УДК 512.542

В. І. Коваленко (Укр. пед. ун-т, Київ)

БУДОВА СКІНЧЕННИХ НЕДИСПЕРСИВНИХ ГРУП, В ЯКИХ КОЖНА НЕМЕТАЦИКЛІЧНА ПІДГРУПА НОРМАЛЬНА

We determine the structure of finite minimal nondispersible groups each nonmetacyclic subgroup of which is normal (Theorem 2) and describe all finite nondispersible groups each nonmetacyclic subgroup of which is normal (Theorem 3).

Встановлено будову скінченних мінімальних недисперсивних груп, в яких кожна неметациклічна підгрупа є нормальною (теорема 2). Описані всі скінченні недисперсивні групи, в яких кожна неметациклічна підгрупа є нормальною (теорема 3).

Вивчення будови груп з тими чи іншими системами нормальних підгруп започатковано роботою Р. Дедекінда [1], в якій встановлено будову всіх скінченних груп, кожна підгрупа яких є нормальною. Пізніше такі групи стали називати дедекіндовими. Неабелеві групи такого роду називають гамільтоновими.

Зрозуміло, що підкоряючи умові нормальності не всі підгрупи, тобто звужуючи систему нормальних підгруп, можна одержати різні узагальнення дедекіндових груп. Зрозуміло також, що при такому підході нові класи груп будуть містити в собі клас дедекіндових груп. Серед різних узагальнень дедекіндових груп назвемо такі класи: групи з умовою транзитивності для всіх підгруп (T-групи) [2]; групи з нормальними неабелевими підгрупами (метагамільтонові групи) [3]; групи з нормальними нескінченними підгрупами (INH-групи) [4]; групи з нормальними підгрупами, що не належать деякій власній підгрупі всієї групи ($H(S)$-групи) [5], та ін.

На одному з засідань алгебраїчного семінару в Українському педагогічному університеті М. Ф. Кузенний і С. С. Левіщенко запропонували встановити конструктивний опис груп, в яких кожна неметациклічна підгрупа є нормальною. В подальшому такі групи будемо називати $H(\overline{MC})$-групами. В цій роботі встановлюється будова таких скінченних мінімальних недисперсивних груп (теорема 2). З її використанням описані всі скінченні недисперсивні $H(\overline{MC})$-групи (теорема 3). В теоремі 1 доведено, що довільна скінченна група з нормальними неметациклічними підгрупами є розв'язною і ступінь її розв'язності не перевищує числа 4.

Означення. *Групу, в якій кожна неметациклічна підгрупа нормальна, назвемо $H(\overline{MC})$-групою (нормальна (H), будь-яка неметациклічна $(\overline{MC})$).*

Зрозуміло, що всі метациклічні групи і всі мінімальні неметациклічні групи є $H(\overline{MC})$-групами. Опис мінімальних неметациклічних груп наведено в роботі [6].

Лема 1. *Клас $H(\overline{MC})$-груп замкнений за підгрупами та фактор-групами і не замкнений за прямими добутками.*

Доведення очевидне.

Лема 2. *Нехай $\mathfrak{G}$ — $H(\overline{MC})$-група. Тоді справедливі такі твердження:*

1) *будь-яка неметациклічна підгрупа H із $\mathfrak{G}$ нормальна в $\mathfrak{G}$ і $\mathfrak{G}/H$ — дедекіндова група;*

2) *підгрупа M із $\mathfrak{G}$, що є перетином всіх неметациклічних підгруп із $\mathfrak{G}$, нормальна в $\mathfrak{G}$, і всі власні підгрупи з M метациклічні; якщо $\mathfrak{G}$ — метациклічна, то $M = 1$.*

Доведення. Нехай $\mathfrak{G}$ задовольняє умови леми, X — довільна неметациклічна підгрупа з $\mathfrak{G}$. За означенням $H(\overline{MC})$-групи $X \lhd \mathfrak{G}$. Нехай Z/H — довільна підгрупа з $\mathfrak{G}/H$. Тоді Z — неметациклічна підгрупа і $Z \lhd \mathfrak{G}$, а $Z/H \lhd \mathfrak{G}/H$. Отже, $\mathfrak{G}/H$ — дедекіндова група і перше твердження леми доведено.

