УДК 517.5

А. И. Степанец (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

АППРОКСИМАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА МЕТОДА ЗИГМУНДА

A review of the results on approximation properties of the Zygmund sums and their generalizations is given.

Наведено огляд результатів про апроксимаційні властивості сум Зигмунда та їх узагальнень.

Пусть $f(x)$ — 2π-периодическая суммируемая функция $(f \in L)$,

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \overset{\mathrm{df}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f; x) \tag{1}$$

— ее ряд Фурье, $a_k = a_k(f)$ и $b_k = b_k(f)$, $k = 0, 1, \ldots,$ — ее коэффициенты Фурье.

Пусть, далее, $\Lambda = \|\lambda_k^{(n)}\|$, $n = 0, 1, \ldots$, $k = 0, 1, \ldots, n$, — произвольная бесконечная треугольная матрица чисел, с помощью которой каждой функции $f \in L$ поставим в соответствие полином $U_n(f; x; \Lambda)$ вида

$$U_n(f; x; \Lambda) = \frac{a_0}{2} \lambda_0^{(n)} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(n)} A_k(f; x).$$

Таким образом, любая треугольная матрица Λ задает метод построения полиномов $U_n(f; x; \Lambda)$ или, другими словами, конкретную последовательность полиномиальных операторов $U_n(f; \Lambda)$, определенных на множестве L. В этом случае также говорят, что матрица Λ определяет конкретный метод (Λ-метод) суммирования рядов Фурье. Понятно, что операторы $U_n(f; \Lambda)$ являются линейными и поэтому Λ-методы называют линейными методами (процессами) суммирования рядов Фурье.

В настоящей работе рассматриваются линейные методы, порождаемые матрицами $\Lambda = \Lambda(s)$, элементы которых опеределяются равенствами

$$\lambda_k^{(n)} = 1 - (k/n)^s, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1, \quad s > 0.$$

Полиномы $U_n(f; x; \Lambda(s))$ в этом случае обозначаются через $Z_n^s(f; x)$ и имеют вид

$$Z_n^s(f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (1 - (k/n)^s) A_k(f; x).$$

Эти полиномы в общем случае впервые рассматривались Зигмундом [1] и поэтому называются суммами Зигмунда.

При $s = 1$ суммы $Z_n^s(f; x)$ совпадают с известными суммами Фейера [2]

$$Z_n^1(f; x) \overset{\mathrm{df}}{=} \sigma_n(f, x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k(f; x),$$

где $S_k(f; x)$ — сумма Фурье порядка k — частная сумма ряда (1); при $s = 2$ такие суммы были введены Риссом (см., например, [3]) и поэтому называются суммами Рисса,

$$Z_n^2(f; x) \overset{\mathrm{df}}{=} \mathcal{R}_n(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (1 - (k/n)^2) A_k(f; x). \tag{2}$$

Мы также будем рассматривать полиномы $U_n(f;x;\Lambda)$, определяющиеся матрицей Λ с элементами

$$\lambda_k^{(n)} = \begin{cases} 1, & k=0; \\ 1-\dfrac{\varphi(n)}{\varphi(k)}, & k=1,\ldots,n-1; \\ 0, & k\geq n, \end{cases} \tag{2'}$$

где $\varphi(k)$ — некоторая последовательность. В этом случае полиномы $U_n(f;x;\Lambda)$ будем обозначать через $Z_n^{\varphi}(f;x)$, так что

$$Z_n^{\varphi}(f;x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{\varphi(n)}{\varphi(k)}\right)A_k(f;x), \tag{2''}$$

и называть их обобщенными суммами Зигмунда, поскольку при $\varphi(t) = t^{-s}$, $t > 0$, $Z_n^{\varphi}(f;x) = Z_n^{s}(f;x)$.

Суммы Зигмунда отличаются простотой задания множителей $\lambda_k^{(n)}$ и хорошими аппроксимативными свойствами. Сочетание этих качеств, по-видимому, способствовало тому, что эти суммы и, в особенности, их частные случаи — суммы Фейера и Рисса — изучались в различных направлениях на протяжении многих десятилетий рядом крупнейших специалистов по теории функций, и к настоящему времени накоплен большой фактический материал, содержащийся в публикациях, часть из которых не всегда общедоступна. Одним из важнейших направлений при этом является исследование аппроксимативных свойств таких сумм на различных классах функций и в разных метриках.

Цель настоящей работы — попытка систематизации известных результатов, связанных с аппроксимативными свойствами сумм Зигмунда, а также изложение новых фактов, полученных для этих сумм и их обобщений. При этом нас интересуют, главным образом, асимптотические равенства для величин

$$\mathcal{E}(\mathfrak{N}; Z_n^{\varphi}(f;x)) = \sup_{f\in\mathfrak{N}} \|f - Z_n^{\varphi}(f)\|_X .$$

Мы говорим, что для данного метода $U_n(f;\Lambda)$ на классе $\mathfrak{M}$ в пространстве X решена задача Колмогорова–Никольского (задача К–Н), если в явном виде определена функция $\varphi(n) = \varphi(n,\Lambda;\mathfrak{M})$ такая, что при $n\to\infty$

$$\mathcal{E}(\mathfrak{M}; U_n(f;\Lambda)) = \sup_{f\in\mathfrak{M}} \|f(x) - U_n(f;x;\Lambda)\|_X = \varphi(n) + o(\varphi(n)).$$

1. Классы функций. Будем рассматривать следующие основные классы из множества C непрерывных 2π-периодических функций.

1. Пусть $\omega = \omega(t)$ — произвольный модуль непрерывности, т. е. непрерывная неубывающая и полуаддитивная при всех $t\geq 0$ функция и $\omega(0) = 0$. Тогда через H_ω обозначают подмножество функций $f\in C$, для которых выполняется условие

$$|f(x) - f(x')| \leq \omega(|x - x'|) \qquad \forall\, x,\ x'\in R^1.$$

Если $\omega(t) = Mt^{\alpha}$, $M = \mathrm{const}$, $M>0$, $0\leq\alpha\leq 1$, то класс H_ω обозначают через MH^{α}; если $M=1$, то $1H^{\alpha} \overset{\mathrm{df}}{=} H^{\alpha}$.

2. Множество функций $f\in C$, которые имеют абсолютно непрерывные

производные до $(r-1)$-го порядка включительно $(r \in N)$ и $\|f^{(r)}(\cdot)\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}|f^{(r)}(\cdot)| \le M$, обозначают через MW^r, $1W^r \overset{\text{df}}{=} W^r$, т. е.

$$MW^r = \{f \in C : \|f^{(r)}\|_\infty \le M\}.$$

3. Класс функций $f \in C$, у которых $f^{(r)} \in H_\omega$, обозначают через $W^r H_\omega$, т. е. $W^r H_\omega = \{f \in C : f^{(r)} \in H_\omega\}$. В случае, когда $\omega(t) = Mt^\alpha$, полагают $W^r H_\omega = MW^r H^\alpha$; если $r = 0$, то полагают $W^0 H_\omega = H_\omega$. Из этих определений, в частности, следуют равенства $MH^1 = MW^1$ и $MW^r = MW^{r-1}H^1$.

