УДК 517.956

С. А. Алдашев (Алматин. ин-т инж. железнодорож. трансп.)

О КОРРЕКТНОСТИ ЗАДАЧ ДИРИХЛЕ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ И УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА – БИЦАДЗЕ

Unique solvabilities of the Dirichlet problems are proved for the many-dimensional wave equation and the equation of Lavrent'ev – Bitsadze.

Для багатомірних хвильового рівняння та рівняння Лаврентьєва – Біцадзе доведено однозначну розв'язність задач Діріхле.

Пусть Ω_ε — конечная область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1, \ldots$ $\ldots, x_m, t)$, ограниченная в полупространстве $t>0$ конической поверхностью

$$\Gamma_\varepsilon:\ t = \varphi(r), \quad \varphi(\varepsilon) = \varphi(1) = 0,$$

$$\varphi(r) \in C^1([\varepsilon, 1]) \cap C^3((\varepsilon, 1)), \quad |\varphi'(r)| < 1, \quad \varphi'(r) \neq 0,$$

а при $t<0$ — тороидальной поверхностью $T_\varepsilon:\ r^2+t^2+\varepsilon=(1+\varepsilon)r$, где $r =$ $= |x|$ — длина вектора $x=(x_1, \ldots, x_m)$, $m \geq 2$, $0<\varepsilon<1$.

Обозначим через Ω_ε^+ и Ω_ε^- части области Ω_ε, лежащие соответственно в полупространстве $t>0$ и $t<0$, а через S_ε — общую часть границ областей Ω_ε^+ и Ω_ε^-, представляющую множество $\{t=0,\ 0<r<1\}$ точек из E_m.

В области Ω_ε^+ рассмотрим многомерное волновое уравнение

$$\Delta_x u - u_{tt} = 0, \tag{1}$$

а в области Ω_ε — многомерное уравнение Лаврентьева – Бицадзе

$$\Delta_x u - \operatorname{sgn} t\, u_{tt} = 0, \tag{2}$$

где Δ_x — оператор Лапласа по переменным $x_1, \ldots, x_m$.

Рассмотрим задачи Дирихле для уравнений (1) и (2).

***Задача* Д$_1$.** Найти решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$u\big|_{S_\varepsilon} = \tau(x), \quad u\big|_{\Gamma_\varepsilon} = \sigma(x). \tag{3}$$

***Задача* Д$_2$.** Найти решение уравнения (2) при $t \neq 0$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u\big|_{\Gamma_\varepsilon} = \sigma(x), \quad u\big|_{T_\varepsilon} = \psi(x).$$

Отметим, что задачи Дирихле для одномерного волнового уравнения и уравнения Лаврентьева – Бицадзе не корректны [1].

В дальнейшем удобно перейти от декартовых координат $x_1, \ldots, x_m, t$ к сферическим $r, \theta_1, \ldots, \theta_{m-1}, t$.

Пусть $\left\{Y_{n,m}^k(\theta)\right\}$ — система линейно независимых сферических функций порядка n, $1 \leq k \leq k_n$, $(m-2)!\,n!\,k_n = (n+m-3)!\,(2n+m-2)$, $\theta = (\theta_1, \ldots$ $\ldots, \theta_{m-1})$.

Лемма 1 [2, с. 147]. *Пусть* $f(r,\theta)\in W_2^l(S_\varepsilon)$. *Если* $l\geq m-1$, *то ряд*

$$f(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\bar{f}_n^k(r)Y_{n,m}^k(\theta) \tag{4}$$

сходится абсолютно и равномерно.

Через $\bar{\tau}_n^k(r)$, $\bar{\sigma}_n^k(r)$ обозначим коэффициенты разложения ряда (4) соответственно функций $\tau(r,\theta)$, $\sigma(r,\theta)$.

