УДК 517. 53

В. В. Маймескул (Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

О ТЕОРЕМЕ ХЕЙМАНА – ВУ ДЛЯ КВАЗИЛИНИЙ

We find a condition on a function ω which is sufficient for the sum $\sum_i \omega(\operatorname{diam}\varphi(L_i))$ to be finite for any quasiline L, simply connected domain Ω, and a function φ, which maps this domain onto the unit disc conformally and one-to-one. Here L_i denote components of $\Omega \cap L$.

Одержано умову на функцію ω, що достатня для скінченності $\sum_i \omega(\operatorname{diam}\varphi(L_i))$ для довільної квазіконформної кривої L, однозв'язної області Ω та функції φ (яка конформно та однолисто відображає цю область на одиничний круг), де L_i — компоненти множини $\Omega \cap L$.

1. Введение и основной результат. Пусть Ω — односвязная область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $\varphi(z) = \varphi(\Omega, z)$ — функция Римана, конформно и однолистно отображающая Ω на единичный круг Δ. Пара (Ω, φ) называется *парой Римана*. Будем говорить, что жорданова кривая L имеет *конечную конформную длину* [1], если существует константа $C = C(L)$ такая, что неравенство

$$\sum_i \operatorname{length}\varphi(L_i) \le C \tag{1}$$

справедливо для любой пары Римана (Ω, φ), где L_i — связные компоненты множества $L \cap \Omega$.

Согласно знаменитому результату Hayman и Wu [2], прямая линия (или окружность) имеет конечную конформную длину. Исследование кривых, удовлетворяющих соотношению (1), было продолжено в работах многих авторов (подробнее с библиографией и результатами в этом направлении можно ознакомиться, например, в [1, 3, 4]). Окончательный результат Bishop и Jones [4] утверждает, что L имеет конечную конформную длину тогда и только тогда, когда она есть регулярная кривая (кривая Альфорса).

Естественным является изучение аналогичных проблем для других классов кривых, в частности для квазиконформных (с очевидной заменой *длины* на *диаметр* в (1)). Следующее утверждение было сформулировано в [1] как гипотеза и названо в [5] *диаметральным свойством ("diameter property")* кривых: *для любого $K \ge 1$ существует постоянная $C = C(K)$ такая, что неравенство*

$$\sum_i \operatorname{diam} L_i \le C$$

выполняется для всякой K-квазилинии L и пары Римана (Ω, φ).

Жорданова кривая L, проходящая на сфере Римана через ∞, называется *K-квазилинией*, если она является образом прямой линии при K-квазиконформном отображении F плоскости на себя, $F(\infty) = \infty$. Аналогично, *квазиокружность* есть образ окружности при указанном отображении. Поддугу квазилинии или квазиокружности называют *квазиконформной дугой*. Следующее свойство квазилиний (квазиокружностей) является характеристическим и может быть принято в качестве их определения: существует константа $c_1 = c_1(K) > 0$ такая, что для любой пары точек $z, \zeta \in L$

$$|z - \zeta| \ge c_1 \operatorname{diam} L(z, \zeta), \tag{2}$$

где $L(z, \zeta) \subset L$ обозначает поддугу с концевыми точками z, ζ и меньшим диаметром (подробнее о квазилиниях см. [6]).

Недавний результат Vaisala [7] позволял надеяться, что гипотеза о диаметральном свойстве квазилиний верна: *для любых* $\varepsilon > 0$ *и* $K \geq 1$ *существует постоянная* $C = C(\varepsilon, K)$ *такая, что для всякой* K*-квазилинии* L *и пары Римана* (Ω, φ)

$$\sum_i (\operatorname{diam} \varphi(L_i))^{1+\varepsilon} \leq C.$$

Тем не менее, эта гипотеза была опровергнута в [5]. А именно, было показано, что существует множество квазилиний, не имеющих диаметрального свойства (например, „снежинка Коха"). Поэтому актуальным является нахождение условий на функцию $\omega(t)$, гарантирующих конечность суммы $\sum_i \omega(\operatorname{diam} \varphi(L_i))$ для любой квазилинии L.

Пусть $\omega(t)$ — произвольная неубывающая функция на $(0, \infty)$, удовлетворяющая при некотором $Q > 0$ неравенству

$$\int_0^4 \frac{\omega(t)}{t^2} dt \leq Q. \tag{3}$$

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема. *Для любого* $K < \infty$ *существует константа* $C = C(Q, K)$ *такая, что*

$$\sum_i \omega(\operatorname{diam} \varphi(L_i)) \leq C$$

для любой K*-квазилинии* L *и пары Римана* (Ω, φ).

