R))}}{\tilde{k}(R)} = o\left(\frac{R}{\Phi(R)}\right), \quad R \to \infty, \quad R \in \mathfrak{R}. \tag{12}$$

***Замечание* 1.** Нетрудно привести примеры функций медленного и регулярного роста. Пусть, например, $q(x)$, $x \ge 0$, — такая гладкая функция, что $q(x) := G(l_n(x))$ для $x >> 1$, где $l_n(x)$ — n-й повторный логарифм, $n = 1, 2, \ldots$; $G(\xi) \to \infty$ при $\xi \to \infty$ и $|G^{(j)}(\xi)| \le C\xi^{p_j}$, $\xi >> 1$, $C > 0$, $p_j \ge 0$ $(p_j \le 1)$, при $n > 1$ $(n = 1)$. Легко проверить, что q удовлетворяет условиям (4), (5). Если $G(\xi)$ — строго монотонно возрастает при $\xi \to \infty$ и

$$b\xi G'(\xi) \le G(\xi) \le B\xi G'(\xi), \quad \xi >> 1, \quad 0 < b < B, \tag{13}$$

то при некоторых $x_{\pm}(R)$, $\Phi(R)$ функция $G(l_n(x))$ удовлетворяет условиям (9) – (12) при всех $R >> 1$. В заключительной части работы рассмотрены и функции более общего вида, удовлетворяющие условиям (9) – (12).

Сформулируем основной результат.

Теорема 1. *Пусть выполнены все указанные выше условия на потенциал* $q(x)$ *в уравнении* (1). *Тогда определенная согласно* (3) *функция* $\tilde{n}(R)$, *отвечающая задаче* (1), (2), *представима на* $\mathfrak{R}$ *в виде*

$$\tilde{n}(R) = \frac{1}{\pi}\tilde{k}(R)(1 + o(1)), \quad R \to \infty, \quad R \in \mathfrak{R}. \tag{14}$$

Кроме того, если $\hat{\lambda} := R\,e^{i\hat{\varphi}}$, $-\pi < \hat{\varphi} \le \pi$ — *с. з. задачи* (1), (2), *то справедливо одно из неравенств*

$$|\pi \pm \hat{\varphi}| \le \frac{d\Phi(R)}{R}, \quad R >> 1, \quad R \in \mathfrak{R}, \tag{15}$$

где постоянная d *меньше* $1/2e$.

***Замечание* 2.** Отличительная особенность приведенного в теореме 1 результата заключается в том, что асимптотическое представление функции $\tilde{n}(R)$ устанавливается на заранее выбираемом множестве $\mathfrak{R} \subseteq [0, \infty)$, причем от выбора $\mathfrak{R}$ зависит часть условий на потенциал. Кроме того, развитый здесь подход к выводу асимптотической формулы, применимый не только к задачам с медленно растущим потенциалом, ведет к техническим упрощениям именно в случае задач с потенциалом последнего вида, т. е. в ситуации, когда хорошо известная методика [1] (применительно к самосопряженным задачам) не может непосредственно использоваться, поскольку функция $k(r)$ при медленном росте потенциала не удовлетворяет предположениям тауберовых теорем, к которым сводится заключительная часть доказательства. В связи с изложенным отметим, что иной тип предположений на $k(r)$ был предложен в [2], где содержится доказательство асимптотики функции $n(r)$, $r \to \infty$, отвечающей самосопряженной задаче Штурма – Лиувилля с медленно и строго монотонно растущим потенциалом.

2. Доказательство основной теоремы существенным образом основано на приведенном ниже вспомогательном результате (теорема 2), представляющем собой дополненную подходящим образом известную теорему Биркгофа (см. [3], гл. III, § 2). Для точных формулировок введем такие обозначения:

$$D(R) := \{\lambda : |\lambda| < R + b\Phi(R)\}, \tag{16}$$

$$A(R) := \{\lambda : |\lambda| = R, \ |\arg\lambda| \le \alpha(R)\}, \quad R \in \Re, \tag{17}$$

где

$$\frac{\pi}{2} < \alpha(R) < \pi, \quad 2\cos\frac{\alpha(R)}{2} = a\frac{\Phi(R)}{R}, \quad 0 < 2ae < b < 1, \tag{18}$$

a, b — константы.

Теорема 2. *Пусть выполнены предположения теоремы* 1. *Тогда существует такое решение* $y(x, \lambda)$, $x \ge 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$, *уравнения* (1), *что на множестве*

$$\Omega(R) := \Omega_0(R) \cup \Omega_+(R), \quad R \in \Re, \quad R >> 1, \tag{19}$$

$$\Omega_0(R) := \{(x, \lambda) : 0 \le x \le x_+(R), \ \lambda \in A(R)\}, \tag{20}$$

$$\Omega_+(R) := \{(x, \lambda) : x \ge x_+(R), \ \lambda \in D(R)\}, \tag{21}$$

справедливо представление

$$y^{(j)}(x, \lambda) = q_j(x, \lambda)\exp\{-S(x, \lambda)\}((-1)^j + \varepsilon_j(x, \lambda)), \quad j = 0, 1, \tag{22}$$

$$q_j(x, \lambda) := (q(x) + \lambda)^{j/2 - 1/4}, \tag{23}$$

$$S(x, \lambda) := \int_0^x \sqrt{q(\xi) + \lambda}\, d\xi, \tag{24}$$

$$|\varepsilon_j(x, \lambda)| = o(1), \quad x + R \to \infty, \quad (x, \lambda) \in \Omega(R), \quad R \in \Re. \tag{25}$$

Кроме того, функции

$$Y_{j,R}(x, \lambda) := y^{(j)}(x, \lambda)\exp k_R(\lambda), \quad j = 0, 1, \tag{26}$$

