УДК 517. 98

А. В. Загороднюк (Ін-т прикл. пробл. механіки і математики НАН України, Львів)

ПРО ДВА ТВЕРДЖЕННЯ „ШОТЛАНДСЬКОЇ КНИГИ", ЯКІ СТОСУЮТЬСЯ КІЛЬЦЯ ОБМЕЖЕНИХ ПОЛІНОМІАЛЬНИХ ФУНКЦІОНАЛІВ НА БАНАХОВИХ ПРОСТОРАХ

We prove an infinite-dimensional version of the Hilbert theorem about zeros (according to "The Scottish Book"). We study topological properties of the set of zeros of a continuous polynomial functional and establish necessary and sufficient conditions for this set to cut the space.

Дано доведення нескінченновимірного варіанту теореми Гільберта про нулі (згідно з "Шотландською книгою"). Вивчено топологічні властивості множини нулів неперервного поліноміального функціонала. Знайдено необхідні та достатні умови для того, щоб ця множина розрізала простір.

Нехай $Y = X \times \ldots X$ — k-й декартів степінь банахового простору X і $B_k\colon Y \to \mathbb{R}$ (або в $\mathbb{C}$) — полілінійний функціонал. Його звуження p_k на діагональ $\{(x_1, \ldots, x_k) \in Y\colon x_1 = \ldots = x_k\}$, яку природно ототожнюють з простором X, називається однорідним поліноміальним функціоналом степеня k (ми його називатимемо коротше k-мономом). Скінченну суму $p = \sum_0^n p_k$ k-мономів, $p_n \not\equiv 0$, природно називати поліноміальним функціоналом степеня n (коротше поліномом степеня n). Оскільки сума двох k-мономів буде знову k-мономом і k-мономи $(p_k)_0^n$ лінійно незалежні, то розклад полінома в суму мономів $\sum_0^n p_k$ однозначний. Основні результати теорії поліноміальних функціоналів можна знайти у роботах [1, 2]. Поліноміальний функціонал, заданий на скінченновимірному просторі X, можна трактувати як многочлен від кількох змінних. Очевидно, що поліноми на банаховому просторі утворюють кільце, а обмежені (тобто неперервні) поліноми — його підкільце. Кільце обмежених поліномів вивчалось дуже мало. Автору відома тільки одна робота [3] на цю тему, доведення результатів якої до того ж, правдоподібно, ніколи не публікувались [4, с. 516]. Зокрема, в [3] твердиться, що кожен поліном має розклад на незвідні співмножники. Причому з неперервності полінома випливає неперервність його співмножників. Для многочленів від кількох змінних цей результат добре відомий [5, с. 148 – 151]. З твердження 1.14 роботи [1] легко вивести, що коли поліном обмежений, то й кожен його незвідний співмножник теж обмежений.

У цій статті ми доведемо два результати про кільце обмежених поліномів, які інспіровані „Шотландською книгою" [6]. Легко перевірити, що для многочленів від скінченної кількості змінних алгоритм Евкліда несправедливий. Проте справедливе його узагальнення, яке називається теоремою Гільберта про нулі [7, с. 62; 5, с. 90]. Ми доведемо більш слабкий варіант цієї теореми для поліноміальних функціоналів.

Теорема 1. *Нехай p і q — поліноми на комплексному банаховому просторі без спільних коренів. Тоді існують такі поліноми u і v, що*

$$pu + qv \equiv 1, \tag{1}$$

причому з обмеженості p і q випливає обмеженість u і v.

Справедливість цього твердження була відома Мазурові й Орлічу [6] (проблема 27), але доведення ніколи не було опубліковане. Наступний висновок також сформульований в [6] (проблема 27).

Наслідок 1. *Нехай p і q — обмежені поліноми на комплексному банахо-*

вому просторі X *і існує така послідовність* $x_i \in X$, $\|x_i\| \leq 1$, *що* $p(x_i) \to 0$, $q(x_i) \to 0$ *при* $i \to 0$. *Тоді знайдеться елемент* $x \in X$, *для якого* $p(x) = q(x) = 0$.