4. Множества функций $\tilde{f}(\cdot)$, тригонометрически сопряженных к функциям $f(\cdot)$ из классов $W^r H_\omega$, обозначают через $\widetilde{W^r H_\omega}$. В частности, $\tilde{H}_\omega$ — множество функций, сопряженных с функциями из класса H_ω.

5. Пусть $f \in L$ и (1) — ее ряд Фурье. Если при данных фиксированных $r > 0$ и $\beta \in R^1$ ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^r \left(a_k \cos\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right) + b_k \sin\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right)\right)$$

является рядом Фурье некоторой функции из L, то эту функцию называют (r, β)-производной функции $f(\cdot)$ в смысле Вейля – Надя и обозначают через $f_\beta^{(r)}(\cdot)$. Тогда определяют классы Вейля – Надя, полагая

$$MW_\beta^r = \{f \in L : \|f_\beta^{(r)}\| \le M\},$$

$$W_\beta^r H_\omega = \{f \in L : f_\beta^{(r)} \in H_\omega\}.$$

Если $\mathfrak{N}$ — некоторое подмножество функций из L, то полагают

$$W_\beta^r \mathfrak{N} = \{f \in L,\ f_\beta^{(r)} \in \mathfrak{N}\}.$$

В случае, когда $r \in N$ и $\beta = r + 2k$, $k \in Z$, классы Вейля – Надя MW_β^r и $W_\beta^r H_\omega$ совпадают с классами MW^r и $W^r H_\omega$; если $r \in N$, а $\beta = r + 1 + 2k$, то $MW_\beta^r = \widetilde{MW^r}$ и $W_\beta^r H_\omega = \tilde{W}^r H_\omega$.

6. Пусть $f \in L$ и (1) — ее ряд Фурье. Пусть, далее, $\psi(k)$ — произвольная функция натурального аргумента и $\beta \in R^1$. Предположим, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)} \left(a_k \cos\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right) + b_k \sin\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right)\right)$$

является рядом Фурье некоторой функции из L. Эту функцию обозначим через $f_\beta^\psi(\cdot)$ и назовем (ψ, β)-производной функции $f(\cdot)$, а множество функций $f(\cdot)$, удовлетворяющих такому условию, обозначим через L_β^ψ. Пусть еще $\mathfrak{N}$ — некоторое подмножество функций из L. Тогда если $f \in L_\beta^\psi$ и в то же время $f_\beta^\psi \in \mathfrak{N}$, то будем говорить, что $f(\cdot)$ принадлежит классу $L_\beta^\psi \mathfrak{N}$. Итак,

$$L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N} = \{f \in L^{\psi}_{\beta},\ f^{\psi}_{\beta} \in \mathfrak{N}\}.$$

Подмножества непрерывных функций $f(\cdot)$ из множеств L^{ψ}_{β} и $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ обозначаются через C^{ψ}_{β} и $C^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ соответственно.

Ясно, что понятие (ψ, β)-производной обобщает понятие производной в смысле Вейля – Надя и совпадает с последним при $\psi(k) = k^{-r}$. Поэтому

$$L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N} = W^{r}_{\beta}\mathfrak{N} \quad \text{при} \quad \psi(k) = k^{-r}.$$

Если $\mathfrak{N} = \{\varphi\colon \varphi \in L,\ \|\varphi\|_p \le 1\}$, где при $1 \le p < \infty$

$$\|\varphi\|_p = \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |\varphi(t)|^p\, dt\right)^{1/p},$$

а при $p = \infty$

$$\|\varphi\|_\infty \overset{\text{df}}{=} \|\varphi\|_M = \operatorname{ess\,sup} |\varphi(t)|,$$

то будем полагать $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N} = L^{\psi}_{\beta,p}$ и, в частности,

$$C^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N} = C^{\psi}_{\beta,p} \quad \text{и} \quad W^{r}_{r}\mathfrak{N} = W^{r}_{r,p}.$$

Понятие (ψ, β)-дифференцирования и классы $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ введены в [4].

2. Суммы Фейера: обзор известных результатов. Знаменитая теорема Фейера [2] гласит: для любой функции $f \in C$ равномерно по x

$$\lim_{n\to\infty} (f(x) - \sigma_n(f; x)) = 0.$$

Именно эта теорема принесла Л. Фейеру заслуженную известность, поскольку она вернула интерес к рядам Фурье, пошатнувшийся в свое время под воздействием исследований Дюбуа Реймонда [5], построившего пример непрерывной периодической функции, ряд Фурье которой расходится в отдельных точках.

Скорость сходимости последовательности $\sigma_n(f; x)$ впервые, по-видимому, исследовалась С. Н. Бернштейном [6], который показал, что для каждой $f \in H^{\alpha}$ при $\alpha \in [0, 1)$

$$|f(x) - \sigma_n(f; x)| < Cn^{-\alpha},$$

где C — абсолютная постоянная и,

$$|f(x) - \sigma_n(f; x)| \le C\frac{\ln n}{n},$$

если $\alpha = 1$.

Согласно теореме И. И. Привалова [7], если $f \in H^{\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, то и $\tilde{f} \in H^{\alpha}$. Поэтому в силу (20) для любой $f \in H^{\alpha}$ справедливо неравенство

$$|f(x) - \sigma_n(f; x)| \le Cn^{-\alpha},$$

если же $f \in \tilde{H}^1$, то, как показал Алексич [8],

$$|f(x) - \sigma_n(f; x)| \le Cn^{-1}. \tag{3}$$

В этой же работе Алексичем отмечено, что соотношение

$$\|f(x)-\sigma_n(f;x)\|_C = O(n^{-1})$$

возможно тогда и только тогда, когда $f \in \tilde{H}^1$.

Отсюда, в частности, следует, что суммы Фейера не могут доставлять приближение функциям, отличным от постоянных, по порядку лучшее, чем n^{-1}.

Отметим, что в своей монографии Бутцер и Нессел [9] пишут, что Зигмундом в письме к Хиллу в 1940 г. был сообщен следующий результат: если

$$\|f(x)-\sigma_n(f;x)\|_C = o(n^{-1}), \tag{4}$$

то $f(x) \equiv \text{const}$. Сам Зигмунд опубликовал этот факт в работах [1, 10] в 1945 г.