Нехай X_α — система всіх неметациклічних підгруп із $\mathfrak{S}$, α — деяка множина індексів. Нехай $M = \bigcap_\alpha X_\alpha$. За означенням $H(\overline{MC})$-групи $X_\alpha \lhd \mathfrak{S}$, тому $M \lhd \mathfrak{S}$. Оскільки M належить кожній підгрупі X_α, то M не може містити власних неметациклічних підгруп, а тому всі власні підгрупи з M — метациклічні. Якщо $\mathfrak{S}$ — метациклічна, то, не порушуючи загальності, можна вважати, що $M = 1$. Лему доведено.

Лема 3. *Скінченна група $\mathfrak{S}$, в якої всі власні підгрупи метациклічні, має абелевий комутант.*

Доведення. Твердження леми випливає з результатів роботи [6].

Теорема 1. *Довільна скінченна $H(\overline{MC})$-група $\mathfrak{S}$ є розв'язною і ступінь її розв'язності не перевищує числа 4.*

Доведення. Нехай $\mathfrak{S}$ — досліджувана група. Якщо довільна власна підгрупа з $\mathfrak{S}$ метациклічна, то за лемою 3 теорема справедлива.

Нехай $\mathfrak{S}$ містить власні неметациклічні підгрупи і H_α — система всіх таких підгруп із $\mathfrak{S}$, α — деяка множина індексів, $M = \bigcap_\alpha H_\alpha$, $M \lhd \mathfrak{S}$ за лемою 2, і всі власні підгрупи з M — метациклічні; $H_\alpha \lhd \mathfrak{S}$ і $\mathfrak{S} / H_\alpha$ — дедекіндова група.

Нехай G^* — декартовий добуток всіх фактор-груп $\mathfrak{S}/X_\alpha$ групи $\mathfrak{S}$ за її нормальними підгрупами H_α. Оскільки $\mathfrak{S} / H_\alpha$ — дедекіндова група, то її комутант має порядок 1 (для абелевої групи) або 2 (для гамільтонової). За вибором G^* її комутант є елементарною абелевою 2-групою. За теоремою Ремака $\mathfrak{S} / M$ — група, ізоморфна деякій підгрупі з G^*, тому $(\mathfrak{S} / M)'$ — елементарна абелева 2-група. Покладемо $\mathfrak{S}' = M_1$, $M_2 = M \bigcap M_1$. Тоді $M_1 \lhd \lhd \mathfrak{S}$, $M_2 \lhd \mathfrak{S}$. А оскільки $(\mathfrak{S} / M)'$ — абелева група, то $\mathfrak{S}'' < M$ і $\mathfrak{S}'' < M_2$. Звідси $\mathfrak{S}''' < M_2' < M'$. За лемою 3 M' — абелева група, тому $\mathfrak{S}'''$ — абелева група і ступінь розв'язності групи $\mathfrak{S}$ не перевищує числа 4. Теорема доведена.

Теорема 2. *Скінченні мінімальні недисперсивні $H(\overline{MC})$-групи мають вигляд $\mathfrak{S} = A \cdot \mathcal{D}$, $\mathcal{D} = Q \leftthreetimes \langle b \rangle$, $|Q| = 3$, $|b| \in \{2, 4\}$; A — елементарна абелева група порядку 4, або група кватерніонів; $A \leftthreetimes Q$, $\mathcal{D}$ — групи Шмідта; $A \cdot \langle b \rangle$ — метациклічна неабелева силовська 2-підгрупа з $\mathfrak{S}$ порядку 8 або 16 і вичерпуються групами одного з наступних типів:*

1) $\mathfrak{S} = A \leftthreetimes \mathcal{D}$, $A \leftthreetimes \langle b \rangle$ — група діедра порядку 8 (у цьому випадку $\mathfrak{S} \cong S_4$);

2) $\mathfrak{S} = A \leftthreetimes Q$, A — група кватерніонів, $|b| = 2$, $A \leftthreetimes \langle b \rangle$ — квазідіедральна група порядку 16;

3) $\mathfrak{S} = A \cdot \mathcal{D}$, $A \bigcap \mathcal{D} = A \bigcap \langle b \rangle = \Phi(A) = \langle b \rangle^2$, A — група кватерніонів, $A \cdot \langle b \rangle$ — узагальнена група кватерніонів.