Наслідок 2. *Нехай* p — *обмежений поліном на комплексному банаховому просторі* X, *а* (p) — *породжений ним ідеал у кільці обмежених поліномів на* X. *Тоді множина поліномів, які обертаються в нуль на ядрі* p, *збігається з радикалом ідеалу* (p), *тобто з множиною таких обмежених поліномів* q *на* X, *що* $q^n \in (p)$ *для деякого натурального* n.

Основним об'єктом алгебраїчної геометрії є топологічна структура ядра $\ker p = \{x : p(x) = 0\}$ многочлена від кількох змінних. Автору невідомі публікації про топологічну структуру ядра обмеженого полінома на дійсному банаховому просторі. Наступний результат стосується згаданої тематики. Будемо говорити, що множина M розрізає простір X, якщо доповнення $X \setminus M$ незв'язне.

Теорема 2. *Ядро обмеженого полінома* p, *заданого на дійсному банаховому просторі* X, *розрізає цей простір тоді і тільки тоді, коли існує незвідний співмножник* q *полінома* p *і елементи* x_0, y_0 *з* X, *для яких* $q(x_0) > 0$, *а* $q(y_0) < 0$.

Для многочленів від скінченної кількості змінних цей результат був відомий Ауербахові [6] (проблема 148) і можливо був опублікований. Для поліномів на банаховому просторі він, здається, новий.

1. Спільні корені. Наведемо спочатку кілька допоміжних тверджень. Нагадаємо, що елемент q кільця $\mathfrak{R}$ є дільником елемента p, якщо існує такий елемент s цього кільця, що $p = qs$. Елементи p і q називають взаємно простими, якщо вони не мають нетривіальних спільних дільників.

Лема 1. *Нехай* $P(t)$ *і* $Q(t)$ — *поліноми від числової змінної* t *над довільним цілісним (тобто комутативним і без дільників нуля) кільцем* $\mathfrak{R}$. *Тоді знайдуться ненульові поліноми* $U(t)$ *і* $V(t)$ *від змінної* t *над кільцем* $\mathfrak{R}$ *і елемент* $R \in \mathfrak{R}$ *такі, що для будь-якого числа* t

$$P(t)U(t) + Q(t)V(t) = R, \tag{2}$$

причому якщо $P(t)$ *і* $Q(t)$ — *взаємно прості, то* $R \neq 0$.

Доведення. Нехай для визначеності степінь $P(t)$ не менший від степеня $Q(t)$. Застосуємо алгоритм Евкліда [8, с. 138, 289] у полі відношень $\mathfrak{Q}$ кільця $\mathfrak{R}$:

$$P(t) = Q(t)S_1(t) + R_1(t), \quad Q(t) = R_1(t)S_2(t) + R_2(t), \tag{3}$$
$$R_1(t) = R_2(t)S_3(t) + R_3(t), \ldots, R_{k-2}(t) = R_{k-1}(t)S_k(t) + R_k(t).$$

Процес закінчиться співвідношенням

$$R_{k-1}(t) = R_k(t)S_{k+1}(t) + \hat{R}, \tag{4}$$

де $\hat{R} \in \mathfrak{Q}$ (тобто не залежить від t), причому якщо P і Q взаємно прості, то $\hat{R} \neq 0$. Використовуючи вирази (3), (4) у порядку зростання індексу k і помноживши отриманий вираз на спільний знаменник $A \in \mathfrak{R}$, одержимо (2), де $R = \hat{R}A \in \mathfrak{R}$, $U(t)$, $V(t)$ — поліноми від t з коефіцієнтами з $\mathfrak{R}$. Лему доведено.

Для полінома p на банаховому просторі X і елементів $x, y \in X$ покладемо $p_{xy}(t) = p(x + ty)$, $t \in \mathbb{R}$ (або $\mathbb{C}$).

Твердження 1 [9]. *Функціонал* p *на банаховому просторі* X *буде поліномом степеня* n *тоді і тільки тоді, коли для будь-яких елементів* $x, y \in X$ *знайдуться числа* $(a_k)_1^n$ *такі, що* $p_{xy}(t) = \sum_0^n a_k t^k$ *для довільного числа* t.