Введем множество функций

$$M^l(S_\varepsilon) = \Bigg\{f(r,\theta)\colon f\in W_2^l(S_\varepsilon),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\left(\left\|\bar{f}_n^k(r)\right\|^2_{C([\varepsilon,1])}+\left\|\bar{f}_n^k(r)\right\|^2_{C^2((\varepsilon,1))}\right)(\exp 2n^2)n^{2l}<\infty,\quad l>3m/2\Bigg\},$$

$$C_d(\Omega_\varepsilon) = \{u(x,t)\colon u(x,0)=(|x|-\varepsilon)^\alpha\bar{u}(x,0),$$

$$\bar{u}\in C(\overline{\Omega}_\varepsilon)\cap C^1(\Omega_\varepsilon^+\cup S_\varepsilon)\cap C^2(\Omega_\varepsilon^+\cup\Omega_\varepsilon^-),\quad \alpha>m/2+1\}.$$

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Если* $\tau(r,\theta),\sigma(r,\theta)\in M^l(S_\varepsilon)$, *то задача* Д$_1$ *имеет единственное решение в классе* $C(\overline{\Omega}_\varepsilon^+)\cap C^1(\Omega_\varepsilon^+\cup S_\varepsilon)\cap C^2(\Omega_\varepsilon^+)$.

Теорема 2. *Пусть* $\sigma(r,\theta),\psi(r,\theta)\in M^l(S_\varepsilon)$. *Тогда задача* Д$_2$ *в классе* $C_\alpha(\Omega_\varepsilon)$ *разрешима, причем единственным образом.*

Доказательство *теоремы* 1. В сферических координатах уравнение (1) имеет вид

$$u_{rr}+\frac{m-1}{r}u_r-\frac{1}{r^2}\delta u-u_{tt} = 0, \tag{5}$$

где

$$\delta \equiv -\sum_{j=1}^{m-1}\frac{1}{g_j\sin^{m-j-1}\theta_j}\frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(\sin^{m-j-1}\theta_j\frac{\partial}{\partial\theta_j}\right),$$

$$g_1 = 1,\quad g_j = (\sin\theta_1\ldots\sin\theta_{j-1})^2,\quad j>1.$$

Так как искомое решение задачи (1), (3) принадлежит классу $C(\overline{\Omega}_\varepsilon^+)\cap$ $\cap\, C^2(\Omega_\varepsilon^+)$, его можно искать в виде ряда

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\bar{v}_n^k(r,t)Y_{n,m}^k(\theta), \tag{6}$$

где $\bar{v}_n^k(r,t)$ — функции, подлежащие определению.

Подставляя (6) в (5) и производя замену переменных по формуле $\bar{v}_n^k(r,t) =$ $= r^{(1-m)/2}v_n^k(r,t)$, а затем полагая $\xi=(r+t)/2$, $\eta=(r-t)/2$, получаем

$$v_{n\xi\eta}^k+\frac{[(m-1)(3-m)-4\lambda]}{4(\xi+\eta)^2}v_n^k = 0,\quad \lambda = n(n+m-2). \tag{7}$$

Тогда краевые условия (3) для функций $\upsilon_n^k(\xi,\eta)$ с учетом леммы 1 принимают вид

$$\upsilon_n^k(\xi,\xi) = \tau_n^k(\xi), \quad \upsilon_n^k(\xi,\gamma(\xi)) = \sigma_n^k(\xi), \quad \xi \in J, \tag{8}$$

где

$$\tau_n^k(\xi) = (2\xi)^{(m-1)/2}\,\bar{\tau}_n^k(2\xi), \quad \sigma_n^k(\xi) = (\xi+\gamma(\xi))^{(m-1)/2}\,\bar{\sigma}_n^k(\xi+\gamma(\xi)),$$

а функция $\eta=\gamma(\xi)$ является решением уравнения $\eta = \xi - \varphi(\xi+\eta)$. Здесь и далее J означает интервал $(\varepsilon/2, 1/2)$.

Функция $\eta=\gamma(\xi)$ имеет следующие свойства:

1. Осуществляет топологическое отображение сегмента J на самого себя, оставляя неподвижными его концы.