Эти результаты Алексича и Зигмунда, а также исследования Заманского [11] и Фавара [12] привели к понятию насыщенности линейных методов.

Говорят, что метод $U_n(f;\Lambda)$ является насыщенным в пространстве X, если для него существует такая положительная убывающая при $n\to\infty$ к нулю функция $\varphi_\Lambda(n)$, что:

а) из соотношения

$$\|f(x)-U_n(f;x;\Lambda)\|_X = o(\varphi_\Lambda(n)), \quad f\in X, \quad n\to\infty,$$

следует, что $f(x)\equiv\text{const}$;

б) существуют отличные от постоянных функции $f\in X$, для которых

$$\|f(x)-U_n(f;x;\Lambda)\|_X = O(\varphi_\Lambda(n)), \quad n\to\infty.$$

При этом множество функций, удовлетворяющих последнему условию, называют классом насыщения данного метода, а функцию $\varphi_\Lambda(n)$ — его порядком насыщения.

В этих терминах соотношения (3) и (4) означают, что метод Фейера является насыщенным, его порядок насыщения $\varphi_\Lambda(n) = n^{-1}$ и класс насыщения — класс $\tilde{H}^1 = \tilde{W}^1$.

Следующий существенный шаг в изучении приближений, доставляемых суммами Фейера, был сделан в 1945 г. С. М. Никольским [13], который рассмотрел величины

$$\mathscr{E}(\mathfrak{N};\sigma_n) = \sup_{f\in\mathfrak{N}} \|f(x)-\sigma_n(f;x)\|_C$$

в случае, когда $\mathfrak{N}$ — один из классов MW_r^r, $MW_{r+1}^r = M\tilde{W}_r^r$, $W_r^rH^\alpha$ и $W_{r+1}^rH^\alpha = \widetilde{W_r^rH}^\alpha$. Им доказаны такие теоремы.

Теорема 1. *Если числа r и α удовлетворяют неравенствам $r\ge 0$ и $0\le$ $\le\alpha\le 1$, то при $n\to\infty$ справедливы следующие равенства*:

$$\mathscr{E}(MW_r^r;\sigma_n) = \begin{cases} O(n^{-r}), & 0\le r<1; \\ O(n^{-1}\ln n), & r=1; \\ O(n^{-1}), & r>1, \end{cases} \tag{5}$$

$$\mathscr{E}(W_r^rH^\alpha;\sigma_n) = \begin{cases} O(n^{-(r+\alpha)}), & 0\le r+\alpha<1; \\ O(n^{-1}\ln n), & r+\alpha=1; \\ O(n^{-1}), & r+\alpha>1. \end{cases} \tag{6}$$

В соотношениях (5) и (6) знак O не может быть заменен на o. В частности, если $r\ge 1$, то справедливы более точные формулы

$$\mathscr{E}(MW_r^r;\sigma_n) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi n} M \ln n + O(n^{-1}), & r=1; \\ C_r M n^{-1} + O(n^{-r}), & r>1, \end{cases} \tag{7}$$

$$\mathscr{E}(W_r^r H^\alpha;\sigma_n) = \begin{cases} \dfrac{\ln n}{\pi n} + O(n^{-1}), & r=1, \quad \alpha=0; \\ C_{1,\alpha} n^{-1} + O(n^{-(1+\alpha)}), & r=1, \quad 0<\alpha\le 1; \\ C_{r,\alpha} n^{-1} + O(n^{-(r+\alpha)}), & r>1, \quad 0\le\alpha\le 1, \end{cases} \tag{8}$$

где

$$C_{1,\alpha} = \frac{2^{\alpha-1}}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} t^\alpha \operatorname{ctg}\frac{t}{2}\,dt + \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi-t)^\alpha \operatorname{ctg}\frac{t}{2}\,dt\right), \quad 0<\alpha\le 1,$$

коэффициент C_r *есть верхняя грань*

$$C_r = \sup_{|\varphi|\le 1}\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F_r(t)\,\varphi(t)\,dt\right|, \qquad F_r(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-r+1}\cos\left(kt + \frac{r\pi}{2}\right),$$

распространенная на все функции $\varphi(\cdot)$ *периода* 2π, $|\varphi|\le 1$, *со средним значением на периоде, равным нулю*:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\,dt = 0; \tag{9}$$

коэффициент $C_{r,\alpha}$ *при* $r>1$ *равен верхней грани*

$$C_{r,\alpha} = \sup_{\varphi\in H_0^\alpha}\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F_r(t)\,\varphi(t)\,dt\right|,$$

распространенной на класс H_0^α *функций* $\varphi(\cdot)$ *периода* 2π, $\varphi(0)=0$. *При* $r=2, 3, 4, \ldots$

$$C_r = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k(r-1)}}{(2k+1)^r}, \tag{10}$$

при $r=3, 5, 7, \ldots, 0\le\alpha\le 1$

$$C_{r,\alpha} = \frac{2^\alpha}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} k^{-r+1}\left(\int_0^{\pi/2} t^\alpha \sin kt\,dt + \int_{\pi/2}^{\pi}(\pi-t)^\alpha \sin kt\,dt\right).$$

Справедливо еще равенство, соответствующее случаю $r=0$:

$$\mathscr{E}(H^\alpha;\sigma_n) = \frac{2\Gamma(\alpha)n^{-\alpha}}{\pi(1-\alpha)}\sin\frac{\alpha\pi}{2} + O(n^{-1}), \quad 0<\alpha<1. \tag{11}$$

Теорема 2. *Если числа* r *и* α *удовлетворяют неравенствам* $r\ge 0$ *и* $0\le\le\alpha\le 1$, *то при* $n\to\infty$ *справедливы равенства*

$$\mathscr{E}(M\tilde{W}_r^r;\sigma_n) = \begin{cases} O(n^{-r}), & 0<r<1; \\ O(n^{-1}), & r\ge 1, \end{cases}$$

$$\mathscr{E}(\widetilde{W_r^r H^\alpha};\sigma_n) = \begin{cases} O(n^{-(r+\alpha)}), & 0<r+\alpha<1; \\ O(n^{-1}\ln n), & r+\alpha=1,\ \ 0<r<1; \\ O(n^{-1}), & r+\alpha>1. \end{cases}$$

В частности, имеют место более точные формулы

$$\mathscr{E}(M\tilde{W}_r^r;\sigma_n) = \overline{C}_r M n^{-1} + O(n^{-r}), \quad r>1, \tag{12}$$

$$\mathscr{E}(\widetilde{W_r^r H^\alpha};\sigma_n) = \begin{cases} \dfrac{\pi^\alpha}{(\alpha+1)n} + O(n^{-(r+\alpha)}), & r=1,\ \ 0<\alpha\le 1; \\ \overline{C}_{r,\alpha} n^{-1} + O(n^{-(r+\alpha)}), & r>1,\ \ 0\le\alpha\le 1, \end{cases} \tag{13}$$