Нехай X — банахів простір, $y \in X \setminus \{0\}$ — фіксований елемент і Z — замкнене доповнення в X до лінійної оболонки $\operatorname{lin} y$. Легко бачити, що коли p — поліном на X, то $p(z+ty) = \sum_0^n p_k(z)t^k$ для довільного елемента $z \in Z$ і числа t, де при кожному k $p_k(z)$ є поліномом на Z. Таким чином, за поліномом (обмеженим поліномом) p на X ми можемо побудувати поліном $P(t) = \sum_0^n p_k(z)t^k$ від числової змінної t з коефіцієнтами, які належать кільцю $\mathfrak{R}$ поліномів (кільцю $\mathfrak{R}_b$ обмежених поліномів) на Z.

Лема 2. *Нехай X, y, Z — такі, як вказано вище, і $p_k(z)$, $k = 0, \ldots, n$ — поліноми (обмежені поліноми) на підпросторі Z. Тоді*

$$p(x) := p(z+ty) = \sum_{k=0}^{n} p_k(z)t^k$$

буде поліномом (обмеженим поліномом) на просторі X.

Доведення. Нехай x_1 і x_2 — довільні фіксовані елементи простору X, s — числова змінна. Тоді $x_1 = z_1 + t_1 y$, $x_2 = z_2 + t_2 y$ для деяких $z_1, z_2 \in Z$ і чисел t_1, t_2. Отже,

$$p(x_1 + sx_2) = p(z_1 + t_1 y + sz_2 + st_2 y) = p((z_1 + sz_2) + (t_1 + st_2)y) =$$
$$= \sum p_k(z_1 + sz_2)(t_1 + st_2)^k.$$

Для кожного фіксованого k $p_k(z_1 + sz_2)$ є поліномом від s. Тепер за твердженням 1 p буде поліномом на X.

Для доведення обмеженості полінома p за умови обмеженості поліномів $p_k(z)$ досить скористатись нерівністю трикутника. Лему доведено.

***Доведення теореми* 1.** Нехай, для визначеності, степінь n полінома p не менший від степеня m полінома q. Виберемо елемент y так, що $\deg p_{xy}(t) = n$ для будь-якого $x \in X$, побудуємо для лінійної оболонки y замкнене доповнення Z, а потім згідно з міркуваннями після твердження і поліноми $P(t)$ і $Q(t)$ над $\mathfrak{R}$. Застосувавши до них лему 1, дістанемо поліноми $U(t)$ і $V(t)$ та елемент $R \in \mathfrak{R}$, для яких виконується рівність (1). Покажемо, що $R = r(z)$ тотожно дорівнює деякому числу $c \neq 0$, де $r(z)$ — поліном на Z, що відповідає елементу R.

Оскільки довільний комплексний поліном, який тотожно не дорівнює ненульовій константі, має корінь, то супротивне означало б існування такого $z_0 \in Z$, що $r(z_0) = 0$. Оскільки у формулах (3), (4) алгоритму Евкліда коефіцієнти є відношеннями поліномів від $z \in Z$, то вони залишаються вірними при $z = z_0$. У цьому випадку у формулі (4) алгоритму Евкліда $R_{k-1}(t)$ ділиться на $R_k(t)$. Враховуючи (3), отримуємо, що $R_{k-2}(t)$ ділиться на $R_k(t), \ldots, R_1(t)$ ділиться на $R_k(t)$, тому $P(t)$ і $Q(t)$ діляться на $P_k(t)$. З вибору елемента y випливає, що $P_k(t) \neq \mathrm{const}$, інакше б поліном $P(t)$ мав степінь менший ніж n. Отже, $p(z_0 + + ty)$ і $q(z_0 + ty)$ мають спільний дільник, а тому і спільний корінь, тобто $p(z_0 + t_0 y) = q(z_0 + t_0 y) = 0$ для деякого числа t_0. За припущенням теореми це неможливо.

Таким чином, $R(z)$ — ненульове число; можна вважати, що воно дорівнює одиниці. Отже, для будь-якого елемента $z \in Z$ і довільного числа t

$$P(z+ty)\sum U_k(z)t^k + Q(z+ty)\sum V_k(z)t^k = 1.$$

За лемою 2

$$u(x) := U(z+ty) = \sum U_k(z)t^k$$

та

$$v(x) := V(z+ty) = \sum V_k(z)t^k$$

будуть поліномами на X і ми знайшли поліноми u і v, для яких справедлива рівність (1).