2. Вспомогательные результаты. Поскольку любая внутренняя линия уровня $\{z \in \Omega : |\varphi(z)| = r\}$, $0 < r < 1$, является жордановой кривой, можно предполагать, без ограничения общности, что область Ω также является жордановой. Более того, достаточно ограничиться рассмотрением только ограниченных областей.

Следующее важное утверждение доказано в [1].

Лемма 1. *Пусть* (Ω, φ) *— пара Римана,* L *—* K*-квазилиния. Тогда каждая дуга* L_i *является* C_1*-квазидугой с постоянной* C_1*, зависящей только от* K.

Пусть $\zeta \in \Omega$ такова, что $\varphi(\zeta) = 0$. Каждая дуга L_i делит Ω на две подобласти. Обозначим через D_i ту из них, которая не содержит точку ζ (в случае $\zeta \in L_i$ может быть взята любая из этих подобластей). Существуют два случая взаимного расположения областей D_i и D_j для $i \neq j$: или они не пересекаются, или одна из них есть подобласть другой (например, $D_i \subset D_j$). Во втором случае обозначим через $\mathcal{D}_{ij}$ так называемый четырехсторонник, образованный областью $D_j \setminus D_i$, отмеченными a-сторонами которого являются L_i и L_j (более подробно с понятием и свойствами четырехсторонников можно ознакомиться в [8]). Пусть $M(\mathcal{D}_{ij})$ — модуль $\mathcal{D}_{ij}$, т.е. модуль семейства кривых, соединяющих в $D_j \setminus D_i$ его a-стороны. Напомним, что модуль $M(\Gamma)$ семейства Γ локально спрямляемых кривых определяется по формуле

$$M(\Gamma) := \inf_\rho \iint_{\mathbb{C}} \rho^2 \, dx\, dy,$$

где точная нижняя грань берется по множеству допустимых для Γ функций $\rho(z)$, т.е. неотрицательных функций, удовлетворяющих неравенству $\inf_{\gamma \in \Gamma} \int_\gamma \rho |dz| \geq 1$ (см., например, [9], разд. (4.1)).

Лемма 2. *Пусть L — K-квазилиния, Ω — односвязная область. Тогда для любых* $D_i \subset D_j \subset D_k$

$$M(\mathcal{D}_{ik}) \le 4\pi K.$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{\Gamma}$ есть семейство кривых, соединяющих в $\mathbb{C}$ дуги L_i, L_k и пересекающих L_j. В силу монотонности модуля семейства кривых достаточно оценить $M(\mathbf{\Gamma})$. Через F обозначим K-квазиконформное отображение плоскости на себя, переводящее L в прямую линию. Тогда

$$M(\mathbf{\Gamma}) \le KM(F(\mathbf{\Gamma})).$$

Пусть l_1, l_2, l_3 — образы дуг L_i, L_j, L_k, лежащие на прямой в указанном порядке, x_0 — середина l_2. Определим функцию $\rho(z)$ по формуле

$$\rho(z) = \begin{cases} 2|l_2|^{-1}, & z \in U := \{\zeta : |\zeta - x_0| \le |l_2|\}; \\ 0 & \text{— в противном случае,} \end{cases}$$

где $|l_2|$ обозначает длину дуги l_2. Пусть $\gamma \in \mathbf{\Gamma}$ — произвольная кривая. Если $\gamma \cap \partial U \ne \emptyset$, то существует поддуга $\gamma' \subset U$ дуги γ, соединяющая l_2 и ∂U. Следовательно, имеем

$$\int_\gamma \rho(z)|dz| \ge \int_{\gamma'} \rho(z)|dz| \ge \frac{2}{|l_2|}|\gamma'| \ge 1.$$

В противном случае пусть $\gamma' \subset \gamma$ — поддуга, соединяющая l_1 и l_3. Тогда $|\gamma'| \ge |l_2|$ и

$$\int_\gamma \rho(z)|dz| \ge 2.$$

Значит, функция $\rho(z)$ допустима для $\mathbf{\Gamma}$ и

$$M(F(\mathbf{\Gamma})) \le \iint_{\mathbb{C}} \rho^2\, dx\, dy = 4\pi.$$

Лемма 2 доказана.

Обозначим $\Delta_i := \varphi(D_i)$, $\Gamma_i := \varphi(L_i)$, $l_i := \partial\Delta_i \setminus \Gamma_i = \partial\Delta_i \cap \partial\Delta$.