постоянная $\overline{C}_r$ *есть верхняя грань*

$$\overline{C}_r = \sup_{|\varphi|\le 1}\left|\int_0^{2\pi}\overline{F}_r(t)\,\varphi(t)\,dt\right|, \qquad \overline{F}_r(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-r+1}\sin\left(kt+\frac{r\pi}{2}\right),$$

распространенная на все функции $\varphi(\cdot)$ *периода* 2π, $|\varphi|\le 1$, *удовлетворяющие условию* (9); *постоянная* $\overline{C}_{r,\alpha}$ *равна верхней грани*

$$\overline{C}_{r,\alpha} = \sup_{\varphi\in H_0^\alpha}\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\overline{F}_r(t)\,\varphi(t)\,dt\right|.$$

При $r=2,3,4,\ldots$

$$\overline{C}_r = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{kr}}{(2k+1)^r}, \tag{14}$$

при $r=2,4,6,\ \ldots,\ 0\le\alpha\le 1$

$$\overline{C}_{r,\alpha} = \frac{2^\alpha}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}k^{-r+1}\left(\int_0^{\pi/2}t^\alpha\sin kt\,dt + \int_{\pi/2}^{\pi}(\pi-t)^\alpha\sin kt\,dt\right).$$

Асимптотическое равенство для величин $\mathscr{E}(M\tilde{W}_1^1;\sigma_n)$ было найдено С. Б. Стечкиным (см. С. А. Теляковский [14]):

$$\mathscr{E}(M\tilde{W}_1^1;\sigma_n) = \frac{2}{\pi n}\int_0^{\infty}\left|\int_u^{\infty}\frac{\sin t}{t^2}\,dt\right|du + O(n^{-2}).$$

Теоремы 1 и 2 устанавливают точные порядки уклонений сумм Фейера на классах MW_r^r и $W_r^r H^\alpha$, а также сопряженных к ним $\widetilde{MW_r^r}$ и $\widetilde{W_r^r H^\alpha}$ при любых $r\ge 0$ и $0\le\alpha\le 1$ и в ряде важных случаев (см. равенства (7), (8), (12) и (13)) полностью решают соответствующую задачу К–Н в равномерной метрике.

Исследуя приближения периодических функций тригонометрическими полиномами в интегральной метрике годом позже С. М. Никольский [15], в частности, показал, что соотношения (7) остаются справедливыми при замене $\mathscr{E}(MW_r^r;\sigma_n)$ на величину

$$\mathscr{E}(W_{r,1}^r;\sigma_n)_1 = \sup_{f\in W_{r,1}^r}\|f(x)-\sigma_n(f;x)\|_1,$$

т. е. имеют место равенства

$$\mathscr{E}(W^r_{r,1};\sigma_n)_1 = \begin{cases} \dfrac{2M}{\pi n}\ln n + O(n^{-1}), & r=1; \\ C_r M n^{-1} + O(n^{-r}), & r>1. \end{cases}$$

Константы C_r и $\overline{C}_r$, определенные формулами (10) и (14), впоследствии получили название констант Фавара и обозначаются через K_r и $\overline{K}_r$ соответственно. Для них справедливы равенства (см., например, [16])

$$K_r = \sup_{f \in W^r_r} |\tilde{\tilde{f}}'(x)|, \qquad \overline{K}_r = \sup_{f \in \tilde{W}^r_r} |\tilde{f}'(x)|, \qquad r = 2, 3, \ldots .$$

Поэтому второе равенство (7) и равенство (12) при $r = 2, 3, 4, \ldots$ можно переписать в виде

$$\mathscr{E}(MW^r_r;\sigma_n) = \sup_{f \in W^r_r} |\tilde{f}'(x)| \frac{M}{n} + O(n^{-r}) \tag{7'}$$

и

$$\mathscr{E}(M\tilde{W}^r_r;\sigma_n) = \sup_{f \in \tilde{W}^r_r} |\tilde{f}'(x)| \frac{M}{n} + O(n^{-r}). \tag{12'}$$

В таком виде соотношения (7) и (12) были получены Надем [17] и затем обобщены С. А. Теляковским [18] на классы W^r_β при любых $r > 1$ и $\beta \in R^1$:

$$\mathscr{E}(W^r_\beta;\sigma_n) = \sup_{f \in W^r_\beta} |\tilde{f}'(x)| n^{-1} + O(n^{-r}). \tag{15}$$

С. А. Теляковскому принадлежат также и наиболее полные результаты на классах W^r_β и при $r \le 1$. Именно, им доказана следующая теорема [19].

Теорема 3. *Справедливы следующие асимптотические при $n \to \infty$ равенства*:

1. *Если* $r < 1$, *то*

$$\mathscr{E}(W^r_\beta;\sigma_n) = A(\mu_r) n^{-r} + O(n^{-1}), \tag{16}$$

где

$$A(\mu_r) = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_0^{\infty} \mu_r(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du \right| dt, \qquad A(\mu_r) \le \text{const}, \tag{17}$$

$$\mu_r(u) = \begin{cases} u^{1-r}, & 0 \le u \le 1; \\ u^{-r}, & u \ge 1. \end{cases} \tag{18}$$

2. *Если* $r = 1$, *то*

$$\mathscr{E}(W^r_\beta;\sigma_n) = \frac{2}{\pi} \left| \sin\frac{\beta\pi}{2} \right| \frac{\ln n}{n} + O(n^{-1}). \tag{19}$$

Если же при этом $\beta = k\pi$, $k \in Z$, *то*

$$\mathscr{E}(W^r_\beta;\sigma_n) = A(\mu_r) n^{-1} + O(n^{-2}). \tag{20}$$

Заметим, что соотношения (15) – (20) дают полное решение задачи К – Н для сумм Фейера на классах W^r_β при любых $r > 0$ и $\beta \in R^1$.

После отмеченных выше результатов С. М. Никольского, относящихся к приближению суммами Фейера на классах $W^r_\beta H_\omega$ при $\omega(t) = t^\alpha$ и $\beta = r$, наиболее общие результаты на этих классах были получены А. В. Ефимовым [20–22].