Пересвідчимось у тому, що для обмежених p і q побудовані поліноми u і v теж будуть обмеженими. Оскільки поліноми p і q обмежені, то й поліноми p_k, q_k, які фігурують у розкладах

$$p(z+ty) = \sum p_k(z)t^k, \quad q(z+ty) = \sum q_k(z)t^k,$$

будуть обмеженими на Z, отже, належатимуть кільцю $\mathcal{R}_b$. Тоді за лемою 2 коефіцієнти поліномів $U(t)$ і $V(t)$ належатимуть $\mathcal{R}_b$. З обмеженості поліномів $u_k(z)$ і $v_k(z)$ легко виводиться обмеженість $u(x)$ та $v(x)$. Теорему доведено.

***Доведення наслідку* 1.** Нехай немає такого елемента $x \in X$, що $p(x) = q(x) = 0$. Тоді за теоремою 1 існують такі поліноми u і v, що виконується (1). Але для виконання цієї тотожності необхідна необмеженість $\{u(x_i)\}$ або $\{v(x_i)\}$, отже, u або v — необмежений. Проте за теоремою 1 вони обмежені. Наслідок доведено.

***Зауваження* 1.** Для дійсних просторів наслідок 1 може не виконуватись. Справді, розглянемо на дійсному гільбертовому просторі l_2 функціонали

$$p(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 - 1 \quad \text{та} \quad q(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i a_i^2 - 1,$$

де $x = (a_1, \dots a_i, \dots) \in l_2$, $\lambda_i \downarrow 1$, $\lambda_i \neq 1$. Легко бачити, що для цих поліномів умова теореми 1 виконується, але вони не мають спільного кореня.

***Доведення наслідку* 2.** Нехай q — довільний неперервний поліном на X. Припустимо, що $q(x) = 0 \ \forall\, x \in \ker p$. Нехай y — додаткова незалежна змінна. Тоді поліноми p і $qy - 1$ не мають спільних нулів. Тому існують такі неперервні поліноми $u, v,$ що

$$pu + (qy - 1)v \equiv 1,$$

де u і v залежать від $x \in X$ та y. Оскільки це тотожність, то вона виконується при підстановці $y = q^{-1}(x)$, $x \neq \ker q$. Отже $u(x, q^{-1}(x))p = 1$. Звівши до спільного знаменника, отримаємо, що для деякого n $u'(x)q^{-n}p = 1$ або $u'(x)p = q^n$, де $u'(x) = u(x, q^{-1}(x))\,q^n$. Ці відношення виконуються для будь-якого $x \notin \ker q$, тому вони залишаться вірними і для $x \in \ker q$. Але це означає, що q^n ділиться на p, тобто $q^n \in (p)$. Наслідок доведено.

2. Розрізання. У цьому пункті розглядатимемо лише дійсні банахові простори. Нагадаємо, що поліном p називається незвідним, якщо він не має нетривіальних дільників.

Перед подальшим викладом наведемо деякі означення.

Означення 1. *Зсув замкненого підпростору корозмірності n банахового простору X на довільний вектор називають лінійним многовидом корозмірності n. Множина $M \subset X$ називається многовидом корозмірності n в точці $x \in M$, якщо існує відкритий окіл $U \subset M$, лінійний многовид $M \ni x$ корозмірності n і гомеоморфізм з U на деякий відкритий окіл точки x в многовиді N, для яких відстань між відповідними відносно цього гомеоморфізму точками буде величиною вищого порядку малості порівняно з їх відстанями до точки x.*

Далі нам буде потрібна наступна теорема.

Теорема Люстерника (про дотичний многовид [10, с. 489]; спрощена версія). *Нехай F — неперервне відображення з банахового простору X у n-вимірний евклідів простір Y, ядро якого має в точці $x_0 \in \ker F$ похідну Фреше $F'_{x_0} : X \to Y$, яка буде сюр'єктивним (лінійним) оператором. Тоді ядро F буде многовидом корозмірності n у точці x_0.*

Зауваження 2. Неважко перевірити, що неперервний поліном має похідну Фреше в кожній точці.