где

$$k_R(\lambda) := \int_0^{x_+(R)} \left(\sqrt{q(\xi) + \lambda} - \sqrt{q(\xi)}\right) d\xi, \tag{27}$$

голоморфны по λ *в круге* $D(R)$ *при каждом* $x \ge 0$, $R \in \Re$, $R >> 1$, *причем в точках* $(0, \lambda)$, $\lambda \in D(R)$ *справедлива оценка*

$$|Y_{j,R}(0, \lambda)| \le C\Phi(R)^{-1/4} x_+^{1-j}(q_+(x_+) + |\lambda|^{1/2}) \times$$
$$\times \exp\left\{\int_0^{x_+} \left(\sqrt{q_+(\xi) + |\lambda|} - \sqrt{q(\xi)}\right) d\xi\right\}, \quad j = 0, 1. \tag{28}$$

***Замечание* 3.** Предполагается, что в формулировке теоремы 2, а также в дальнейшем изложении соблюдается следующая договоренность относительно обозначений. Дробные степени m/n $(m, n = 1, 2, \ldots)$ чисел $z \in \mathbb{C}$ определяются как $z^{m/n} := (|z|^{1/n}\exp(\arg z/n))^m$, причем всегда $-\pi < \arg z \le \pi$. Символ

C (возможно, с индексами) используется лишь для обозначения положительных констант, значения которых не играют роли в контексте этой работы. При повторных упоминаниях некоторых величин, зависящих от $R \in \mathfrak{R}$, например $x_{\pm}(R)$, $D(R)$, символ (или указание о вхождении R в $\mathfrak{R}$) может опускаться.

При доказательстве теоремы 2 нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия теоремы* 2. *Тогда справедливы такие асимптотические равенства*:

$$q_j(x, \lambda) := \int_x^{\infty} \frac{\left|q^{(2-j)}(\xi)\right|^{1+j} d\xi}{\left|q(\xi)+\lambda\right|^{3/2+j}} = o(1), \quad \frac{q'(x)}{\left|q(x)+\lambda\right|^{3/2}} = o(1),$$

$$x + R \to \infty, \quad (x, \lambda) \in \Omega(R), \quad j = 0, 1. \tag{29}$$

Доказательство. Сначала покажем, что

$$|q(x)+\lambda| \geq C\Phi(R), \tag{30}$$

где либо $x \geq 0$, $\lambda \in A(R)$, либо $x \geq x_+$, $\lambda \in D(R)$. В первом случае оценка (30) следует из общего неравенства

$$|t+\lambda| \geq |t + |\lambda|| \cos\frac{\arg\lambda}{2}, \quad t \geq 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{31}$$

и определения (17) дуги $A(R)$. Во втором случае в силу (10) справедливы неравенства $q(x) \geq q_-(x) \geq q_-(x_+) \geq R + \Phi(R)$, из которых ввиду (16) следует оценка (30): $|q(x)+\lambda| \geq q(x) - |\lambda| \geq (1-b)\Phi(R)$, $x \geq x_+$, $\lambda \in D(R)$.

Отметим, что при $x < x_-$, $\lambda \in A(R)$, благодаря (9), имеем

$$|q(x)+\lambda| \geq |R - q(x)| \geq R - q_+(x_-) \to \infty, \quad R \to \infty. \tag{32}$$

Теперь, пользуясь полученными неравенствами, легко доказать утверждение леммы. В силу (30), а также (5) и (11) в точках (x, λ): $x \geq x_-$, $\lambda \in A(R)$, или же (x, λ): $x \geq x_+$, $\lambda \in D(R)$, справедливы оценки

$$g_0(x, \lambda) \leq \frac{C}{[\Phi(R)]^{3/2}} \int_x^{\infty} |q''(\xi)| d\xi \leq \frac{C_1}{[\Phi(R)]^{3/2} x} = o(1), \quad x + R \to \infty. \tag{33}$$

В точках (x, λ): $x \leq x_-$, $\lambda \in A(R)$, на основании (32), а также (33) применительно к точкам (x_-, λ), $\lambda \in A(R)$, и условия (5) имеем

$$g_0(x, \lambda) \leq \left(\int_x^{x_-} + \int_{x_-}^{\infty}\right) \frac{|q''(\xi)| d\xi}{|q(\xi)+\lambda|^{3/2}} \leq \frac{1}{(R - q_+(x))^{3/2}} \int_x^{x_-} |q''(\xi)| d\xi +$$

$$+ o(1) = o(1), \quad x + R \to \infty. \tag{34}$$

Из определения (19) – (21) множества $\Omega(R)$ ясно, что множество точек, в которых установлены оценки (33) и (34), не у́же, чем $\Omega(R)$.

Аналогичным образом доказываются подобные оценки и для g_1, а также последняя оценка в (29). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. На начальном этапе доказательства проводятся хорошо известные преобразования уравнения (1), которые, однако, необходимо воспроизвести здесь, чтобы сделать понятным вывод аналитических (по λ) свойств решения (26). Итак, уравнение (1) представляется в виде системы

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y(x,\lambda) \\ y'(x,\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q(x)+\lambda & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(x,\lambda) \\ y'(x,\lambda) \end{pmatrix}, \quad x \geq 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{35}$$

которая посредством перехода (при $(x, \lambda): x \geq 0,\ \lambda \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, -q_-(x)))$ от вектора (y, y') к вектору (v_0, v_1):

$$y = v_0 + v_1,$$
$$y' = \left(\sqrt{q+\lambda} - \frac{1}{4}\frac{q'}{q+\lambda}\right)v_0 - \left(\sqrt{q+\lambda} + \frac{1}{4}\frac{q'}{q+\lambda}\right)v_1, \tag{36}$$