Теорема 4. *Для любого модуля непрерывности* $\omega = \omega(t)$ *справедливы следующие асимптотические при* $n \to \infty$ *равенства*:

1. *Если* $r = 0$, *то*

$$\mathcal{E}(W_\beta^0 H_\omega; \sigma_n) = \frac{2\left|\cos\frac{\beta\pi}{2}\right|}{\pi n} \int\limits_{1/n}^{1} \frac{\omega(t)}{t^2}\,dt + \frac{2\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|}{\pi} d_n(\omega) + O(\omega(n^{-1})), \tag{21}$$

где

$$d_n(\omega) = \sup\left\{\left|\int\limits_0^{1/n} \frac{\varphi(t)}{t}\,dt\right| : \varphi \in H_\omega, \;\; \varphi(-t) = -\varphi(t)\right\}.$$

В случае, когда функция $\omega(t)$ *выпукла,* $d_n(\omega) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{1/n} \frac{\omega(2t)}{t}\,dt$.

2. *Если* $0 < r < 1$, *то для любого* $\beta \in R^1$

$$\mathcal{E}(W_\beta^r H_\omega; \sigma_n) = \frac{2\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|}{\pi n}\left|\sum_{k=0}^{[n/2]} (k+1)\,\Delta^2(k^{1-r})\,d_{n,k}(\omega)\right| +$$

$$+ O\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{[n/2]} k^{-r}\,\omega(k^{-1})\right) + O(n^{-r}\,\omega(n^{-1})), \tag{22}$$

где $\Delta^2(\alpha_k) = \alpha_k - 2\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2}$, $k = 0, 1, \ldots$, *и*

$$d_{n,k} = \sup\left\{\left|\int\limits_{1/n}^{1/(k+1)} \frac{\varphi(t)}{t}\,dt\right| : \varphi \in H_\omega, \;\; \varphi(-t) = -\varphi(t)\right\}, \qquad k = 0, \ldots, n-1.$$

В случае, когда $\omega(t)$ *— функция выпуклая,*

$$d_{n,k}(\omega) = \frac{1}{2}\int\limits_{1/n}^{1/(k+1)} \frac{\omega(2t)}{t}\,dt.$$

3. *Если* $r = 1$, *то для любого* $\beta \in R^1$

$$\mathcal{E}(W_\beta^1 H_\omega; \sigma_n) = \frac{2\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|}{\pi n} d_{n,0}(\omega) + O(n^{-1}). \tag{23}$$

Согласно первому из равенств (6), при $r = 0$ и $0 < \alpha < 1$ имеем

$$\mathcal{E}(W_0^0 H^\alpha; \sigma_n) = O(n^{-\alpha}).$$

Отсюда заключаем, что соотношение (21) в этом случае не дает решения задачи К–Н, поскольку остаточный член в (21) будет иметь порядок $O(n^{-\alpha})$.

Вместе с тем можно указать модули непрерывности $\omega = \omega(t)$, для которых (21) решает эту задачу. Таким, например, будет модуль непрерывности $\omega^*(t) = t\ln\dfrac{1}{t}$. Действительно, в этом случае

$$\frac{1}{n}\int\limits_{1/n}^{1}\frac{\omega^*(t)}{t^2}\,dt = \frac{1}{2n}\ln^2 n = \frac{1}{2}\,\omega^*\left(\frac{1}{n}\right)\ln n$$

и равенство (21) дает

$$\mathscr{E}(W_0^0 H_{\omega^*};\sigma_n) = \frac{1}{\pi}\,\omega^*(n^{-1})\ln n + O(\omega^*(n^{-1})).$$

Понятно, что такое же замечание можно сделать и по отношению равенства (22), сравнив его с тем же соотношением (6) при $0 < r + \alpha < 1$, а также и по отношению равенства (23).

Если ограничиться целыми значениями параметра r, то в этом случае удается получить окончательные решения задачи К–Н. В связи с этим приведем утверждения, полученные автором данной статьи (см., например, [23, с. 222–251]).

Теорема 5. *Для любого модуля непрерывности* $\omega(t)$ *справедливы соотношения*

$$\mathscr{E}(H_\omega;\sigma_n) = \frac{2}{\pi n}\int\limits_{\pi/n}^{\pi/2}\omega(2t)\,\frac{\sin^2 nt}{\sin^2 t}\,dt, \tag{24}$$

$$\mathscr{E}(W^1 H_\omega;\sigma_n) \le \frac{1}{\pi n}\int\limits_{\pi/n}^{\pi/2}\frac{\omega(2t)}{\sin t}\,dt + O(n^{-1}\omega(n^{-1})), \tag{25}$$

$$\mathscr{E}(W_r^r H_\omega;\sigma_n) = \frac{1}{n}\tilde{M}_{r-1}(\omega) + O(n^{-r}\ln n\,\omega(n^{-1})), \qquad r \ge 2, \tag{26}$$

где

$$\tilde{M}_r(\omega) = \{\sup|\tilde{f}(0)|:\ f\in W_r^r H_\omega,\ f\perp 1\}.$$

Если $\omega(t)$ *— выпуклый модуль непрерывности, то и в* (25) *имеет место знак равенства.*

Для сопряженных классов также справедливы аналогичные утверждения.

Теорема 6. *Для любого модуля непрерывности* $\omega = \omega(t)$ *выполняется неравенство*

$$\mathscr{E}(\tilde{H}_\omega;\sigma_n) \le \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{x_1}\omega\left(\frac{2t}{n}\right)\frac{\sin t}{t^2}\,dt + \frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{\infty}\int\limits_{x_i}^{i\pi}\omega\left(\frac{\rho_i(t)-t}{n}\right)\left|\frac{\sin t}{t}\right|dt =$$

$$\stackrel{\mathrm{df}}{=} \mathscr{E}_n(\omega), \tag{27}$$

где x_i, $i = 1, 2, \ldots$, *— нули функции*

$$\tilde{\Phi}_1(t) = \int\limits_t^{\infty}\frac{\sin\tau}{\tau^2}\,d\tau, \qquad t > 0,$$

занумерованные в порядке их возрастания, а $\rho_i(t)$ *— функции, определяющиеся на* $[x_i, i\pi]$, $i = 1, 2, \ldots$, *посредством равенств*

$$\tilde{\Phi}_1(t) = \tilde{\Phi}_1(\rho_i(t)), \qquad x_i \le t \le i\pi \le \rho_i(t) \le x_{i+1}.$$

Если $\omega(t)$ *— выпуклый модуль непрерывности и, кроме того, при всех* $i = 1, 2, \ldots, [n/4]+1$ *выполняется неравенство*

$$\sum_{k=1}^{2i} (-1)^k \, \omega\left(\frac{x_{i+1} - x_i}{n}\right) \le \frac{1}{2}\left(\omega\left(\frac{2x_{2i+1}}{n}\right) - \omega\left(\frac{2x_1}{n}\right)\right),$$

то

$$\mathscr{E}(\tilde{H}_\omega; \sigma_n) = \mathscr{E}_n(\omega) + \gamma_n^{(0)}, \quad \gamma_n^{(0)} \le 0, \quad \gamma_n^{(0)} = O(n^{-1}\omega(n^{-1})). \tag{28}$$