2. $$\gamma'(\xi) = \frac{1-\varphi'(r)}{1+\varphi'(r)} > 0, \quad \gamma'(\xi) \neq 1, \quad \xi \in \bar{J}. \tag{9}$$

Используя общее решение уравнения (7) [3], нетрудно показать, что решение задачи Коши для уравнения (7) имеет вид

$$\upsilon_n^k(\xi,\eta) = \frac{\tau_n^k(\eta)}{2}R(\eta,\eta;\xi,\eta) + \frac{\tau_n^k(\xi)}{2}R(\xi,\xi;\xi,\eta) +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\int_\eta^\xi \Big[\nu_n^k(\xi_1)R(\xi_1,\xi_1;\xi,\eta) - \tau_n^k(\xi_1)\frac{\partial}{\partial N}R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)\Big|_{\xi_1=\eta_1}\Big]d\xi_1, \tag{10}$$

где

$$R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta) = P_\mu\left[\frac{(\xi_1-\eta_1)(\xi-\eta)+2(\xi_1\eta_1+\xi\eta)}{(\xi_1+\eta_1)(\xi+\eta)}\right]$$

— функция Римана уравнения (7) [4], $P_\mu(z)$ — функция Лежандра, $\mu = n + (m-3)/2$,

$$\nu_n^k(\xi_1) = \frac{\partial\upsilon_n^k}{\partial N}\bigg|_{\xi_1=\eta_1} = \left(\frac{\partial\xi_1}{\partial N'}\frac{\partial\upsilon_n^k}{\partial\eta_1} + \frac{\partial\eta_1}{\partial N'}\frac{\partial\upsilon_n^k}{\partial\xi_1}\right)\bigg|_{\xi_1=\eta_1},$$

N' — внешняя нормаль к прямой $\xi=\eta$.

Из уравнения (10), учитывая краевое условие (8), при $\eta=\gamma(\xi)$ после дифференцирования по ξ получаем интегро-дифференциальное уравнение

$$g_n^k(\xi) = \nu_n^k(\xi) - \gamma'(\xi)\,\nu_n^k(\gamma(\xi)) + \int_{\gamma(\varepsilon)}^{\xi}\nu_n^k(\xi_1)\frac{\partial}{\partial\xi}P_\mu(z)\,d\xi_1, \tag{11}$$

где

$$g_n^k(\xi) = \frac{\partial}{\partial\xi}h_n^k(\xi),$$

$$h_n^k(\xi) = \sqrt{2}\,\sigma_n^k(\xi) - \frac{1}{\sqrt{2}}\tau_n^k(\xi) - \frac{1}{\sqrt{2}}\tau_n^k(\gamma(\xi)) + \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\gamma(\varepsilon)}^{\xi}\frac{\xi-\gamma(\xi)}{\xi+\gamma(\xi)}\frac{\tau_n^k(\xi_1)}{\xi_1}P'_\mu(z)\,d\xi_1,$$

$$P_\mu(z) = P_\mu\left[\frac{\xi_1^2+\xi\gamma(\xi)}{\xi_1(\xi+\gamma(\xi))}\right].$$

Далее, уравнение (11) нетрудно преобразовать к функциональному уравнению вида

$$A\mu_n^k \equiv f_n^k(\xi) + \alpha(\xi)\mu_n^k[\gamma(\xi)] = \mu_n^k(\xi) \quad \forall\, \xi \in \bar{J}, \tag{12}$$

$$\mu_n^k(\xi) = \frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\nu_n^k(\xi), \quad \alpha(\xi) = [\gamma'(\xi)]^3,$$

$$f_n^k(\xi) = -\nu_n^k(\xi)\left[\frac{\partial}{\partial\xi}P(\xi,\xi) + P_1(\xi,\xi)\right] + \nu_n^k(\gamma(\xi))\Big[\gamma'''(\xi) +$$

$$+\gamma''(\xi)P(\xi,\gamma(\xi)) + \gamma'(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}P(\xi,\gamma(\xi)) + \gamma'(\xi)P_1(\xi,\gamma(\xi))\Big] -$$

$$-P(\xi,\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\nu_n^k(\xi) + \frac{\partial}{\partial\xi}\nu_n^k(\gamma(\xi))[3\gamma''(\xi)\gamma'(\xi) + (\gamma'(\xi))^2P(\xi,\gamma(\xi))] +$$

$$+\int_{\xi}^{\gamma(\xi)}\nu_n^k(\xi_1)\frac{\partial}{\partial\xi_1}P_1(\xi,\xi_1)\,d\xi_1 + \frac{\partial^2 g_n^k}{\partial\xi^2},$$