а затем последующего перехода от (v_0, v_1) к вектору (w_0, w_1):

$$v_j(x, \lambda) = \frac{w_j(x, \lambda)}{q_0(x, \lambda)} \exp\{-S(x, \lambda)\}, \quad j = 0, 1, \tag{37}$$

(см. (23), (24)) приобретает вид

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \end{pmatrix} = \left[\sqrt{q+\lambda}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \end{pmatrix}, \tag{38}$$

где

$$a := \frac{1}{8}\left[\frac{q''}{(q+\lambda)^{3/2}} - \frac{5}{4}\frac{|q'|^2}{(q+\lambda)^{5/2}}\right]. \tag{39}$$

Отметим, что точки $w = q(x) + \lambda$ при $(x, \lambda) \in \Omega(R)$ не лежат на полуоси $(-\infty, 0]$. Действительно, принимая во внимание определения (16) и (17) и неотрицательность функции $q(x)$, $x \in [0, \infty)$, получаем

$$|\arg(q(x) + \lambda)| \leq \begin{cases} |\arg\lambda| < \alpha(R), & (x, \lambda) \in \Omega_0(R); \\ \left|\arg\left(\dfrac{\lambda}{q(x)} + 1\right)\right| \leq \arcsin\dfrac{R + b\Phi(R)}{R + \Phi(R)} < \dfrac{\pi}{2}, & (x, \lambda) \in \Omega_+(R). \end{cases}$$

Изложенное вместе с введенным в замечании 3 определением дробных степеней чисел $z \in \mathbb{C}$ означает, что функция $\lambda \to \sqrt{q(x) + \lambda}$, при $x > x_+$ голоморфна в $D(R)$, $\operatorname{Re}\sqrt{q(x) + \lambda}$ для $(x, \lambda) \in \Omega(R)$ и, следовательно,

$$S(x, \xi, \lambda) := \int_x^{\xi} \sqrt{q(t) + \lambda}\, dt > 0, \quad (x, \lambda) \in \Omega(R), \quad \xi \geq x. \tag{40}$$

Если теперь принять во внимание это неравенство вместе с оценкой (см. определение (39))

$$\hat{a}(x, \lambda) := \int_x^{\infty} |a(\xi, \lambda)| d\xi \leq g(x, \lambda) := \frac{1}{8}\left[g_0(x, \lambda) + \frac{5}{4}g_1(x, \lambda)\right] =$$
$$= o(1), \quad (x, \lambda) \in \Omega(R), \quad x + R \to \infty, \tag{41}$$

возникающей в силу леммы 1, и заметить, что все точки (x', λ), $x' \geq x$, входят в $\Omega(R)$, если $(x, \lambda) \in \Omega(R)$, то легко убедиться в абсолютной сходимости интегралов в правых частях системы уравнений

$$w_0(x, \lambda) = \int_x^{\infty} \exp\{-2S(x, \xi, \lambda)\}\, a(\xi, \lambda)(w_0(\xi, \lambda) + w_1(\xi, \lambda))\, d\xi, \tag{42}$$

$$w_1(\xi, \lambda) = 1 + \int_x^{\infty} a(\xi, \lambda)(w_0(\xi, \lambda) + w_1(\xi, \lambda))\, d\xi \tag{43}$$

при условии равномерной ограниченности в $\Omega(R)$ функций $|w_j(x,\lambda)|$, $j=0,1$.

Изложенное позволяет непосредственно проверить, что всякое решение системы (42), (43), компоненты которого равномерно ограничены по модулю в $\Omega(R)$, удовлетворяет системе (38), и начать построение решения системы (42), (43) в $\Omega(R)$ методом последовательных приближений, отправляясь от нулевого приближения $w_{0,0}\equiv 0$, $w_{1,0}\equiv 1$. Далее, можно получить стандартным способом на каждом шаге перехода от n-го приближения $w_{j,n}$ к $(n+1)$-му $w_{j,n+1}$, $j=0,1$; $n=0,1,\ldots$, оценку (см. (41)):

$$|w_{j,n+1}(x,\lambda)-w_{j,n}(x,\lambda)| \le \frac{(2\hat{a}(x,\lambda))^{n+1}}{(n+1)!} \le \frac{(2g(x,\lambda))^{n+1}}{(n+1)!}, \tag{44}$$

на основании которой нетрудно установить абсолютную сходимость рядов

$$w_j(x,\lambda) := \sum_{n=0}^{\infty}\left(w_{j,n+1}(x,\lambda)-w_{j,n}(x,\lambda)\right), \quad j=0,1, \tag{45}$$

представляющих компоненты искомого решения, а также мажоранту $\exp\{2g(x,\lambda)\}-1$ для $|w_0(x,\lambda)|$ и $|w_1(x,\lambda)-1|$ в $\Omega(R)$. Принимая во внимание эту мажоранту и асимптотические равенства (29) и (41), перейдем от (w_0,w_1), т. е. решений системы (38), к решениям (y,y') системы (35) через преобразования (37), (36). В результате получим требуемое асимптотическое представление (22) – (24) и оценку остатка (25). Отметим, что при каждом λ : $|\lambda|<R\in\Re$ построенное решение $y(x,\lambda)$ оказывалось определенным там же, где и функции $w_j(x,\lambda)$, $j=0,1$, а значит, по крайней мере, на $[x_+(R),\infty)$. Однако из вида потенциала уравнения (1) ясно, что это решение имеет продолжение на всю полуось $[0,\infty)$. Сохраним для продолженного решения прежнее обозначение.