Лемма 3. *Существуют константы* $c_2 = c_2(K) > 0$, $C_2 = C_2(K) > 1$ *такие, что для любых* $D_i \subset D_j \subset D_k$

$$|l_k| \ge c_2 \operatorname{diam} \Gamma_i, \; |l_k| \ge C_2 |l_i|.$$

Доказательство. Поскольку модуль семейства кривых является конформным инвариантом, применяя известное неравенство ([8], лемма 4.1) к четырехстороннику, сопряженному к $\varphi(\mathcal{D}_{ik})$, и принимая во внимание лемму 2, получаем

$$\frac{1}{\pi}\,\frac{(\log(1+2s_b/s_a))^2}{1 + 2\log(1+2s_b/s_a)} \le M(\mathcal{D}_{ik}) \le 4\pi K, \tag{4}$$

где s_a и s_b — расстояния вдоль четырехсторонника $\varphi(\mathcal{D}_{ik})$ между его a- и b-сторонами соответственно.

Пусть $\tau_k^{(1)}, \tau_i^{(1)}$ и $\tau_i^{(2)}, \tau_k^{(2)}$ — концевые точки b-сторон $\varphi(\mathcal{D}_{ik})$, расположенные на единичной окружности в указанном порядке. Неравенство (4) влечет

$$\left|\tau_k^{(r)}-\tau_i^{(r)}\right| \ge s_a \ge c_2 s_b \ge c_2 \operatorname{diam}\Gamma_i \ge c_2\left|\tau_i^{(1)}-\tau_i^{(2)}\right| \ge \frac{2}{\pi}c_2|l_i|, \quad r=1,2.$$

При этом считаем, что $|l_i|\le\pi$, так как в противном случае $s_b\ge 2$, и наше утверждение очевидно. Следовательно,

$$|l_k| \ge |l_i| + \sum_{r=1}^{2}\left|\tau_k^{(r)}-\tau_i^{(r)}\right| \ge (1+c_2)|l_i|$$

и лемма 3 доказана.

3. Доказательство теоремы. Обозначим через $\mathcal{N}(k)$, $k=0, 1, \ldots$, множества индексов i таких, что

$$2^{-k} < \operatorname{diam}\Gamma_i \le 2^{-k+1}; \tag{5}$$

$\mathcal{N}'(k)\subset\mathcal{N}(k)$ — множество индексов i, для которых не существует индекса $j\in\mathcal{N}(k)$, удовлетворяющего $\Delta_j\subset\Delta_i$. Заметим, что $l_i\cap l_j=\varnothing$ для $i,j\in\in\mathcal{N}'(k)$, $i\ne j$. Из правой части (5) и известного неравенства $\sin(t)\ge(2/\pi)t$, $t\in(0,\pi/2)$ следует, что для $j\in\mathcal{N}(k)$

$$|l_j| \le \pi 2^{-k}.$$

Пусть $n(k):=\operatorname{card}\mathcal{N}'(k)$ — мощность множества $\mathcal{N}'(k)$. Оценим сначала $n(k)$. Согласно лемме 1, каждая дуга Γ_j есть $C_1(K)$-квазидуга. Пусть $l\supset\Gamma_j$ — квазилиния или квазиокружность. Из неравенства (2) следует, что существует постоянная $c_3=c_3(K)>0$ такая, что

$$|\tau_1-\tau_2| \ge c_3 \operatorname{diam} l(\tau_1,\tau_2) \tag{6}$$

для любой пары точек $\tau_1,\tau_2\in l$.

Пусть $i\in\mathcal{N}'(k)$ таково, что Γ_i является поддугой некоторой квазилинии. Подставляя в (6) вместо τ_1,τ_2 концевые точки Γ_i, заключаем, что $|l_i|\ge\ge c_3 2^{-k}$. Следовательно, количество таких индексов не превышает $C_3(K)2^k$.

Разобьем множество тех индексов i из $\mathcal{N}'(k)$, для которых Γ_i есть поддуга квазиокружности, на три подмножества. К $\mathcal{N}_1'(k)$ отнесем те из них, для которых $|l_i|\ge c_3 2^{-k-2}$. Оставшиеся индексы отнесем к $\mathcal{N}_2'(k)$ или к $\mathcal{N}_3'(k)$ в зависимости от того, пересекает Γ_i окружность $T_r=\{w: |w|=1-r\}$, $r:=:=c_4 2^{-k}$, или нет. Постоянная $c_4=c_4(K)<c_3$ будет выбрана позже. Очевидно, $\operatorname{card}\mathcal{N}_1'(k)\le C_4(K)2^k$.