$$P(\xi,\xi_1) = \frac{\partial}{\partial\xi}P_\mu(z), \quad P_1(\xi,\xi_1) = \frac{\partial}{\partial\xi}P(\xi,\xi_1),$$

$$P_2(\xi,\xi_1) = \frac{\partial^2}{\partial\xi^2}P_1(\xi,\xi_1).$$

Рассмотрим банахово пространство функции $\mu(\xi) \in C(\bar{J})$ с нормой $\|\mu\| = \max_{\bar{J}}|\mu(\xi)|$.

Оператор A из (12) отображает $C(\bar{J})$ на себя в случае, когда $\gamma'(\xi) < 1$, на основании очевидного неравенства

$$\|A_{\mu_1} - A_{\mu_2}\| \le \|\alpha(\xi)\|\,\|\mu_1[\gamma(\xi)] - \mu_2[\gamma(\xi)]\| = \|\alpha\|\,\|\mu_1 - \mu_2\|,$$

справедливого для любых μ_1 и μ_2 из $C(\bar{J})$, и является оператором сжатия. Следовательно, по известной теореме Банаха [5] уравнение (12) имеет решение, притом единственное, которое можно построить методом итераций:

$$\mu_n^k(\xi) = \sum_{s=0}^{\infty}\prod_{i=0}^{s-1}\alpha(\gamma^i(\xi))f_n^k(\gamma^s(\xi)), \quad \gamma^0(s) = s, \quad \gamma^2(s) = \gamma(\gamma(s)). \tag{13}$$

Случай $\gamma'(\xi) > 1$ заменой ξ на $\gamma^{-1}(\xi)$ сводится к исследованному выше.

Таким образом, при выполнении условия (9) уравнение (12) однозначно разрешимо.

Далее, путем несложных преобразований с учетом (13) уравнение (12) нетрудно свести к уравнению Вольтерра второго рода

$$\mu_n^k(\xi) - \int_{\varepsilon/2}^{\xi}G(\xi,t)\mu_n^k(t)\,dt = \Phi_n^k(\xi), \tag{14}$$

$$G(\xi,t) = \sum_{s=0}^{\infty}\prod_{i=0}^{s-1}\alpha(\gamma^i(\xi))\Big[\theta(\gamma^s(\xi)-t)(\gamma^s(\xi)-t)\Big(\frac{\partial}{\partial\xi}P(\gamma^s,\gamma^s)\Big) + P_1(\gamma^s,\gamma^s) -$$

$$-\theta(\gamma^{s+1}-t)(\gamma^{s+1}-t)\Big(\gamma'''(\gamma^s) + \gamma''(\gamma^s)P(\gamma^s,\gamma^{s+1}) + \gamma'(\gamma^s)\frac{\partial}{\partial\xi}P(\gamma^s,\gamma^{s+1})\Big) +$$

$$+ \gamma'(\gamma^s)P_1(\gamma^s, \gamma^{s+1}) + \theta(\gamma^s - t)\, P(\gamma^s, \gamma^s) - 3\,\theta(\gamma^{s+1} - t)\, \gamma''(\gamma^s)\gamma'(\gamma^s) +$$

$$+ [\gamma'(\gamma^s)]^2 P(\gamma^s, \gamma^{s+1}) - \theta(\gamma^s - t) \int\limits_t^{\gamma^s} (\xi_1 - t)P_2(\gamma^s, \xi_1)\, d\xi_1 +$$

$$+ \theta(\gamma^{s+1} - t) \int\limits_t^{\gamma^{s+1}} (\xi_1 - t)P_2(\gamma^s, \xi_1)\, d\xi_1 \Bigg],$$

$$\Phi_n^k(\xi) = \sum_{s=0}^{\infty} \left(g_n^k(\gamma^s)\right)'' \prod_{i=0}^{s-1} \alpha(\gamma^i(\xi)),$$

$\theta(t)$ — функция Хевисайда.