Докажем теперь, что функции $Y_{j,R}(x,\lambda)$, $x\ge 0$, $\lambda\in\mathbb{C}$, $R\in\Re$, $j=0,1$, определенные согласно (26), имеют нужные свойства голоморфности по λ при каждом $x\ge 0$. Ради упрощения записи будем в последнем обозначении опускать индекс R. Прежде всего, из вида интегральной системы ясно, что каждое приближение $w_{j,n}(x,\lambda)$, $j=0,1$; $n=0,1,\ldots$, голоморфно по λ в круге $\{\lambda: |\lambda|<q_-(x)\}$. Поскольку при $x\ge x_+$ сходимость представляющих функции $w_j(x,\lambda)$ рядов (45), в силу оценок (41) и (44), равномерна по λ в кругах, содержащихся внутри $D(R)$ (см. (16)), то функции $w_j(x,\lambda)$, $j=0,1$, при каждом $x\ge x_+$ голоморфны по λ в $D(R)$. Но тогда, как следует из вида преобразований (36), (37), это же свойство имеют функции, получаемые умножением $y(x,\lambda)$ и $y'(x,\lambda)$ на $\exp S(x,\lambda)$, а значит, и на $\exp k_R(\lambda)$, так как (см. (24), (27))

$$\exp k_R(\lambda) = \exp\{S(x,\lambda)\}\exp\left\{-\int_{x_+}^{x}\sqrt{q(\xi)+\lambda}\,d\xi - \int_0^{x_+}\sqrt{q(\xi)}\,d\xi\right\},$$

и при $x\ge x_+$ второй сомножитель справа голоморфен по λ в круге $D(R)$. Иными словами, функции $Y_j(x,\lambda)$ при $x\ge x_+$ голоморфны по λ в $D(R)$.

Покажем, что последнее свойство сохраняется при всех $x\ge 0$. Для этого рассмотрим решения h_0, h_1 уравнения (1), выделяемые условиями

$$h_0(0,\lambda)\equiv 1, \quad h_0'(0,\lambda)\equiv 0, \quad h_1(0,\lambda)\equiv 0, \quad h_1'(0,\lambda)\equiv 1. \tag{46}$$

Выражая решение Y_0 уравнения (1) через h_0, h_1 с учетом (46) и дифференцируя по x полученное равенство, получаем линейную относительно $Y_j(0, \lambda)$, $j = 0, 1$, систему

$$Y_0(x, \lambda) = Y_0(0, \lambda) h_0(x, \lambda) + Y_1(0, \lambda) h_1(x, \lambda),$$
$$Y_1(x, \lambda) = Y_0(0, \lambda) h_0'(x, \lambda) + Y_1(0, \lambda) h_1'(x, \lambda). \tag{47}$$

Решая ее и учитывая при этом, что вронскиан решений h_0, h_1 равен 1, имеем

$$Y_0(0, \lambda) = Y_0(x, \lambda) h_1'(x, \lambda) - Y_1(x, \lambda) h_1(x, \lambda),$$
$$Y_1(0, \lambda) = Y_1(x, \lambda) h_0(x, \lambda) - Y_0(x, \lambda) h_0'(x, \lambda), \quad x \geq 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{48}$$

Поскольку, как хорошо известно, $h_j^{(k)}(x, \lambda)$, $k, j = 0, 1$, — целые функции по λ при каждом $x \geq 0$, а $Y_j(x, \lambda)$, $j = 0, 1$, голоморфны по λ в $D(R)$ при $x \geq x_+$, то в силу равенств (48) при $x \geq x_+$ функции $Y_j(0, \lambda)$, $j = 0, 1$, голоморфны в том же круге. Но тогда из равенств (47) следует, что $Y_j(0, \lambda)$, $j = 0, 1$, голоморфны по λ в круге $D(R)$ при всех $x \geq 0$.

Остается доказать последнее утверждение теоремы, т. е. оценку (28). Будем исходить из равенств (48) при $x = x_+$, правые части которых оценим по модулю, используя, с одной стороны, асимптотику (22) для $Y_j(x_+, \lambda)$, $\lambda \in D(R)$, а с другой — оценки сверху для $\left|h_j^{(k)}(x_+, \lambda)\right|$, $j, k = 0, 1$, которые естественно возникают в ходе стандартной процедуры построения решений h_0, h_1 методом последовательных приближений как решений интегральных систем

$$\begin{pmatrix} h_j(x, \lambda) \\ h_j'(x, \lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{j,0} \\ \delta_{j,1} \end{pmatrix} + \int_0^x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q(\xi) + \lambda & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_j(\xi, \lambda) \\ h_j'(\xi, \lambda) \end{pmatrix} d\xi, \quad x \geq 0, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

($\delta_{j,k}$, $j, k = 0, 1$, — символ Кронекера). Эти оценки, как показывает элементарный подсчет, можно представить в виде

$$\left| h_j^{(k)}(x, \lambda) \right| \leq \left[x^j \operatorname{ch}\left(\int_0^x \sqrt{q_+(\xi) + |\lambda|}\, d\xi \right) \right]_x^{(k)}, \quad j, k = 0, 1.$$

Полагая в этих неравенствах $x = x_+ >> 1$ и мажорируя очевидным образом их правые части, имеем

$$\left| h_j^{(k)}(x_+, \lambda) \right| \leq C x_+^j (q_+(x_+) + |\lambda|)^{k/2} \exp\left\{ \int_0^{x_+} \sqrt{q_+(\xi) + |\lambda|}\, d\xi \right\}, \tag{49}$$

$$\lambda \in D(R), \quad j, k = 0, 1.$$

Далее, отправляясь от представления (22) решения y в точках (x_+, λ), $\lambda \in D(R)$, и учитывая (26) и (30), получаем оценки

$$|Y_j(x_+, \lambda)| \leq C |q(x_+) + |\lambda||^{j/2 - 1/4} \exp\left\{ -\int_0^{x_+} \sqrt{q(\xi)}\, d\xi \right\} \leq$$

$$\leq C_1 \Phi(R)^{-1/4} |q_+(x_+) + |\lambda||^{j/2} \exp\left\{ -\int_0^{x_+} \sqrt{q(\xi)}\, d\xi \right\}, \quad j = 0, 1. \tag{50}$$

Располагая оценками (49), (50) и равенствами (48), легко промажорировать модули левых частей этих равенств. В результате возникают требуемые оценки (28). Теорема доказана.