Означення 2. *Будемо говорити, що $x_0 \in \ker p$ — регулярна точка полінома p, якщо похідна Фреше в точці x_0 не буде нульовим (а отже, буде сюр'єктивним) оператором.*

Наслідок 3 (з теореми Люстерника). *Ядро полінома p буде многовидом корозмірності 1 у кожній регулярній точці.*

Зауваження 3. Нехай поліном p розкладається на незвідні співмножники $p = p_1^{k_1} \dots p_m^{k_m}$ і $q = p_1 \dots p_m$. Тоді $\ker p = \ker q$. Тому надалі вважатимемо, що незвідні співмножники входять у розклад p тільки у перших степенях (тобто $p = q$). Ця умова не обмежує загальності, проте спрощує викладки. Її можна уникнути, якщо означити регулярність у точці x_0 як існування дотичного многовиду H_0 до $\ker p$ в x_0 і показати, що коли перші k похідні Фреше дорівнюють нулеві у деякому околі регулярної точки x_0 і $p_{x_0}^{(k+1)} \not\equiv 0$, то $H_0 = \ker p_{x_0}^{(k+1)}$. Надалі під корозмірністю ядра деякого відображення будемо розуміти корозмірність у кожній регулярній точці.

Наступна лема у певному сенсі є аналогом відомого двовимірного випадку (див. [11, с. 6], теорема 1).

Лема 3. *Нехай p і q — обмежені поліноми на банаховому просторі X, причому p — незвідний і не ділить q. Тоді ядро відображення $F : X \to \mathbb{R}^2$, заданого формулою $F(x) = (p(x), q(x))$, має корозмірність більшу від одиниці.*

Доведення. Нехай n — степінь полінома p і елемент $y \in X$ такий, що у розкладі $p(y) = \sum_{k=0}^{n} p_k(y)$ на мономи найстарший член $p_n(y) \neq 0$. Нехай Z — замкнене доповнення до підпростору $\operatorname{lin} y \subset X$. Тоді

$$p(z+ty) = \sum_{0}^{n} p_k(z)t^k, \quad q(z+ty) = \sum_{0}^{m} q_k(z)t^k,$$

де для кожного k $p_k(z)$ і $q_k(z)$ — поліноми на Z. Таким чином, за поліномами p і q будуємо поліноми

$$P(t) = \sum_{0}^{n} p_k(z)t^k, \quad Q(t) = \sum_{0}^{m} q_k(z)t^k$$

від числової змінної t з коефіцієнтами, які належать кільцю $\mathcal{R}_b$ поліномів на Z.

Поліном P — незвідний у цьому кільці, інакше його можна було б розкласти на співмножники $P = \hat{P}' \hat{P}''$, де $\hat{P}'$ — незвідний. Помноживши останню рівність на спільні знаменники $D', D'' \in \mathcal{R}_b$ усіх коефіцієнтів поліномів $\hat{P}'$ і $\hat{P}''$ відповідно, дістанемо $DP = P' P''$, де $D = D' D''$, $P' = D' \hat{P}'$, $P'' = D'' \hat{P}''$, причому $P'(t) = \sum_k p'_k(z)t^k$ незвідний. Отже, відповідний поліном

$$p'(x) = p'_k(z+ty) = \sum_k p'_k(z)t^k$$

на просторі X незвідний. Крім того, поліном d на X, відповідний елементові $D \in \mathcal{R}_b$, не ділиться на p', бо d не залежить від y. Тому $p(x)$ ділиться на $p'(x)$, що суперечить незвідності p.

Аналогічно показується, що q не ділиться на p у цьому кільці. Отже, p і q — взаємно прості. Тому на підставі леми 1 звідси випливає існування поліномів $U(t), V(t)$ від змінної t з коефіцієнтами з $\mathcal{R}_b$ таких, що для будь-якого t

$$P(t)U(t) + Q(t)V(t) = R,$$

де R — ненульовий елемент кільця $\mathcal{R}_b$. Звідси видно, що коли

$$p(z+ty) = q(z+ty) = 0, \text{ то й } r(z) = 0, \tag{5}$$

де $r(z)$ — поліном на Z, що відповідає елементові $R \in \mathcal{R}_b$, y — такий елемент X, що степінь полінома $p(z+ty)$ по t дорівнює степеневі полінома $p(x)$. Тобто ядро полінома $r(z)$ містить проекцію на Z ядра оператора F вздовж вектора y.