Теперь, определяя $\mu_n^k(\xi)$ из (14), можно вычислить

$$\nu_n^k(\xi) = \int\limits_{\varepsilon/2}^{\xi} (\xi - t)\mu_n^k(t)\, dt. \qquad (15)$$

Следовательно, мы установили, что уравнение (11) имеет единственное решение в классе $C(\bar{J}) \cap C^2(s)$.

Таким образом, функция

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} r^{(1-m)/2} v_n^k(r, t) Y_{n,m}^k(\theta) \qquad (16)$$

является решением задачи Д$_1$, где $v_n^k(r, t)$ находится по формуле (10), в которой $\nu_n^k(\xi)$ определяется из (15).

Учитывая ограничения на заданные функции $\tau(r, \theta)$, $\sigma(r, \theta)$ и формулы (1), (2) [6, с. 148], формулу (4) [6, с. 62], а также оценки (13) [2, с. 147], нетрудно показать, что полученное решение $u(r, \theta, t)$ в виде (16) принадлежит искомому классу. Отметим, что $\nu(x) = u_t(x, 0)$ удовлетворяет условиям

$$\nu(x)\Big|_{r=\varepsilon} = \frac{\partial \nu}{\partial r}\Big|_{r=\varepsilon} = 0.$$

Таким образом, теорема 1 доказана.

Доказательство *теоремы* 2. Сначала задача Д$_2$ в области Ω_ε^- аналогична задаче Трикоми из ([7], гл. 1, § 6) и сводится к задаче Д$_1$ для уравнения (1). Далее, используя теорему 1, убеждаемся в справедливости теоремы 2.

1. *Бицадзе А. В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. – М.: Наука, 1981. – 448 с.
2. *Михлин С. Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интагральные уравнения. – М.: Физматгиз, 1962. – 254 с.
3. *Бицадзе А. В.* Уравнения смешанного типа. – М.: Изд-во АН СССР, 1969. – 164 с.
4. *Copson E. T.* On the Riemann – Green // J. Math. Mech. and Anal. – 1958. – 1. – P. 324–348.
5. *Канторович Л. Б., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 741 с.
6. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции: В 3-х т. – М.: Наука, 1973. – Т. 1 – 294 с.
7. *Алдашев С. А.* Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений. – Алматы: Гылым, 1994. – 170 с.

Получено 09.11.94

УДК 519.552.12

Б. В. Забавський (Львів. ун-т)

НЕКОМУТАТИВНИЙ АНАЛОГ ТЕОРЕМ КОЕНА

By using weakly primary right ideals, an analog of Cohen theorem is proved for rings of principal right ideals.

На основі слабко первинних правих ідеалів доведено аналог теорем Коена для кілець головних правих ідеалів.

Коен довів, що коли довільний простий ідеал комутативного кільця з одиницею є головним (скінченнопородженим), тоді всі ідеали є головними (скінченнопородженими) [1]. В [2–4] одержано узагальнення цих результатів для дуокілець, матрично локальних і нетерових кілець. У даній роботі доведено аналог теореми Коена для кілець головних правих ідеалів [5–7].

Всі розглядувані в роботі кільця є асоціативними з одиницею, відмінною від нуля. Слово „ідеал" означає двосторонній ідеал. Правий ідеал P кільця R називається слабко первинним правим ідеалом, якщо з умови $(a+P)R(b+P) \subseteq P$, де $a, b \in R$, завжди випливає $a \in P$ або $b \in P$ [8]. Правий ідеал P кільця R називається первинним правим ідеалом, якщо з умови $aRb \subseteq P$, де $a, b \in R$, завжди випливає $a \in P$ або $b \in P$ [4]. Елемент $a \in R, a \neq 0$, називається дуоелементом, якщо $aR = Ra$.

Позначимо через S множину всіх правих ідеалів кільця R, які не є головними правими ідеалами, ми їх будемо називати неголовними правими ідеалами.

***Означення* 1.** *Неголовний правий ідеал $I \in S$ назвемо максимально неголовним правим ідеалом, якщо довільний правий ідеал в R, який містить I, власним чином є головним правим ідеалом.*

Множина S, яка розглядається як частково впорядкована множина відносно включення, є індукованою, і на основі леми Цорна маємо наступне твердження.