Кроме теоремы 2, при доказательстве асимптотической формулы будет использован результат, сформулированный ниже как лемма 2 и представляющий собой следствие известной теоремы (см. , например, [4], гл. I, § 4) об оценке снизу модулей функций, голоморфных в круге.

Лемма 2. *Пусть функция* $f(\lambda)$ *голоморфна в круге* $\{\lambda : |\lambda-\lambda_0|<2er\}$, *причем* $f(\lambda_0)=1$. *Пусть, далее,* a *— содержащаяся в круге* $\{\lambda : |\lambda-\lambda_0|<r\}$ *дуга произвольной окружности* $|\lambda-\tilde{\lambda}_0|=\tilde{r}>r$, *проходящей через* λ_0. *Тогда*

$$\int\limits_a |\ln|f(\lambda)|||d\lambda| \le L|a|\ln M_f(2er), \tag{51}$$

где $M_f(2er)$ *— максимум функции* $|f(\lambda)|$ *в круге* $\{\lambda : |\lambda-\lambda_0|\le 2er\}$, $|a|$ *— длина дуги* a, L *— абсолютная константа.*

Доказательство. Согласно [4] (гл. I, § 4) в условиях доказываемой леммы при любом положительном числе $\eta<3e/2$ справедливо неравенство

$$|\ln|f(\lambda)|| \le H(\eta)\ln M_f(2er), \quad H(\eta) = 2+\ln(3e/2\eta) \tag{52}$$

в круге $\{\lambda : |\lambda-\lambda_0|\le r\}$, за исключением, возможно, множества E_η — объединения кругов с общей суммой радиусов равной $4\eta r$.

Рассмотрим множества E_η при $\eta=1, 1/2, 1/3, \ldots$ и обозначим

$$\hat{E}_n := E_1\cap E_{1/2}\cap\ldots\cap E_{1/n}, \quad a_n := \hat{E}_n\cap a. \tag{53}$$

Ясно, что a_n — объединение определенных дуг окружности $\{\lambda : |\lambda-\tilde{\lambda}_0|=\tilde{r})$, причем $|a_n|\le 4\pi|a|/n$, где $|a_n|$ — сумма длин упомянутых дуг, $n=1, 2, \ldots$.

Нетрудно видеть, что при каждом n справедливы неравенства

$$\int\limits_{a\setminus a_n} |\ln|f(\lambda)|||d\lambda| \le$$

$$\le \ln M_f(2er)\left[H(1)|a| + \sum_{k=1}^{n-1}\left(H\left(\frac{1}{k+1}\right) - H\left(\frac{1}{k+1}\right)\right)|a_k|\right] \le$$

$$\le |a|\ln M_f(2er)\left[2+\ln\frac{3e}{2}+4\pi\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}(\ln(k+1)-\ln k)\right] \le$$

$$\le L|a|\ln M_f(2er), \quad L \le \left(2+\ln\frac{3e}{2}+4\pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right). \tag{54}$$

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — нули функции $f(\lambda)$, лежащие на дуге a, K — произвольный компакт из $\tilde{a} := a\setminus\{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$. Покажем, что $K\subseteq a\setminus a_n$ при достаточно большом n. Отсюда в силу (54) будет следовать существование несобственного интеграла в левой части неравенства (51), равно как и справедливость самого неравенства. В этой связи отметим, что каждый круг из E_η при любом $\eta\le 3e/2$ содержит хотя бы один нуль функции $f(\lambda)$ из круга $\{\lambda : |\lambda-\lambda_0|<2r\}$. Это следует из доказательства теоремы А. Картана об оценке модуля полиномов снизу (см. [4], гл. I, § 4, теорема 4.1), на которую опирается вывод как оценки (52), так и упомянутой в начале доказательства оценки суммы радиусов кругов, составляющих E_η. Последняя оценка вместе с отмеченным отношением нулей функции $f(\lambda)$ и кругов из E_η означает, что при достаточно малых η каждый круг из E_η содержит только один (без учета кратностей) нуль функции f из $\{\lambda : |\lambda-\lambda_0|<2r\}$. Отсюда ясно, что любое объединение J_ε открытых кругов, имеющих радиусы меньше наперед заданного $\varepsilon>0$ и покрывающих нули функции f на дуге a, содержит в себе a_n (см. (53)) при достаточно большом n. Но любой компакт K из $\tilde{a}$ входит в $a\setminus(J_\varepsilon\cap a)$ при некотором J_ε, $\varepsilon>0$. Таким образом, нужное свойство компактов $K\subset\tilde{a}$ установлено и доказательство леммы закончено.

***Доказательство теоремы* 1.** Рассмотрим подробно лишь частный случай задачи (1), (2), а именно, будем считать, что $p_0(\lambda)\equiv 1$, $p_1(\lambda)\equiv 0$. Доказав теорему в этом случае, покажем затем, что метод доказательства применим и в общей ситуации.