Доведення. *Необхідність.* Нехай $\mathfrak{S}$ задовольняє умови теореми, тоді за теоремою 1 $\mathfrak{S}$ — розв'язна група. Припустимо, що $\mathfrak{S}'$ не містить жодної силовської підгрупи з $\mathfrak{S}$. Такі мінімальні недисперсивні групи в роботі [7] названі елементарними мінімальними недисперсивними групами і там же встановлено, що $\mathfrak{S}$ містить неметациклічну нормальну підгрупу Шмідта S, причому $\mathfrak{S} / S$ — ненільпотентна група. В той же час за лемою 2 $\mathfrak{S} / S$ — дедекіндова, а тому нільпотентна група. Ця суперечність показує, що $\mathfrak{S}'$ містить хоча б одну силовську підгрупу з $\mathfrak{S}$. Такі групи в роботі [7] названі особливими мінімальними недисперсивними групами, там же встановлено, що $\mathfrak{S} = A \cdot \mathcal{D} = P \cdot Q$, $\mathcal{D} = Q \leftthreetimes \langle b \rangle$, P і Q — силовські p- і q-підгрупи групи $\mathfrak{S}$ відповідно, де p і q — різні прості числа, $P' \neq 1$, $P \ntriangleleft Q$, $Q \ntriangleleft \mathfrak{S}$, $\Phi(A) \cdot \Phi(\langle b \rangle) \leq Z(\mathfrak{S})$,

$\exp\Phi(A)\leq \exp A/\Phi(A)=P$, $A/\Phi(A)$ — мінімальна нормальна підгрупа з $\mathfrak{S}/\Phi(A)$, $C_{\mathcal{D}}(A)\leq\Phi(A)\times\Phi(\langle b\rangle)$ і $\mathcal{D}/\Phi(Q)$ — група Міллера–Морено, $\mathcal{D}\ntriangleleft\mathfrak{S}$.

Оскільки $P, Q, \mathcal{D}$ — ненормальні в $\mathfrak{S}$, то вони метациклічні. Метациклічною буде також ненільпотентна група Міллера–Морено $\mathcal{D}/\Phi(Q)$. За відомими результатами нормальна силовська підгрупа $Q/\Phi(Q)$ із $\mathcal{D}/\Phi(Q)$ є циклічною. Звідси Q — циклічна група, причому $q\equiv 1\ (\mathrm{mod}\, p)$ і тому $q>p$. Відомо (див., наприклад, [8]), що A — метациклічна група. Оскільки $C_Q(A)\leq\leq\Phi(Q)$, то $\mathfrak{S}$ містить ненільпотентну підгрупу $N=A\leftthreetimes Q$, яка в свою чергу містить підгрупу Шмідта $S=A_1\leftthreetimes Q_1$, де $A_1=A\cap S$ — нормальна в S силовська p-підгрупа. Зрозуміло, що A_1 — метациклічна група. За побудовою груп Шмідта (див., наприклад, [7]) із умови $p<q$ випливає, що 2 — показник числа p за модулем q; $p=2$, $q=3$ і A_1 — елементарна абелева група порядку 4 або група кватерніонів, $C_{Q_1}(A_1)=\Phi(Q_1)$, $\Phi(A_1)\leq Z(S)$ і S — неметациклічна група. За означенням $H(\overline{MC})$-груп $S\triangleleft\mathfrak{S}$ і за лемою 2 $\mathfrak{S}/S$ — дедекіндова група.