Твердження 1. *Довільний неголовний правий ідеал міститься хоча б в одному максимально неголовному правому ідеалі.*

Твердження 2. *Нехай R — кільце з єдиним максимально неголовним правим ідеалом N. Тоді N — первинний правий ідеал.*

Доведення. Нехай в R існують такі елементи $a \notin N$, $b \notin N$, що $aRb \subseteq N$. Завдяки максимальності N в множині S існує елемент $c \in R$ такий, що $N + aR = cR$. Розглянемо правий ідеал $J = \{x \mid cx \in N\}$. Очевидно, що $cb \in N$, тобто $b \in J$. Звідси, на основі твердження 1 і умов, накладених на кільце R, $J = dR$ — головний правий ідеал, оскільки $J \not\subset N$. Згідно з тим, що $N + aR = cR$, маємо $n + ar = c$, де $n \in N$, $r \in R$. Тому що $N \subset cR$ і $aR \subset cR$, то для довільного $m \in N$ існують такі елементи $l, k \in R$, що $m = cl$ і $a = ck$. Звідси $m = cl = nl + arl = nl + ckrl$. Далі $c(krl) = m - nl \in N$, а тому $krl = dt$ для деякого $t \in R$. Отже, $m = nl + cdt$. Оскільки $nl \in N$, то $nl = cs$, де, очевидно, $s \in J$, тобто $s = dy$ ($y \in R$). Звідси $N \subseteq cdR$. Через те що $1 \in R$, то $cd \in N$, тобто $cdR \subset N$. Отже, $N = cdR$ — головний правий ідеал кільця R, що суперечить вибору правого ідеалу N. Твердження доведено.

Враховуючи, що в правому ланцюговому кільці не більше одного максимально неголовного правого ідеалу, маємо таке твердження.

Теорема 1. *Праве ланцюгове кільце є кільцем головних правих іделів тоді і тільки тоді, коли кожний первинний правий ідеал є головним правим ідеалом.*

Теорема 2. *Якщо кожний слабко первинний правий ідеал кільця є головним правим ідеалом, то тоді довільний правий ідеал є головним правим ідеалом.*

Доведення. Припустимо супротивне. Тоді в кільці R існують максимально неголовні праві ідеали. Нехай N — довільний максимально неголовний правий ідеал кільця R. Тоді згідно з припущеннями на R маємо, що N не є слабко первинним правим ідеалом, тобто в R існують елементи $a, b \notin N$ такі, що $(a+N)R(b+N) \subset N$. Згідно з вибором N маємо $n + aR = cR$, $c \in R$. Розглянемо правий ідеал $J = \{x \mid cx \in N\}$. оскільки $aRN \subset N$, то $cRN \subset N$, а отже, $N \subset J$. Більш того, $b \in J$ і $b \notin N$. Отже, $J = dR$ і, зокрема, $cd \in N$. Оскільки $N \subset cR$, то для довільного $m \in N$ існує елемент $x \in R$ такий, що $m = cx$. Звідси, очевидно, $x \in J$. Отже, $x = dy$, $y \in R$, і $m = cdy$. Тобто $N \subseteq cdR$. Оскільки $cd \in N$, то $cdR \subseteq N$. Отже, $N = cdR$, що суперечить вибору правого ідеалу N. Теорема доведена.

Означення 2. *Правий ідеал P кільця R називається майже простим правим ідеалом, якщо з умов $ab \in P$, де b — дуо-елемент R, завжди випливає $a \in P$ або $b \in P$. Ідеал R, який задовольняє ці умови, називається майже простим ідеалом R.*

Твердження 3. *Максимальний двосторонній ідеал R є майже простим ідеалом.*

Доведення. Техай M — максимальний двосторонній ідеал R (тобто ідеал такий, що для довільного ідеалу N з того, що $M \subset N$, $N \neq M$, завжи випливає $N = R$). Нехай M не є майже простим. Тоді існує елемент $a \in R \setminus M$, $b \in R \setminus M$, де b — дуо-елемент такий, що $ab \in M$. Завдяки максимальності M маємо $M + bR = R$ і тому існують такі елементи $m \in M$, $r \in R$, що $m + br = 1$. Звідси $am + abr = a \in M$. Одержано суперечність з вибором елемента a, що й доводить твердження.