Решение $y(x,\lambda)$, построенное в теореме 2, как следует из представления (22), при любом $\lambda\in\mathbb{C}$ не равно нулю тождественно и удовлетворяет граничным условиям (2) на бесконечности. Известно (см., например, [3], гл. III, § 2), что в условиях (40), (29) любое решение уравнения (1), имеющее указанное свойство на бесконечности, совпадает с $y(x,\lambda)$ с точностью до зависящего от λ множителя. Поэтому собственные значения рассматриваемой задачи определяются из условия $y(0,\lambda)=0$ или, что то же, $Y_R(\lambda):=Y_{0,R}(0,\lambda)=y(0,\lambda)\exp k_R(\lambda)$ при произвольно выбранном $R\in\mathfrak{R}$. Отсюда сразу следует утверждение теоремы об аргументах с. з. (см. (15)), поскольку в силу асимптотики (22) функции $Y_R(\lambda)$, $R\in\mathfrak{R}$, не имеют нулей на дугах $A(R)$, $R\in\mathfrak{R}$, $R\gg 1$.

Так как согласно теореме 1 функция $Y_R(\lambda)$ при каждом $R\gg 1$, $R\in\mathfrak{R}$ голоморфна в круге $D(R)$ (см. (16)) и R меньше радиуса этого круга, то по формуле Иенсена получаем

$$\tilde{n}(R) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln\left|Y_R(Re^{i\varphi})\right|d\varphi \;-\; K_0 \;-\; n(0)\ln R, \tag{55}$$

где $K_0=\ln|a_m|$, a_m — коэффициент при наименьшей степени в тейлоровском разложении функции $Y_R(\lambda)$ в точке 0. Заметим, что a_m не зависит от $R\in\mathfrak{R}$. Это очевидно при $m=0$, поскольку $k_R(0)=0$, а при $m>0$, т. е. в случае $a_k=$ $=0$, $k<m$, рассуждения по индукции при любом $R\in\mathfrak{R}$ приводят к равенству $a_m=y^{(m)}(0,0)$.

Итак, согласно равенству (55) вопрос об асимптотике $\tilde{n}(R)$, $R\to\infty$, $R\in\mathfrak{R}$, сводится к аналогичному вопросу применительно к интегралу в правой части этого равенства. Представим этот интеграл в виде

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln\left|Y_R(Re^{i\varphi})\right|d\varphi \;=\; \int\limits_{-\alpha}^{\alpha}\ln\left|Y_R(Re^{i\varphi})\right|d\varphi \;+\; T_\alpha(R), \tag{56}$$

где в соответствии с обозначением (18) $\pm\alpha\equiv\pm\alpha(R)$ — аргументы концевых точек $\lambda_\pm(R)$ дуги $A(R)$, и рассмотрим отдельно каждое слагаемое в правой части (56).

Благодаря асимптотике (22) при $x=0$, $\lambda\in A(R)$ имеем

$$\ln|Y_R(\lambda)| \;=\; -\frac{1}{4}\ln R+\operatorname{Re}k_R(\lambda)+o(1), \quad R\to\infty, \quad R\in\mathfrak{R}. \tag{57}$$

Поэтому

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \ln|Y_R(Re^{i\varphi})|\,d\varphi = -\frac{\alpha\ln R}{2} + \int_{-\alpha}^{\alpha} \operatorname{Re} k_R(Re^{i\varphi})\,d\varphi + o(1), \quad R\to\infty, \quad R\in\Re. \tag{58}$$

Установим теперь соотношение между интегралом справа в последнем равенстве и функцией $\tilde{k}(R)$, определенной согласно (6), (7). С этой целью докажем равенство

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re} k_R(Re^{i\varphi})\,d\varphi = 2\tilde{k}(R), \quad R\in\Re. \tag{59}$$

Приняв во внимание, что функция $k_R(\lambda)$, как видно из ее определения (27), голоморфна в $D(R)\cap(\mathbb{C}\setminus(-\infty,0])$, запишем на основании уравнений Коши – Римана равенство

$$\int_{-\theta}^{\theta} \frac{d}{dr}\operatorname{Re} k_R(re^{i\varphi})\,d\varphi = \frac{1}{r}\int_{-\theta}^{\theta} \frac{\partial}{\partial\varphi}\operatorname{Im} k_R(re^{i\varphi})\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{r}\operatorname{Im}\left(k_R(re^{i\theta}) - k_R(re^{-i\theta})\right). \tag{60}$$

Выполним следующие операции над крайними частями равенств цепочки (60): проинтегрируем их по r от 0 до R, далее в повторном интеграле, возникшем из левой крайней части (60), изменим порядок интегрирования, учитывая, что функция $(r,\varphi)\to(k_R(re^{i\varphi}))'_r$ непрерывна на $[0,R]\times[-\theta,\theta]$, $\theta<\pi$, а затем выполним явно интегрирование по r, замечая, что $k_R(0)=0$. В полученном после указанных операций равенстве перейдем к пределу при $\theta\to\pi$, учитывая, что функция $k_R(\lambda)$ непрерывна в пересечении круга $D(R)$ как с верхней, так и с нижней замкнутой полуплоскостью, причем

$$k_R(-r) := k_R(r+i0) = -k_R(r-i0) + 2\int_0^{x_+} \sqrt{q(\xi)}\,d\xi. \tag{61}$$

В результате получим

$$\lim_{\theta\to\pi}\int_{-\theta}^{\theta} \operatorname{Re} k_R(Re^{i\varphi})\,d\varphi = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re} k_R(Re^{i\varphi})\,d\varphi = 2\int_0^R \operatorname{Im} k_R(-r)\frac{dr}{r}. \tag{62}$$

Чтобы перейти от (62) к доказываемому равенству (59), остается заметить, что $\operatorname{Im} k_R(-r) = k(r)$ для $r\le R$ в соответствии с определениями (6) и (61).