Пусть $\Gamma_i\in\mathcal{N}_2'(k)$ и $\Gamma^*\supset\Gamma_i$ есть соответствующая ей квазиокружность, $z\in T_r\cap\Gamma_i$ — произвольная точка. Обозначим через $l_i'\subset T_{r/2}$ дугу (или какую-либо из таковых), которая отделяет в $\overline{\operatorname{Int}\Gamma^*}$ точку z от l_i. Тогда концевые точки l_i' разбивают Γ^* на две поддуги, и диаметр каждой из них не более $c_4 2^{-k-1}$. Следовательно, из (6) заключаем, что $|l_i'|\ge c_5(K)2^{-k}$. Поэтому $\operatorname{card}\mathcal{N}_2'(k)\le C_5(K)2^k$.

Множество $\mathcal{N}_3'(k)$ пусто при подходящем выборе постоянной c_4 и достаточно больших k. Действительно, пусть $i\in\mathcal{N}_3'(k)$ — произвольный индекс. Тогда дуга Γ_i лежит в кольце $\{w:\ 1-r\le|w|\le 1\}$. Если z — одна из концевых точек Γ_i, то, согласно (5), существует точка $w\in\Gamma_i$ такая, что $|z-w|>$

$> 2^{-k-1}$. Это влечет существование поддуги l окружности $\{\tau: |\tau - z| = 2^{-k-2}\}$, разделяющей точки z и w в $\overline{\Delta}_i$. Ее концевые точки z_1 и z_2 лежат на Γ_i и делят $\partial\Delta_i$ на две поддуги. Поскольку диаметр каждой из них не менее 2^{-k-2}, из (6) имеем $|z_1 - z_2| \geq c_3 2^{-k-2}$. С другой стороны, выбирая $c_4 = c_3/16$, получаем $|z_1 - z_2| < c_3 2^{-k-2}$ при достаточно больших k. Следовательно, $\mathcal{N}_3'(k)$ пусто.

Окончательно имеем

$$n(k) \leq C_6(K)2^k. \tag{7}$$

Пусть $i_0 \in \mathcal{N}'(k)$ и $i_1, \ldots, i_r \in \mathcal{N}(k)$ таковы, что $\Delta_{i_0} \subset \Delta_{i_1} \ldots \subset \Delta_{i_r}$. Применяя лемму 3 к индексам $i_{2m}, i_{2m+1}, i_{2m+2}$, $m = 0, 1, \ldots$, получаем

$$c_2 2^{-k} C_2^{[r/2]} \leq \pi 2^{-k}.$$

Таким образом, $r \leq C_7(K)$, и из (7) следует, что количество дуг Γ_i, удовлетворяющих (5), не превышает $C_8(K)2^k$. Поэтому

$$\sum_i \omega(\operatorname{diam}\Gamma_i) = \sum_k \left(\sum_{i \in \mathcal{N}(k)} \omega(\operatorname{diam}\Gamma_i) \right) \leq C_8 \sum_{k=0}^{\infty} \omega(2^{-k+1}) 2^k \leq$$

$$\leq C_8 \sum_{k=0}^{\infty} \omega(2^{-k+1}) \int_{2^{-k+1}}^{2^{-k+2}} \frac{dt}{t^2} \leq C_8 \int_0^4 \frac{\omega(t)}{t^2} dt.$$

Теорема доказана.

1. *Fernandez J., Heinonen J., Martio O.* Quasilines and conformal mappings // J. D'Analyse Math. – 1989. – **52**. – P. 117–132.
2. *Hayman W., Wu G.* Level sets of univalent function // Comm. Math. Helv. – 1981. – **56**. – P. 366–403.
3. *Fernandez J., Hamilton D.* Lengths of curves under conformal mappings // Ibid. – 1987. – **62**. – P. 122–134.
4. *Bishop Ch., Jones P.* Harmonic measure and arclength // Ann. Math. – 1990. – **132**. – P. 511–547.
5. *Astala K., Fernandez J., Ronde S.* Quasilines and the Hayman – Wu theorem. – Berlin, 1991. – 25 p. – (Preprint).
6. *Ahlfors L.* Lectures in quasiconformal mappings. – Princeton: Van-Nostrad, 1966. – 133 p.
7. *Vaisala J.* Bounded turning and quasiconformal mappings // Monastshefte Math. – 1991. – **11**. – P. 233–244.
8. *Lehto O., Virtanen K. I.* Quasiconformal mappings in the plane. – Berlin etc.: Springer, 1973. – 260 p.
9. *Ahlfors L.* Conformal invariants. Topic in geometric function theory. – New York: McGraw-Hill, 1973. – 157 p.

Получено 10.04.95