Оскільки довільний первинний правий ідеал є майже простим правим ідеалом, то, очевидно, справедливий такий результат.

Твердження 4. *Максимальний правий ідеал кільця є майже простим правим ідеалом.*

Твердження 5. *В області, де довільний ідеал є головним правим ідеалом, довільний ненульовий майже простий ідеал є максимальним ідеалом.*

Доведення. Нехай P — майже простий ненульовий власний ідеал, який не є максимальним. Тоді існує такий максимальний ідеал M кільця R, що $P \subset M \neq R$. Згідно з визначенням R $P = pR$, $M = mR$. Звідси $p = rm$, $m \notin P$, і тому $r \in P$, тобто, $r = ps$, $s \in R$. Отже, $p = psm$ і $m = 1$, що неможливо. Твердження доведено.

Зауважимо, якщо в кільці немає нетривіальних (не одиниць) дуо-елементів, тоді, очевидно, кожний правий ідеал є майже простим правим ідеалом.

Теорема 3. *Для області R наступні умови еквівалентні:*

1) *в R довільний ідеал є головним як правим, так і лівим ідеалом;*

2) *в R кожний первинний ідеал є головним як правим, так і лівим ідеалом;*

3) *в R кожний майже простий ідеал є головним як правим, так і лівим ідеалом.*

Доведення. Завдяки попереднім зауваженням нам досить показати імплікацію 2) $\Rightarrow$ 1).

Нехай в R існують неголовні двосторонні ідеали. Згідно з лемою Цорна в R існує ідеал N, який є максимальним серед таких ідеалів. Згідно з умовою N не є первинним ідеалом, тобто в R існують елементи $a \in R \setminus N$, $b \in R \setminus N$ такі, що $aRb \subseteq N$. Згідно з визначенням $N + RaR = cR = Rc$ — головний ідеал R. Очевидно, що $J = \{x \mid cx \in N\}$ — ідеал R. За визначенням N маємо $N \subset J$, причому $N \neq J$, оскільки $b \in J$. Звідси $J = dR = Rd$. Тому що $N \subset cR$, $RaR \subset cR$, то $a = cl$, $l \in R$, і довільний елемент $m \in N$ подається у вигляді

$m = ct, t \in R$. Через те що $N + RaR = cR$, існують елементи $n \in N$, $r_i, s_i \in R$, $i = 1, 2, \ldots, k$, такі, що

$$n + \sum_{i=1}^{k} r_i a s_i = c.$$

Звідси

$$m = nt + \sum_{i=1}^{k} r_i c l s_i t = nt + cr,$$

де $r \in J$, тобто $r = ds$, $s \in R$. Тоді $m = nt + cds$. Оскільки $nt = cz$, то $z \in J$, $z = dx$, $x \in R$. Тоді $nt = cdz$. Звідси $N \subset cdR$. І тому що $d \in J$, $1 \in R$, то $cdR \subseteq N$. А отже, $N = cdR = Rcd$.

Одержано суперечність з вибором N, що й доводить теорему.

Наступна теорема показує, що при деяких обмеженнях на кільце достатньо вимагати умови бути головним для максимальних ідеалів.

Теорема 4. *Для того щоб в області R довільний ідеал був головним як правим, так і лівим ідеалом, достатньо, щоб виконувалися умови:*

1) *довільний максимальний ідеал області R був головним як правим, так і лівим ідеалом;*

2) *для довільного максимального ідеалу N області R виконувалася умова*

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} M^k = (0).$$

Доведення. Нехай в R існують ідеали, які не є головними як правими, так і лівими ідеалами; тоді в R існує максимальний ідеал N з такою ж властивістю. Нехай M — такий максимальний ідеал, що $N \subset M$ і $M = mR$. Тоді для довільного ненульового елемента $n \in N$ маємо $n = a_1 m$. Оскільки $m \notin N$, то за твердженням 5 $a_1 \in N$, а отже, $a_1 = a_2 m$, де $a_2 \in N$ і так далі. Звідси $n \in \bigcap_{k=1}^{\infty} M^k$, тобто $n = 0$, що суперечить вибору елемента n. Теорема доведена.