Представив (59) в виде

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \operatorname{Re} k_R(Re^{i\varphi})\,d\varphi = 2\tilde{k}(R) - 2\left(\int_{-\pi}^{\alpha} + \int_{\alpha}^{\pi}\right)\operatorname{Re} k_R(Re^{i\varphi})\,d\varphi, \tag{63}$$

получим искомое соотношение между интегралом в правой части (58) и $\tilde{k}(R)$. Выражая этот интеграл согласно (63) и замечая, что сумма интегралов справа в (63) есть величина вида $O((\pi-\alpha)k_R(R))$, $R\to\infty$, перейдем от (58) к равенству

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \ln|Y_R(Re^{i\varphi})|\,d\varphi = 2\tilde{k}(R) + \frac{\alpha\ln R}{2} + O((\pi-\alpha)k_R(R)), \quad R\to\infty, \quad R\in\Re, \tag{64}$$

которое далее будет использовано для оценки первого слагаемого в правой части (56).

С целью оценки второго слагаемого в той же части определим в круге $D^{\pm}(R) := \{ \lambda : |\lambda - \lambda_{\pm}| < 2ae\Phi(R) \}$ (см. обозначения в (16) и (18)) с центром в концевой точке $\lambda_{\pm}(R) := Re^{\pm i\alpha(R)}$ дуги $A(R)$ функцию

$$\Upsilon_R^{\pm}(\lambda) \ := \ \frac{Y_R(\lambda)}{Y_R(\lambda_{\pm}(R))},$$

равную 1 в $\lambda_{\pm}(R)$ и голоморфную в $D^{\pm}(R)$, поскольку $D^{\pm} \subset D(R)$, где $Y_R(\lambda)$ голоморфна по теореме 2.

Отметим, что $D^{\pm}(R)$ содержит круг $d^{\pm}(R) := \{ \lambda : |\lambda - \lambda_{\pm}(R)| < a\Phi(R) \}$, который, как нетрудно проверить на основании (18), высекает на дополнении дуги $A(R)$ до окружности $\{ \lambda : |\lambda| = R \}$ дугу $\tilde{A}^{\pm}(R)$, лежащую в верхней (нижней) полуплоскости.

В принятых выше обозначениях слагаемое $T(R)$ в правой части (56) принимает вид

$$T(R) \ = \ 2(\pi - \alpha)\ln|Y_R(\lambda_{\pm}(R))| + \frac{1}{R}\left(\int\limits_{\tilde{A}^{+}} \ + \ \int\limits_{\tilde{A}^{-}} \right) \ln|\Upsilon_R^{\pm}(\lambda)||d\lambda|. \tag{65}$$

Оценим модуль суммы интегралов в правой части этого равенства, обозначаемой далее $S(R)$. Для этого воспользуемся леммой 2 применительно к функции $\Upsilon_R^{\pm}(\lambda)$, голоморфной в круге $D^{\pm}$, и дуге $\tilde{A}^{\pm}$, лежащей в круге $d^{\pm}$. В силу этой леммы имеем

$$\int\limits_{\tilde{A}^{\pm}} \left| \ln|\Upsilon_R^{\pm}(\lambda)| \right| |d\lambda| \ \le \ L(\pi - \alpha) R \ln M(\Upsilon_R^{\pm}), \tag{66}$$

где

$$M(\Upsilon_R^{\pm}) \ := \ \max_{\lambda \in D^{\pm}} |\Upsilon_R^{\pm}(\lambda)|. \tag{67}$$

Теорема 2 позволяет промажорировать $M(\Upsilon_R^{\pm})$. Действительно, благодаря оценке (28) в $D \supset D^{\pm}$ и асимптотическому представлению (22) в точке $(0, \lambda_{\pm}(R)) \in \Omega_0(R)$, а также неравенствам $|\lambda| < q_{-}(x_{+}) \le q_{+}(x_{+})$, $\lambda \in D(R)$ (см. (10)), имеем

$$\begin{aligned} |\Upsilon_R^{\pm}(\lambda)| \ &\le \ C(\Phi(R)/R)^{-1/4} x_{+} \cdot (q_{+}(x_{+}) + |\lambda|)^{1/2} \times \\ &\times \exp\left\{ \int\limits_0^{x_{+}} \left(\sqrt{q_{+}(\xi) + |\lambda|} \ + \ \mathrm{Re}\sqrt{q(\xi) + \lambda_{\pm}} \right) d\xi \right\} \ \le \\ &\le \ C_1(\Phi(R)/R)^{-1/4} x_{+} \sqrt{q_{+}(x_{+})} \exp\{ 2x_{+}\sqrt{2q_{+}(x_{+})} \} \ \le \\ &\le \ C_{\delta}(\Phi(R)/R)^{-1/4} \exp\{ \delta x_{+}\sqrt{q_{+}(x_{+})} \}, \quad \lambda \in D^{\pm}, \quad \delta \ > \ 2\sqrt{2}. \end{aligned} \tag{68}$$

Из (66) – (68) очевидным образом выводится искомая оценка:

$$|S(R)| \ \le \ C(\pi - \alpha)\left[x_{+}(R)\sqrt{q_{+}(x_{+}(R))} \ - \ \frac{1}{4}\ln(\Phi(R)/R) \right], \quad R \in \Re, \quad R >> 1.$$

Преобразуя первое слагаемое в правой части (65) согласно (57) при $\lambda = \lambda_{\pm}(R)$, получаем

$$T(R) = (\alpha - \pi)\frac{\ln R}{2} + O((\pi - \alpha)k_R(R)) + S(R), \quad R \to \infty. \tag{69}$$