При этом величина $\mathscr{E}_n(\omega)$ *допускает представление*

$$\mathscr{E}_n(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_0^{x_1} \omega\left(\frac{2t}{n}\right)\frac{\sin t}{t^2}\, dt + \frac{2}{\pi n}\int_0^\infty \Psi_1(\tilde{\Phi}_1; t)\, \omega'\left(\frac{t}{n}\right) dt,$$

где

$$\Psi_1(\tilde{\Phi}_1; t) = \sum_{i=1}^{\infty} \overline{\tilde{\Phi}}_{1,i}(t),$$

$\overline{\tilde{\Phi}}_{1,i}(t)$ *— убывающая перестановка функции*

$$\tilde{\Phi}_{1,i}(t) = \begin{cases} |\tilde{\Phi}_1(t)|, & t \in [x_i, x_{i+1}]; \\ 0, & t \,\overline{\in}\, [x_i, x_{i+1}], \ i = 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

Понятно, что при условиях, обеспечивающих выполнение равенства (28), это равенство дает решение соответствующей задачи К – Н. Нетрудно проверить, что такие условия выполнены, когда $\omega(t) = t^\alpha$, $0 < \alpha \le 1$.

В общем случае из (27) следует, что

$$\mathscr{E}(\tilde{H}_\omega; \sigma_n) < \frac{2}{\pi}\int_0^{x_1/n} \omega(t)\frac{dt}{t} + \frac{1}{\pi x_1}\omega\left(\frac{\pi}{x_1}\right), \quad 2{,}15624 < x_1 < 2{,}15625.$$

Отсюда, в частности, вытекает, что если

$$\int_0^{1/n} \frac{\omega(t)}{t}\, dt = O(\omega(n^{-1})), \quad n \to \infty,$$

то и

$$\mathscr{E}(\tilde{H}_\omega; \sigma_n) = O(\omega(n^{-1})).$$

Теорема 7. *Для любого модуля непрерывности* $\omega = \omega(t)$

$$\mathscr{E}(\widetilde{W_r^r H_\omega}; \sigma_n) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi n}\displaystyle\int_0^{\pi/2} \omega(2t)\, dt + O(n^{-1}\omega(n^{-1})), & r = 1; \\[2ex] \dfrac{M_{r-1}(\omega)}{n} + O\left(\dfrac{\ln n}{n^r}\omega(n^{-1})\right) & r = 2, 3, \ldots, \end{cases}$$

где

$$M_r(\omega) = \{\sup |f(0)| : \ f \in W_r^r H_\omega, \ f \perp 1\}. \tag{29}$$

Равенство (24) является почти очевидным, однако оно малоинформативно. В случае, когда $\omega(t) = t^\alpha$, отправляясь именно от такого равенства, С. М. Никольский путем достаточно тонких рассуждений получил формулу (11). Дальнейшие исследования интеграла

$$\int\limits_0^{\pi/2} t^\alpha \frac{\sin^2 nt}{\sin^2 t}\, dt, \qquad 0<\alpha\le 1,$$

были приведены С. А. Теляковским [24], который установил следующее утверждение.

Теорема 8. *Пусть* $n\to\infty$, *принимая только четные, или только нечетные значения. Тогда справедливы следующие асимптотические разложения*:

$$\mathcal{E}(H^1;\sigma_n) \approx \frac{2}{\pi}\frac{\ln n}{n} + \frac{2}{\pi n}(1+c+\ln 2) +$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} n^{-(2k+1)}\left(2-\frac{1}{k}\right)[1+(-1)^n(1-2^{2k})]\,B_{2k},$$

$$\mathcal{E}(H^\alpha;\sigma_n) \approx \frac{2\Gamma(\alpha)}{\pi(1-\alpha)n^\alpha}\sin\frac{\alpha\pi}{2} + \frac{A_\alpha}{n} +$$

$$+\frac{1}{\pi}\sin\frac{\alpha\pi}{2}\sum_{k=1}^{\infty} n^{-(2k+\alpha)}\frac{\Gamma(2k-1+\alpha)}{(2k-2)!}\frac{B_{2k}}{k} +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+k+1}}{n^{2k+1}}\left\{\frac{2\Gamma(2k+1-\alpha)}{\pi^{2k+2-\alpha}\Gamma(2-\alpha)} +\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i\frac{\Gamma(2i-1+\alpha)}{(2i-2)!}\frac{\pi^{2i-2-2k+\alpha}}{\Gamma(2i-2k+\alpha)}\frac{B_{2i}}{i}\right\},$$

где C — *постоянная Эйлера и* B_{2k} — *числа Бернулли*

$$B_{2k} = (-1)^{k-1}\,2\,\frac{(2k)!}{(2\pi)^{2k}}\sum_{s=1}^{\infty} s^{-2k}.$$

В упоминавшейся уже работе [15] С. М. Никольский показал, что для ряда линейных методов приближения верхние грани уклонений в метрике C и соответствующие верхние грани в метрике L по классам дифференцируемых функций совпадают или асимптотически равны. Точнее, С. М. Никольский установил, что для любого λ-метода

$$\mathcal{E}(W^r_{r,1};U_n(f;\lambda))_1 \le \mathcal{E}(W^r_r;U_n(f;\lambda))_C, \qquad r\in N.$$

Впоследствии С. Б. Стечкин и С. А. Теляковский [25] показали, что такое же соотношение справедливо и для классов $W^r_{\beta,1}$ при $r>0$ и $\beta\in R^1$:

$$\mathcal{E}(W^r_{\beta,1};U_n(f;\Lambda))_1 \le \mathcal{E}(W^r_\beta;U_n(f;\Lambda))_C,$$

а В. П. Моторный [26] распространил это утверждение и на классы $W^r_\beta H_{\omega_1}$, где

$$H_{\omega_1} = \left\{\varphi\in L,\quad \int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(x+t)-f(x)|\,dx \le \omega(t)\right\},$$

$\omega(t)$ — заданный модуль непрерывности, и показал, что при $r\ge 0$ и $\beta\in R^1$

$$\mathcal{E}(W^r_\beta H_{\omega_1};U_n(f;\Lambda))_1 \le \mathcal{E}(W^r_\beta H_\omega;U_n(f;\Lambda))_C.$$

3. Суммы Рисса: обзор известных результатов. Суммами Рисса мы называли суммы $Z^s_n(f;x)$ при $s=2$. Однако в математической литературе более распространенными являются так называемые сферические суммы Рисса порядка δ, которые были введены С. Бохнером [3] для многомерного случая. В интересующем нас одномерном случае эти суммы имеют вид

$$S_n^{\delta}(f;x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{k^2}{n^2}\right)^{\delta} A_k(f;x), \qquad \delta>0,$$

и, стало быть, при $\delta=1$ совпадают с $Z_n^2(f;x)$.