Оскільки A_1 — характеристична силовська p-підгрупа з S, то $A_1\triangleleft\mathfrak{S}$. Припустимо, що $A_1<A$. Тоді за відомими результатами [9] $\Phi(A)\cdot A_1=N_1$, $N_1<A$. Очевидно, що $N_1\triangleleft\mathfrak{S}$ і $N_1/\Phi(A)\triangleleft\mathfrak{S}/\Phi(A)$, $N_1/\Phi(A)<A/\Phi(A)$, що суперечить мінімальності $A/\Phi(A)$ в $\mathfrak{S}/\Phi(A)$. Звідси маємо, що $A_1=A$. Відомо (див. [8]), що $C_G(A)=C\triangleleft\mathfrak{S}$ і $\mathfrak{S}/C$ — ізоморфна підгрупі з $\operatorname{Aut}A$, а група автоморфізмів групи кватерніонів чи елементарної абелевої групи порядку 4 має силовську 3-підгрупу порядку 3. Звідси випливає, що силовська 3-підгрупа з $\mathfrak{S}/C$ теж має порядок 3. Це можливо, коли $C\cap Q=\Phi(Q)\leq Z(S)$. З цього випливає, що $N=S$. Зрозуміло, що $A\cdot\Phi(\langle b\rangle)=N_2$ — метациклічна група; метациклічною буде і $N_2/\Phi(A)=A/\Phi(A)\times(\Phi(A)\cdot\Phi(\langle b\rangle)/\Phi(A)$. Оскільки $A/\Phi(A)$ — елементарна абелева група порядку 4, то $|(\Phi(A)\cdot\cdot\Phi(\langle b\rangle)/\Phi(A)|=1$. Звідси $\Phi(\langle b\rangle)\leq\Phi(A)$ і $|b|\in\{2,4\}$.

Розглянемо такі можливі випадки: 1) $\Phi(A)=1$; 2) $\Phi(A)\neq 1$.

Випадок 1. У цьому випадку A — елементарна абелева група порядку 4, $\Phi(\langle b\rangle)=1$, $|b|=2$. З цього випливає, що $\mathfrak{S}=A\leftthreetimes\mathcal{D}$, $P=A\leftthreetimes\langle b\rangle$ — група діедра порядку 8. Покажемо, що $\Phi(Q)=1$. Дійсно, нехай це не так. Тоді в $\mathfrak{S}$ існує підгрупа $M=\Phi(\mathfrak{S})\leftthreetimes P$. Припустимо, що $M\triangleleft\mathfrak{S}$, тоді за лемою Фраттіні [9] $\mathfrak{S}=M\cdot B$, де $B=N_G(P)$ і $B=P\leftthreetimes Q_2$, Q_2 — силовська q-підгрупа з B. Відомо, що $\Phi(Q)\cdot Q_2$ — силовська q-підгрупа з $\mathfrak{S}$ [8]. Оскільки $\Phi(Q)\triangleleft\mathfrak{S}$, то $\Phi(Q)$ належить будь-якій силовській q-підгрупі з $\mathfrak{S}$, яка є циклічною групою. Оскільки силовські q-підгрупи з $\mathfrak{S}$ ненормальні в $\mathfrak{S}$ і очевидно Q_2 — циклічна група, то $\Phi(Q)<\Phi(Q)\cdot Q_2$. Це можливо, коли Q_2 — силовська q-підгрупа з $\mathfrak{S}$; $B=\mathfrak{S}$. Оскільки $B=N_G(P)$, то це суперечить ненормальності P в $\mathfrak{S}$. Звідси випливає, що $M\ntriangleleft\mathfrak{S}$ і за означенням M — метациклічна група. З цього випливає, що P містить такий елемент a, що $\langle a\rangle\triangleleft M$, $\langle a\rangle\times\times\Phi(Q)=\langle z\rangle\triangleleft M$, а $M/\langle z\rangle$ — циклічна група. В групі діедра P, $|P|=8$, це можливо лише коли $|a|=4$, $a\notin A$. Звідси $P=A\cdot\langle a\rangle$ і $[P,\Phi(Q)]=1$. Оскільки $b\in P$, $\mathcal{D}$ — ненільпотентна група, то $[\Phi(Q),\langle b\rangle]=\Phi(Q)$ і $[\Phi(Q),\langle b\rangle]\neq 1$, а тому $[P,\Phi(Q)]\neq 1$. Ця суперечність показує, що $\Phi(Q)=1$, $|Q|==3$, $\mathfrak{S}\cong S_4$ і $\mathfrak{S}$ є групою типу 1 теореми. Випадок 1 розглянуто повністю.

Випадок 2. У цьому випадку A — група кватерніонів, $|\Phi(A)|=2$, $\mathfrak{S}/\Phi(A)$ — група, що задовольняє умову випадку 1, за яким $\mathfrak{S}/\Phi(A)\cong S_4$. Звідси $|Q|==3$, $P/\Phi(A)$ — група діедра порядку 8.