Обратимся теперь к равенству (56) и проведем замену слагаемых в его правой части в соответствии с (64) и (69). В результате получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln|Y_R(Re^{i\varphi})|\,d\varphi = 2\tilde{k}(R) - \frac{\pi}{2}\ln R + O((\pi - \alpha)k_R(R)) + S(R), \quad R \to \infty. \tag{70}$$

Покажем, что сумма трех последних слагаемых справа есть величина вида $\tilde{k}(R)o(1) + o(1)$, $R \to \infty$. Для этого достаточно принять во внимание условие $\Phi(R)/R \to 0$, $R \to \infty$ и вытекающую из него в силу выбора $\alpha = \alpha(R)$ (см. (18)) асимптотику $(\pi - \alpha(R)) \sim a\Phi(R)/R$, $R \to \infty$, условие (12), а также два очевидных неравенства $k_0(R) \le x_+\sqrt{2q_+(x_+)}$, $\ln R \le \tilde{k}(R)o(1)$, $R \to \infty$. Проведенные рассмотрения позволяют перейти от (70) к равенству

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln|Y_R(Re^{i\varphi})|\,d\varphi = 2\tilde{k}(R)(1 + o(1)), \quad R \to \infty.$$

Преобразовывая в соответствии с этим равенством формулу Иенсена (55) и учитывая еще раз последнее из упомянутых неравенств, получаем искомую асимптотику (14) для функции $\tilde{n}(R)$, отвечающей задаче (1), (2) при $p_0 \equiv 1$, $p_1 \equiv 0$.

В случае общих граничных условий собственные значения задачи (1), (2) — суть нули функции $y(0,\lambda)p_0(\lambda) + y'(0,\lambda)p_1(\lambda)$, которая допускает тот же анализ, который был проведен выше применительно к $y(0,\lambda)$. Теорема доказана.

3. Обратимся еще раз к условиям (9) – (12) на потенциал q. Их проверка применительно к конкретной функции сводится к нужному подбору параметров $x_\pm(R)$, $\Phi(R)$, $R \in \Re$, что не всегда тривиально. Поэтому желательно с помощью достаточно просто проверяемых условий определить классы функций, удовлетворяющих условиям (9) – (12). Ниже даются такого типа определения. При этом используются следующие обозначения:

$$E_m(\xi) := \prod_{k=0}^{m} e_k(\xi), \quad m = -1, 0, 1, 2, \ldots ;$$

$$L_m(x) := \prod_{k=1}^{m} l_k(x), \quad m = 1, 2, \ldots ,$$

где $e_k(\xi)$ — k-я повторная экспонента для $k \ge 1$ и $e_0(\xi) := \xi$, $e_{-1}(\xi) := 1$, $l_k(x)$ — k-й повторный логарифм.

Фиксируя $n \ge 1$, положим $Q(x) := G(l_n(x))$, $x >> 1$, где $G(\xi)$, $\xi >> 1$, — непрерывно дифференцируемая, строго монотонно растущая при $\xi \to \infty$ функция, удовлетворяющая условию (13) при $\xi >> 1$.

Обозначим через $P(R)$, $R >> 1$, функцию, обратную $Q(x)$, $x >> 1$, а через $F(r)$, $r >> 1$, функцию, обратную $G(\xi)$, $\xi >> 1$.

Пусть функция $q(x)$ при $x >> 1$ включена в неравенства

$$Q(x)(1 - M/L_n(x)) \le q(x) \le Q(x), \quad x >> 1, \quad n \ge 1,$$

M — положительная константа. Утверждается, что $q(x)$ удовлетворяет условиям (9) – (12) при всех $R >> 1$ и $x_{\pm}(R)$, $\Phi(R)$, определенных ниже в (71), (72). Доказательство этого фактически совпадает с доказательством более общего утверждения. А именно, пусть функции $q_{\pm}$, соответствующие q согласно (8), удовлетворяют неравенствам

$$q_+(x) \le Q(x), \quad x \in [x_-, x_+]; \quad q_-(x_+) \ge Q(x_+)(1 - M/L_n(x_+)),$$

где

$$x_- = x_-(R) := [\ln P(R)]^{\nu}, \quad \nu \ge 15/4; \quad x_+ = x_+(R) :=$$

$$:= P(R/(1 - AE_{n-1}(F(R))), \quad R \in \Re, \tag{71}$$

A — константа, больше чем M, $\Re$ — произвольное неограниченное подмножество в $[0, \infty)$. Тогда q удовлетворяет условиям (9) – (12) для каждого $R \in \Re$, $R >> 1$, при $x_{\pm}(R)$, определенных в (71), и

$$\Phi(R) := \frac{R}{[\rho(R)]^{\mu}}, \tag{72}$$

где μ связано с ν из (71) условием $2\nu/5 > \mu > 3/2$. В частности, если

$$q(x) \le Q(x), \quad x >> 1; \quad q_-(x_j) \ge Q(x_j)(1 - M/L_n(x_j)), \quad j = 1, 2, \dots,$$

где $x_j := x_+(R_j)$, $R_j >> 1$, то последнее утверждение справедливо при $\Re :=$ $:= \{R_1, R_2, \dots\}$.

1. *Костюченко А. Г., Саргсян И. С.* Распределение собственных значений. – М.: Наука, 1979. – 400 с.
2. *Бойматов К. Х.* Оператор Штурма – Лиувилля с матричным потенциалом // Мат. заметки. – 1974. – **16**, № 6. – С. 921–932.
3. *Федорюк М. В.* Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных операторов уравнений. – М.: Наука, 1983. – 352 с.
4. *Леонтьев А. Ф.* Целые функции. Ряды экспонент. – М.: Наука, 1983. – 176 с.

Получено 13.07.94