Виведемо звідси, що $\operatorname{codim} \ker F > 1$. Звичайно, множина таких елементів y, що $p_n(y) \neq 0$, є відкритою. Тому в нас є певна ε-вільність вибору елемента y, і можна вважати, що y не належить дотичному многовидові H_0 до $\ker F$ в деякій точці $x_0 = z_0 + t_0 y$. Якщо припустити, що $\operatorname{codim} \ker F = 1$, то H_0 має корозмірність 1 і тому спроектується на весь підпростір Z. А це буде означати, що дотичний многовид до $\ker r(z)$ має корозмірність 0 у Z. Тобто $r(z) \not\equiv 0$ на Z. Тому

$$P(t)U(t) + Q(t)V(t) \equiv 0.$$

Згідно з формулами (3) і (4) це означає, що $P(t)$ і $Q(t)$ мають спільний дільник, що неможливо. Лему доведено.

Наслідок 4. *Нехай p — незвідний обмежений поліном на банаховому просторі X і y — такий елемент з X, що*

$$\frac{\partial p}{\partial y}(x) := \frac{d}{dt} p(x+ty) \not\equiv 0.$$

Тоді перетин $\ker p \bigcap \ker \partial p / \partial y$ має корозмірність більшу від одиниці.

Цей наслідок випливає з того, що поліном $p(x)$ не ділить $\partial p / \partial y$, і леми 3.

Наслідок 5. *Нехай x_0 — не ізольована точка ядра неперервного полінома p. Тоді множина його регулярних точок утворює щільну відкриту підмножину в деякому околі $x_0 \in \ker p$.*

Доведення. Припустимо, що у деякому околі U точки x_0 немає регулярних точок. Це означає, що для будь-якого $x \in \ker p \bigcap U$ похідна Фреше p в точці x дорівнює нулеві. Тому для будь-якого $y \in X$ $\partial p / \partial y$ має нуль в точці x. Тобто $\partial p / \partial y$ обертається в нуль на $\ker p \bigcap U$. Якщо y_0 — регулярна точка $\partial p / \partial y$, то $\ker p \bigcap \ker \partial p / \partial y$ є многовидом корозмірності 2 в y_0, тому $\ker p$ є многовидом корозмірності 2 в y_0, оскільки на U $\ker p = \ker p \bigcap \bigcap \ker \partial p / \partial y$. А це суперечить тому, що в околі U немає регулярних точок відображення p. Отже, відображення $\partial p / \partial y$ не має регулярних точок в $U \bigcap \ker p$. Продовжуючи ці міркування, одержуємо, що похідні полінома p будь-якого степеня в в довільному напрямку y обертаються в нуль на $\ker p \bigcap U$. А це можливо лише коли $p \equiv 0$. Наслідок доведено.

Лема 4. *Нехай ядро поліноміального відображення F з простору X в $\mathbb{R}^n$, $F = (p_1(x), \ldots p_n(x))$ розрізає простір X. Тоді його корозмірність не перевищує одиниці.*

Доведення. Припустимо супротивне. Оскільки $\ker F$ розрізає X, то можна знехтувати ізольованими точками як $\ker F$, так і $\ker p_i$, $i = 1, \ldots, n$. Нехай $x, y \in X$, $x, y \notin \ker F$, а $[x, y]$ — відрізок, що їх з'єднує. Тоді перетин $[x, y] \bigcap \ker F$ складається із скінченної кількості точок. Оскільки за наслідком 5 множина регулярних точок щільна в $\ker F = \bigcap \ker p_i$, то замість відрізка $[x, y]$ можна взяти ламану $\Delta(x, y)$, яка з'єднує x та y, має скінченну кількість точок $x_1, \ldots, x_m$ перетину з $\ker F$, які всі регулярні. Нехай H_k — дотичний многовид у точці x_k і U_k — такий окіл точки x_k, що $\ker p \bigcap U_k$ близька до H_k в сенсі означення 1. Нехай y_k^1 і y_k^2 належать U_k, причому x_k лежить між y_k^1 і y_k^2 на ламаній $\Delta(x, y)$. Тоді існує неперервна крива γ_k, яка з'єднує y_k^1 і y_k^2 і не перетинається з H_k, а отже, з $\ker F$. Нехай $\gamma(x, y)$ — крива, яка збігається з $\Delta(x, y)$ скрізь, крім $\Delta(x, y) \bigcap U_k$, і збігається з γ_k на U_k. Тоді $\gamma(x, y)$ — неперервна крива, яка з'єднує точки x, y і $\gamma(x, y) \bigcap \ker F = \emptyset$. А це суперечить розрізуваності $\ker P$. Лему доведено.