Тепер при $|b|=2$ $\mathfrak{S}=A\leftthreetimes\mathcal{D}$, $P=A\leftthreetimes\langle b\rangle$. Оскільки P — метациклічна група, то вона містить нормальну підгрупу $\langle a\rangle$ таку, що $P/\langle a\rangle$ — циклічна група і $\Phi(Q)\leq\langle a\rangle$. При $|a|=4$ $P/\langle a\rangle$ — нециклічна група, отже, $|a|=8$. За результатами [9] P — квазідіедральна група порядку 16, а $\mathfrak{S}$ — група типу 2 теореми.

Нехай $|b|>2$. Тоді $\Phi(\langle b\rangle)=\Phi(A)$ і $|b|=4$, $A\bigcap D=\Phi(A)$. Оскільки $P=A\cdot\langle b\rangle$ — метациклічна група, то, як і раніше, вона містить нормальну підгрупу $\langle a\rangle$, де $|a|=8$. Згідно з результатами [9] P — узагальнена група кватерніонів порядку 16 і $\mathfrak{S}$ — група типу 3 теореми. Необхідність доведена.

Достатність. Нехай $\mathfrak{S}=A\cdot\mathcal{D}$ — група одного із типів $1-3$ теореми. За результатами [7] $\mathfrak{S}$ — скінченна біпримарна мінімальна недисперсивна група. Для доведення достатності залишилось показати, що $\mathfrak{S}$ є $H(\overline{MC})$-групою, тобто що будь-яка неметациклічна підгрупа U з $\mathfrak{S}$ нормальна в $\mathfrak{S}$. Доведемо навіть, що $\mathfrak{S}'<U$. Дійсно, якщо $U=\mathfrak{S}$, то це очевидно. Нехай $U<\mathfrak{S}$. Очевидно, що силовські підгрупи з $\mathfrak{S}$ — метациклічні. Відомо [9], що прямий добуток метациклічних силовських підгруп є метациклічною групою. Оскільки U — неметациклічна група, то вона ненільпотентна. З цього випливає, що U — непримарна група, а тому $|U|=0\ (\mathrm{mod}\,3)$. Оскільки силовські 3-підгрупи з $\mathfrak{S}$ мають порядок 3, то одна з них належить U. Не порушуючи загальності, можемо вважати, що $Q<U$. Зрозуміло, що $U=Q\cdot P^*$, де $P^*=U\bigcap P$. Якщо $A<U$, то $\mathfrak{S}'=A\leftthreetimes Q\leq U\lhd\mathfrak{S}$ і в цьому випадку достатність доведена.

Покажемо, що завжди $A<U$. Дійсно, нехай це не так. Покладемо $U\bigcap A=A\bigcap P^*=C$, тоді $C\lhd U$ і $C<A$. Зрозуміло, що C — циклічна група. Циклічною буде і підгрупа $C\times Q=\langle z\rangle\lhd U$. Оскільки $|P/A|=2$, то $|P^*/C|\leq 2$ за теоремою про ізоморфізми. Звідси $|U/\langle z\rangle|\leq 2$ і U — метациклічна група, що суперечить її вибору. Це і показує, що $A<U$, а $\mathfrak{S}'<U$. Достатність доведена. Теорема доведена.

***Наслідок* 1.** *Комутант* $\mathfrak{S}'$ *скінченної мінімальної недисперсивної* $H(\overline{MC})$*-групи* $\mathfrak{S}$ *належить будь-якій неметациклічній підгрупі з* $\mathfrak{S}$.

Доведення. Наслідок встановлено при доведенні достатності теореми 2.

Теорема 3. *Скінченні недисперсивні* $H(\overline{MC})$*-групи вичерпуються групами типу* $\mathfrak{S}=B\times M$, *де* B *— центральна в* $\mathfrak{S}$ *скінченна метациклічна холлівська підгрупа,* M *— скінченна мінімальна недисперсивна* $H(\overline{MC})$*-група, тобто група одного з типів* $1-3$ *теореми* 2.