Для сумм $S_n^1(f;x)$ удалось установить ряд утверждений, которые для сумм Зигмунда при $s>2$ пока еще неизвестны. Приведем часть из таких результатов, полученных в [23].

Теорема 9. *Пусть $\omega(t)$ — произвольный модуль непрерывности. Тогда*

$$\mathscr{E}(H_{\omega};S_n^1) = \sup_{f\in H_{\omega}} \|f(x) - S_n^1(f;x)\|_C \le$$

$$\le \frac{4}{\pi}\left(\int_0^{x_1} \omega\left(\frac{t}{n}\right)\psi(t)\,dt + \sum_{i=1}^{\infty}\int_{x_i}^{c_i}\omega\left(\frac{\rho_i(t)-t}{n}\right)|\psi(t)|\,dt\right) \overset{\text{df}}{=} \mathscr{E}_n^1(\omega),$$

где

$$\psi(t) = \frac{\sin t - t\cos t}{t^3},$$

c_i и x_i, $i=\overline{1,\infty}$, — нули соответственно функций $\psi(t)$, $t>0$, и

$$\psi_1(t) = \int_t^{\infty}\psi(\tau)\,d\tau = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin t}{t^2} - \frac{\cos t}{t} - \operatorname{Si} t\right), \qquad t>0, \tag{30}$$

занумерованные в порядке их возрастания; $\rho_i(t)$ — функции, определяющиеся на отрезках $[x_i, c_i]$ посредством равенств

$$\psi_1(t) = \psi_1(\rho_i(x)), \qquad x_i \le t \le c_i \le \rho_i(t) \le x_{i+1}.$$

Если $\omega(t)$ — выпуклый модуль непрерывности и выполняется условие

$$\sum_{k=0}^{2m}(-1)^k\,\omega\left(\frac{x_{k+1}-x_k}{n}\right) \le \omega\left(\frac{x_{2m+1}}{n}\right),$$

$$m=1,2,\ldots,\ [n/2]+1, \qquad x_0 \overset{\text{df}}{=} 0,$$

то

$$\mathscr{E}(H_{\omega};S_n^1) = \mathscr{E}_n^1(\omega) + \gamma_n^{(0)}, \qquad \gamma_n^{(0)} \le 0, \quad \gamma_n^{(0)} = O(n^{-1}\omega(n^{-1})).$$

При этом величина $\mathscr{E}_n^1(\omega)$ допускает представление

$$\mathscr{E}_n^1(\omega) = \frac{4}{\pi n}\int_0^{\infty}\Psi_0(\psi_1;t)\,\omega'\left(\frac{t}{n}\right)dt,$$

где

$$\Psi_0(\psi_1;t) = \sum_{i=0}^{\infty}\overline{\Psi}_{1,i}(t),$$

$\overline{\Psi}_{1,i}(t)$ — убывающая перестановка функции

$$\psi_{1,i}(t) = \begin{cases} |\psi_1(t)|, & t \in [x_i, x_{i+1}]; \\ 0, & t \overline{\in} [x_i, x_{i+1}], \quad i = \overline{0, \infty}, \quad x_0 \stackrel{\mathrm{df}}{=} 0. \end{cases}$$

Для любого модуля непрерывности $\omega(t)$ *справедлива оценка*

$$\mathscr{E}_n^1(\omega) \le \frac{4}{3\pi} \int_0^{x_1} \omega\left(\frac{t}{n}\right) dt + \frac{4}{\pi x_1} \omega\left(\frac{\pi}{n}\right) <$$

$$< \frac{4}{3\pi} \omega\left(\frac{3{,}34}{n}\right) + \frac{4}{3{,}3\pi} \omega\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Если $\omega(t) = Mt^\alpha$, $0 < \alpha \le 1$, то все условия теоремы 9 выполняются и тогда

$$\mathscr{E}(MH^\alpha; S_n^1) = \mathscr{E}_n^1(\alpha) + \gamma_{n,\alpha}^{(0)}, \qquad \gamma_{n,\alpha}^{(0)} \le 0 \quad \text{и} \quad \gamma_{n,\alpha}^{(0)} = O(n^{-(1+\alpha)}).$$

где

$$\mathscr{E}_n^1(\alpha) = \frac{4M\alpha}{\pi n^\alpha} \int_0^\infty \Psi_0(\psi_1; t)\, t^{\alpha-1}\, dt.$$

В частности, при $\alpha = 1$

$$\mathscr{E}_n^1(1) = \frac{4M}{n\pi} \int_0^\infty |\psi_1(t)|\, dt = \frac{2M}{\pi} \int_0^\infty \left| \frac{\sin t}{t^2} - \frac{\cos t}{t} - \operatorname{Si} t \right| dt.$$

Теорема 10. *Пусть* $\omega(t)$ *— произвольный модуль непрерывности. Тогда*

$$\mathscr{E}(W^1 H_\omega; S_n^1) \le \frac{2}{\pi n} \int_0^{t_1} \omega\left(\frac{2t}{n}\right) \psi_1(t)\, dt +$$

$$+ \frac{4}{\pi n} \sum_{i=1}^\infty \int_{t_i}^{x_i} \omega\left(\frac{q_i(t) - t}{n}\right) |\psi_1(t)|\, dt \stackrel{\mathrm{df}}{=} \mathscr{E}_n^1(1; \omega),$$

где $\psi_1(x)$ *— функция, определяющаяся равенством* (30); x_i *и* t_i *— нули соответственно функций* $\psi_1(x)$, $x > 0$, *и*

$$\psi_2(t) = \int_t^\infty \Psi_1(\tau)\, d\tau = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin t}{t^2} + \cos t + t \operatorname{Si} t\right), \qquad t > 0,$$

занумерованные в порядке их возрастания; $q_i(t)$ *— функции, определяющиеся на отрезках* $[t_i, x_i]$ *посредством равенств*

$$\psi_2(t) = \psi_2(q_i(t)), \qquad t_i \le t \le x_i \le q_i(t) \le t_{i+1}.$$

Если $\omega(t)$ *— выпуклый модуль непрерывности и при всех* $i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, [n/4] + 1$

$$\sum_{k=1}^{2i} (-1)^k \omega\left(\frac{t_{k+1} - t_k}{n}\right) \le \frac{1}{2}\left(\omega\left(\frac{2t_{2i+1}}{n}\right) - \omega\left(\frac{2t_1}{n}\right)\right),$$

то

$$\mathscr{E}(W^1 H_\omega; S_n^1) = \mathscr{E}_n^1(1; \omega) + \gamma_n^{(1)}, \qquad \gamma_n^{(1)} \le 0, \quad \gamma_n^{(1)} = O(n^{-2} \omega(n^{-1})).$$