Наслідок 6. *Нехай p — незвідний поліном, тоді $\ker p \bigcap \ker \partial p / \partial y$ не розрізає простір X.*

Доведення. Припустимо, що $\ker p \bigcap \ker \partial p / \partial y$ розрізає X. Застосуємо лему 4 до відображення $F(x) = (p(x), \partial p(x) / \partial y)$. Тоді корозмірність $\ker F = \ker p \bigcap \ker \partial p / \partial y$ не перевищує одиниці. А це суперечить наслідку 4. Наслідок доведено.

Наслідок 7. *Якщо незвідний поліном p розрізає простір X, то він змінює знак, тобто існують такі елементи $x_0, y_0 \in X$, що $p(x_0) < 0$, а $p(y_0) > 0$.*

Доведення. Припустимо супротивне, що, наприклад, $p(x) \geq 0$ для будь-якого $x \in X$. Тоді для кожного $x \in \ker p$ і кожного $y \in X$ $\partial p(x) / \partial y = 0$, тобто $\ker \partial p / \partial y \supset \ker p$ для будь-якого $y \in X$. За наслідком 6 ядро p не розрізає простору X, що приводить до суперечності.

Нам буде потрібен ще один результат з алгебраїчної геометрії.

Лема 5. *Нехай $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — поліном степеня n і $M = \ker p$ має корозмірність* 1. *Тоді M розрізає площину $\mathbb{R}^2$.*

Доведення. Поставимо у відповідність поліномові p форму F, задану на проективному просторі $\mathbb{P}^2$. А саме, $F(\alpha, \beta, \gamma) = \gamma^n p(\alpha / \gamma, \beta / \gamma)$ і кривій M поставимо у відповідність проективну криву $N = \ker F(\alpha, \beta, \gamma)$, де α, β, γ — проективні координати. Причому на афінному підпросторі $\gamma \neq 0$ ці криві збігаються.

Тоді якщо p — незвідний поліном, то N — компактний одновимірний многовид (не обов'язково зв'язний) і, отже, гомеоморфний до об'єднання деякої кількості кіл, що не перетинаються [11, с. 173] (теорема 2). Якщо ж p — довільний поліном, то $N = \bigcup N_i$, де N_i — ядра незвідних співмножників у $\mathbb{P}^2$. Таким чином, лему доведено.

Лема 6. *Незвідний поліном, який має корозмірність* 1, *принаймні в одній точці $x_0 \in \ker p$ розрізає простір X.*

Доведення. Нехай x — деяка точка в X, $x \notin \ker p$ і $x \notin H_0$, де H_0 — дотичний простір до $\ker p$ у точці x_0, а y — точка з продовження цього відрізка така, що x_0 міститься між x та y і $[x_0, y] \bigcap \ker p = \{x_0\}$. Така точка існує, бо будь-який відрізок, який не лежить цілком в $\ker p$, може перетинатись з ним лише у скінченній кількості точок.

Припустимо, що існує неперервна крива $\gamma(t)$, що з'єднує x і y, тобто існує взаємно однозначне неперервне відображення $\gamma(t) \colon [0, 1] \to X$, для якого $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$. Крім того, припустимо, що $\gamma(t) \bigcap \ker p = \emptyset$. Внаслідок замкнености ядра p і компактності кривої $\gamma(t)$ криву $\gamma(t)$ можна вважати ламаною:

$$\gamma(t) = [x_1, y_1] \cup [y_1, y_2] \cup \ldots \cup [y_m, y],$$

більш того, вузли $y_1 \ldots y_m$ ламаної можна вибрати з деяких околів.