Доведення. *Необхідність*. Нехай $\mathfrak{S}$ — досліджувана група. За теоремою 1 $\mathfrak{S}$ — розв'язна група, а тому за відомими результатами [9] $\mathfrak{S}=B\cdot M$, де $M=T\cdot\mathcal{D}$, T — силовська 3-підгрупа з $\mathfrak{S}$, $\mathcal{D}$ — силовська 2-підгрупа з $\mathfrak{S}$, B — холлівська підгрупа з $\mathfrak{S}$. Оскільки $\mathfrak{S}$ — недисперсивна група, то $\mathfrak{S}$ містить мінімальну недисперсивну підгрупу U. За лемою 1 U задовольняє умову теореми 2, за твердженням якої $U=N\cdot\langle b\rangle$, $N=A\leftthreetimes\langle a\rangle$ — неметациклічна група Шмідта і U — група одного з типів $1-3$ теореми 2, U — біпримарна, $|U|\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,6)$.

З розв'язності $\mathfrak{S}$ без порушення загальності можна вважати, що $U\leq M$. За лемою 2 $N\lhd\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}/N$ — дедекіндова група, звідси $M\lhd\mathfrak{S}$, $M_1=N\leftthreetimes B\lhd\lhd\mathfrak{S}$. Оскільки $N=A\leftthreetimes\langle a\rangle\lhd\mathfrak{S}$, A — силовська 2-підгрупа, $A\lhd N$, то $A\lhd\lhd\mathfrak{S}$ і B індукує на групу $\mathrm{Aut}A$, що не містить ні елементів порядку 2, ні елементів порядку 3. За теоремою 2 A — елементарна абелева група порядку 4 чи група кватерніонів. Відомо (див., наприклад, [8]), що $\mathrm{Aut}A$ — біпримарна група, порядок якої ділиться на 6, тому $[B,A]=1$. Нехай $N_1=C_{M_1}(A)$, тоді $N_1\lhd\mathfrak{S}$, $N_1=B\times A$, звідси $B\lhd\mathfrak{S}$ і $\mathfrak{S}=B\times M$, де B — скінченна абелева холлівська підгрупа з $\mathfrak{S}$. Якщо припустити, що B — неметациклічна група, то за лемою 2 $\mathfrak{S}/B \cong M$ — дедекіндова група, що суперечить недисперсивності M. За лемою Фраттіні [9] $M = N \cdot F = A \cdot F$, де $F = N_M(\langle a \rangle) = T \cdot K$, T — силовська 3-підгрупа з $\mathfrak{S}$, K — силовська 2-підгрупа з F; $N \cap F = F_1$, і $F_1 = \Phi(A) \times \langle a \rangle$, $\Phi(A) \leq Z(\mathfrak{S})$, $\langle a \rangle \leq T$. За лемою 2 $F/F_1 \cong M/N$ — дедекіндова група. Оскільки $\Phi(A) \leq Z(\mathfrak{S})$, $\langle a \rangle \lhd F$, то $F/\langle a \rangle$ — нільпотентна група, а тому $T \lhd F$. Зрозуміло, що $K \cap A = \Phi(A)$ і $\mathcal{D} = A \cdot K \ntriangleleft M$, $T \ntriangleleft M$. За означенням T і M — метациклічні групи, метациклічною буде і $\mathcal{D}/\Phi(A)$.