Теорема 5. *Кільце є правим нетеровим кільцем тоді і тільки тоді, коли кожний майже простий правий ідеал є скінченнопородженим правим ідеалом.*

Доведення. Доведено теорему від супротивного. Нехай в R існує правий ідеал, який не є скінченнопородженим правим ідеалом. Легко переконатися, що множина таких правих ідеалів є індукованою відносно порядку включення. За лемою Цорна існує правий ідеал N, максимальний в множині таких ідеалів. Згідно з припущенням N не є майже простим правим ідеалом, тобто в R існують елементи $a \in R \setminus N$, $b \in R \setminus N$, де b — дуо-елемент такий, що $ab \in N$. Тоді $N + bR$ — скінченнопороджений правий ідеал, тобто

$$N + bR = \sum_{i=1}^{k} (n_i + br_i) R.$$

Очевидно, множина $J = \{ x \mid xb \in N \}$ — правий ідеал R_i і $N \subset J$, $N \neq J$. Звідси $J = \sum_{i=1}^{k} s_i R$. Оскільки $N \subset N + bR$, то для довільного $m \in N$ маємо

$$m = \sum_{i=1}^{k} (n_i + br_i) x_i = \sum_{i=1}^{k} n_i x_i + b \sum_{i=1}^{k} r_i x_i.$$

Звідси

$$m - \sum_{i=1}^{k} n_i x_i = cb \in N, \quad b \sum_{i=1}^{k} r_i x_i \in N,$$

тобто

$$m = \sum_{i=1}^{k} n_i x_i + \sum_{i=1}^{k} s_i b y_i,$$

звідки

$$N \subset \sum_{i=1}^{k} n_i R + \sum_{i=1}^{k} s_i bR.$$

Тому що $s_j \in J$, $j = 1, 2, \ldots, t$, то

$$\sum_{i=1}^{k} n_i R + \sum_{i=1}^{k} s_i bR = N$$

— скінченнопороджений правий ідеал. Одержана суперечність з вибором N доводить теорему.

Аналогічними міркуваннями одержуємо наступний результат.

Теорема 6. *Якщо в кільці кожний майже простий ідеал є скінченнопородженим правим ідеалом, то довільний ідеал кільця є скінченнопородженим правим ідеалом.*

Як наслідок маємо наступні результати.

Теорема 7. *Кільце скінченнопороджених головних правих ідеалів є кільцем, в якому довільний ідеал є головним правим ідеалом тоді і тільки тоді, коли довільний майже простий ідеал є головним правим ідеалом.*

Теорема 8. *Кільце скінченнопороджених головних правих ідеалів є кільцем головних правих ідеалів тоді і тільки тоді, коли довільний майже простий ідеал є головним правим ідеалом.*

1. *Cohen J. S.* Commutative rings with restricted minimum conditions // Duke Math. J. – 1950. – **17**. – P. 24–42.
2. *Chandran R.* On two analogues of Cohen's theorem // Indiana J. Par. and Appl. Math. – 1977. – **8**, № 1. – P. 54–59.
3. *Дубровин М. И.* О кольцах главных правых идеалов // Изв. вузов. Математика – 1981. – № 2. – С. 30–37.
4. *Michler G.* Prime right ideals and right Noetherian rings // Proced. of Conf. Ring Theory. – New York–London: Acad. Press, 1972. – P. 251–253.
5. *Забавский Б. В.* О максимальных элементах множества неглавных идеалов коммутативной области Безу // 17-я Всесоюз. алгебраич. конф. Ч. 2. – Минск, 1983. – С. 75.
6. *Забавский Б. В.* Об одном обобщении теоремы Коэна // 19-я Всесоюз. алгебраич. конф. Ч. 1. – Львов, 1987. – С. 99.
7. *Забавский Б. В.* О теореме Коэна для некоммутативных колец // II мат. конф. молодых ученых Ин-та прикл. пробл. механики и математики АН УССР. – 1985. – Ч. 1. – С. 64–65.
8. *Van der Walt A. P.* Weakly prime onesided ideals // J. Austral. Math. Soc. – 1985. – **38**. – P. 84–91.

Одержано 20.03.95