Відрізок $[y_1, y]$ перетинається з ядром p у деякій точці x_1. Справді, розглянемо площину Y_1, натягнену на вектори $y_1 - x$, $y - x$. Оскільки Y_1 не лежить у H_0, то Y_1 перетинає $\ker p$ по кривій розмірності 1. Тобто $p|_{Y_1}$ має ядро розмірності 1. Точки x і y лежать у різних компонентах зв'язності (за лемою 5). Точки x і y_1 лежать у одній компоненті зв'язності. Отже, точки y_1 і y лежать у різних компонентах зв'язності. Тому пряма, яка проходить через точки y, y_1, буде січною для $\ker(p|_{Y_1})$ (отже, не дотичною) і існує точка x_1 така, що $[y_1, y] \cap \ker p = \{x_1\}$. Крім того, користуючись вільністю вибору y_1 у деякому околі і щільністю множини регулярних точок p у ядрі p, можна вважати, що x_1 — регулярна точка.

Аналогічно можна показати, що відрізок $[y_2, y]$ перетинає $\ker p$ у деякій точці x_2. Продовжуючи ці міркування, дістанемо, що для будь-якого i відрізок $[y_i, y]$ перетинає $\ker p$. А це суперечить тому, що ламана $\gamma(t)$ має скінченне число ланок. Отже, $\ker p$ розрізає простір X. А за наслідком 7 звідси випливає, що p змінює знак. Лему доведено.

***Доведення теореми* 2.** *Достатність.* Нехай q — незвідний співмножник полінома p, для якого існують елементи $x_0, y_0 \in X$ з $q(x_0) > 0$, $q(y_0) < 0$. Тоді відкриті множини $\{x : q(x) < 0\}$ та $\{x : q(x) > 0\}$ непорожні й не перетинаються. Отже, $\ker q$ розрізає простір X. Оскільки $\ker p$ — замкнена й ніде не щільна множина, то $\{x : q(x) < 0\} \setminus \ker p$ і $\{x : q(X) > 0\} \setminus \ker p$ відкриті, непорожні, не перетинаються і в об'єднанні дають $X \setminus \ker p$.

Необхідність. У випадку незвідного полінома необхідність доведена у наслідку 7. Нехай тепер $p = \prod_{i=1}^m p_i$, p_i — незвідні поліноми і $\ker p$ розрізає простір X. За лемою 4 $\ker p$ має корозмірність 1, зокрема якщо x_0 — регулярна точка, то корозмірність $\ker p$ у x_0 дорівнює 1. Але з того, що x_0 — регулярна точка, випливає, що вона належить ядру лише одного з незвідних поліномів p_i (інакше $p'_{x_0} = 0$). Отже, ядро p_i має корозмірність 1 у точці x_0. Тоді за лемою 6 p_i розрізає X. А за наслідком 7 тоді p_i змінюватиме знак. Теорему доведено.

***Зауваження* 4.** Вимога неперервності полінома p у теоремі 2 істотна. Легко бачити, що ядро лінійного розривного функціоналу не розрізає банаховий простір.

1. *Dineen S.* Complex analysis in locally convex spaces. – Amsterdam etc.: North-Holland, 1981. – 492 p.
2. *Hille E., Phillips R. S.* Finctional analysis and semi–groups // AMS Colloq. Publ. – 1957. – **31**.
3. *Masur S., Orlicz W.* Sur la divisibilité des polynomes abstraits // C. r. Acad. sci. Paris. – 1936. – **202**. – P. 621–623.
4. *Köthe G.* Stanislaw Masur's contribution to functional analysis // Math. Ann. – 1987. – **227**. – P. 489–528.
5. *Ленг С.* Алгебра. – М.: Мир, 1968. – 564 с.
6. *The* Scottish book / Ed. by R. D. Mauldin. – Boston etc.: Birkhäuser, 1981. – 268 p.
7. *Рид М.* Алгебраическая геометрия для всех. – М.: Мир, 1991. – 150 с.
8. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1971. – 432 с.
9. *Mazur S., Orlicz W.* Grundlegende Eigenschaften der polynomischen Operationen I, II // Stud. math. – 1935. – **5**. – S. 50–68; 179–189.
10. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1981. – 542 с.
11. *Шафаревич И. Р.* Основы алгебраической геометрии. – М.: Наука, 1988. – Т. 1, 2.

Одержано 09.08.95