Нехай $Z/\Phi(A)$ — централізатор в $\mathcal{D}/\Phi(A) = A/\Phi(A) \leftthreetimes K/\Phi(A)$ підгрупи $A/\Phi(A)$. За теоремою 2 $A/\Phi(A)$ — елементарна абелева група порядку 4, $A/\Phi(A) \lhd M/\Phi(A)$. Звідси $A \leq Z \lhd \mathcal{D}$, $|Z : \mathcal{D}| \leq 2$. Нехай $Z_1 = Z \cap K$, тоді $Z/\Phi(A) = A/\Phi(A) \times Z_1/\Phi(A)$ — метациклічна група. Оскільки $A/\Phi(A)$ — нециклічна група, то $|Z_1/\Phi(A)| = 1$, а тому $|A : \mathcal{D}| = 2$ і $K = \Phi(A) \cdot \langle b \rangle$, $|b| \in \{2, 4\}$, $b^2 \leq \Phi(A)$ і $\mathcal{D} = A \cdot \langle b \rangle$. Зрозуміло, що $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] = \langle a \rangle$ і $\langle a \rangle = [\langle a \rangle, F]$ — нільпотентний корадикал із F. За результатами [10] маємо $F = \langle a \rangle \leftthreetimes (T_1 \times K)$, де T_1 — силовська 3-підгрупа з $T_1 \times K$. Зрозуміло, що $F \ntriangleleft \mathfrak{S}$, тому F — метациклічна група, що має циклічний комутант, $T_1 = \langle c_2 \rangle$ і $T = \langle a \rangle \times \langle c_2 \rangle$. Оскільки $\operatorname{Aut} A$ не містить елементів порядку 6, а $[A, \langle b \rangle] \neq 1$, то всі три елементи з $T_1 \times K$ належать $C_G(A)$. З цього випливає, що $c_3 \in Z(\mathfrak{S})$. Припустимо, що $c_3 \neq 1$ і покладемо $c_1 = a \cdot c_3$. Тоді в $\mathfrak{S}$ існує неметациклічна підгрупа $N_1 = A \leftthreetimes \langle c_1 \rangle$, для якої за лемою 2 $N_1 \lhd \mathfrak{S}$, $\langle c_1 \rangle \lhd F$, $\langle a \rangle \cap \langle c_1 \rangle = 1$. Зрозуміло, що $[c_1, b] = [a \cdot c_3, b] = [a, b]$, значить, $[\langle c_1 \rangle, \langle b \rangle] \leq \langle a \rangle \cap \langle c_1 \rangle = 1$, що неможливо. Отже, $c_3 = 1$, $T = \langle a \rangle$, $U = M$ і M — група одного з типів 1–3 теореми 2. Необхідність доведена.

Достатність. Нехай $\mathfrak{S} = B \times M$ — група, що задовольняє умови теореми. Зрозуміло, що $\mathfrak{S}$ — скінченна недисперсивна група. Покажемо, що $\mathfrak{S}$ — $H(\overline{MC})$-група, і навіть більше, що будь-яка неметациклічна підгрупа U з $\mathfrak{S}$ містить $\mathfrak{S}'$.

Оскільки B — центральна метациклічна холлівська підгрупа з $\mathfrak{S}$, то $U = B_1 \times M_1$, де $B_1 = U \cap B$, $M_1 = U \cap M$. З неметациклічності U випливає, що M_1 — неметациклічна група. За твердженням теореми M — скінченна мінімальна недисперсивна $H(\overline{MC})$-група, що задовольняє твердження теореми 2. За наслідком 1 $\mathfrak{S}' = M' \leq M_1$, звідси $\mathfrak{S}' \leq U$ і $\mathfrak{S}' \lhd \mathfrak{S}$. Достатність доведена. Теорема доведена.

Наслідок 2. *Комутант $\mathfrak{S}'$ скінченної недисперсивної $H(\overline{MC})$-групи $\mathfrak{S}$ належить будь-якій неметациклічній підгрупі з $\mathfrak{S}$.*

Доведення. Наслідок встановлено при доведенні достатності теореми 3.

1. *Dedekind R.* Über Gruppen, deren sammtliche Teiler Normalteiler sind // Math. Ann. – 1897. – **48**. – S. 548–561.
2. *Best E., Taussky O.* A class of groups // Proc. PJA. Sect. A. – 1942. – **47**. – P. 55–62.
3. *Ромалис Г. М.* О метагамильтоновых группах // Успехи мат. наук. – 1962. – **17**, № 6. – С. 228.
4. *Черников С. Н.* Бесконечные группы с некоторыми заданными свойствами систем их бесконечных подгрупп // Докл. АН СССР. – 1964. – **159**. – С. 759–760.
5. *Cappit D.* Generalized Dedekind groups // J. Algebra. – 1971. – **17**, № 3. – P. 310–316.
6. *Левищенко С. С., Кузенный Н. Ф., Семко М. М.* Конструктивное описание конечных минимальных неметациклических групп. – Киев, 1987. – 41 с. – Деп. в УкрНИИНТИ, № 33.
7. *Левищенко С. С., Кузенный Н. Ф.* Группы с условиями дисперсивности для подгрупп: Учеб. пос. – Киев: Киев. пед. ин-т, 1985. – 96 с.
8. *Huppert B.* Endliche Gruppen. – Berlin etc.: Springer, 1967.
9. *Холл М.* Теория групп. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 468 с.
10. *Зайцев Д. И.* О дополняемости подгрупп в экстремальных группах // Исследование групп по заданным свойствам подгрупп. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1974. – С. 72–130.

Одержано 04.07.95