При этом величина $\mathscr{E}_n^1(1; \omega)$ *допускает представление*

$$\mathscr{E}_n^1(1;\omega) = \frac{2}{\pi n}\int_0^{t_1}\omega\left(\frac{2t}{n}\right)\psi_1(t)\,dt + \frac{4}{\pi n^2}\int_0^{\infty}\Psi_1(\psi_2;t)\,\omega'\left(\frac{t}{n}\right)dt,$$

где

$$\Psi_1(\psi_2;t) = \sum_{i=1}^{\infty}\overline{\psi}_{2,i}(t),$$

$\overline{\psi}_{2,i}(t)$ *— убывающая перестановка функции*

$$\psi_{2,i}(t) = \begin{cases} |\psi_2(t)|, & t\in[t_i,t_{i+1}]; \\ 0, & t\,\overline{\in}\,[t_i,t_{i+1}], \quad i=\overline{1,\infty}. \end{cases}$$

Теорема 11. *Пусть* $\omega = \omega(t)$ *— произвольный модуль непрерывности. Тогда при любом* $r \ge 2$ *справедливо равенство*

$$\mathscr{E}(W^r H_\omega; S_n^1) = \frac{1}{n^2}M_{r-2}(\omega) + \gamma_n^{(r)},$$

в котором величины $M_{r-2}(\omega)$ *определяются равенством* (29) *и*

$$\gamma_n^{(r)} = \begin{cases} O(n^{-2}\omega(n^{-1})), & r=2; \\ O(\min(n^{-3}, n^{-r}\ln n\omega(n^{-1}))), & r\ge 3. \end{cases}$$

4. Суммы Зигмунда: обзор известных результатов. Как уже отмечалось, суммы Зигмунда при любом $s>0$ были введены в [1]. Там же были доказаны следующие утверждения, устанавливающие точные порядки уклонений этих сумм на классах W_r^r и $W_r^r H_\omega$.

Теорема 12. *Пусть* s *— четное неотрицательное число. Тогда для любой* $f\in W_s^s$

$$\|f(x) - Z_n^s(f;x)\|_C \le A_s n^{-s} \tag{31}$$

и для $f\in W_{s-1}^{s-1}H_\omega$ ($\omega(t)$ *— произвольный модуль непрерывности*)

$$\|f(x) - Z_n^s(f;x)\|_C \le A_s n^{-(s-1)}\omega\left(\frac{2\pi}{n}\right). \tag{32}$$

Если s *— нечетное число, то для* $f\in W_s^s$

$$\|f(x) - Z_n^s(f;x)\|_C \le A_s n^{-s}\ln(n+2) \tag{33}$$

и для $f\in W_{s-1}^{s-1}H^\alpha$, $0<\alpha<1$,

$$\|f(x) - Z_n^s(f;x)\|_C \le A_s n^{-(s-1+\alpha)}. \tag{34}$$

В соотношениях (31)–(34) A_s *— величины, равномерно ограниченные по* n.

Теорема 13. *Пусть* s *— нечетно. Тогда для любой* $f\in \tilde{W}_s^s$

$$\|f(x) - Z_n^s(f;x)\|_C \le A_s n^{-s}$$

и для $f\in \tilde{W}_{s-1}^{s-1}H_\omega$ ($\omega(t)$ *— произвольный модуль непрерывности*)

$$\|f(x) - Z_n^s(f;x)\|_C \le A_s n^{-s}\omega\left(\frac{2\pi}{n}\right).$$

Исследования А. Зигмунда были продолжены Б. Надем [17] и затем —

С. А. Теляковским [19]. Приведем формулировку только теоремы, полученной С. А. Теляковским, поскольку она включает и соответствующий результат Б. Надя.

Теорема 14. *Для величин*

$$\mathcal{E}(W^r_\beta; Z^s_n) = \sup_{f \in W^r_\beta} \|f(x) - Z^s_n(f; x)\|_C,$$

$$r > 0, \quad s > 0, \quad \beta \in R,$$

справедливы следующие асимптотические формулы:

1. *Если* $r < s$, *то*

$$\mathcal{E}(W^r_\beta; Z^s_n) = A(\mu_r) n^{-r} + O(n^{-\min(r+1, s)}), \tag{35}$$

где

$$A(\mu_r) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| \int\limits_0^{\infty} \mu_r(v) \cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dv \right| dt, \tag{36}$$

$$\mu_r(v) = \begin{cases} v^{s-r}, & 0 \le v \le 1; \\ v^{-r}, & v \ge 1. \end{cases} \tag{37}$$

2. *Если* $r = s$, *то*

$$\mathcal{E}(W^r_\beta; Z^s_n) = \frac{2}{\pi} \left| \sin \frac{\beta\pi}{2} \right| \frac{\ln n}{n^r} + O(n^{-r}), \tag{38}$$

если же при этом $\sin \dfrac{\beta\pi}{2} = 0$, *то*

$$\mathcal{E}(W^r_\beta; Z^s_n) = A(\mu_r) n^{-r} + O(n^{-(r+1)}),$$

где $A(\mu_r)$ *определяется по формуле* (36).

3. *Если* $r > s$, *то*

$$\mathcal{E}(W^r_\beta; Z^s_n) = \sup_{f \in W^r_\beta} |f^s_0(x)| n^{-s} + O(n^{-r}), \tag{39}$$

где $f^s_0(x)$ — *непрерывная функция, имеющая ряд Фурье*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^s A_k(f; x).$$

Формулы (26) и (39) были получены ранее в упоминавшейся работе Б. Надя.

Наиболее общие результаты для величин

$$\mathcal{E}(W^r_\beta H_\omega) = \sup_{f \in W^r_\beta H_\omega} \|f(x) - Z^s_n(f; x)\|$$

были получены А. В. Ефимовым [22], который доказал следующую теорему.

Теорема 15. *Справедливы следующие равенства:*

1. *Если* $s < r$, *то*

$$\mathcal{E}(W^r_\beta H_\omega) = \frac{2\left|\sin \dfrac{\beta\pi}{2}\right|}{\pi n^s} \sum_{k=0}^{[n/2]} (k+1)\, \Delta^2(k^{s-r})\, d_{n,k}(\omega) + O(n^{-s}).$$

2. *Если* $s = r$, *то*

$$\mathscr{E}(W_\beta^r H_\omega) = \frac{2}{\pi n^r} \left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right| d_{n,0}(\omega) + O(n^{-r}).$$

3. *Если* $r < s < r+1$, *то*

$$\mathscr{E}(W_\beta^r H_\omega) = \frac{2\left|\sin\dfrac{\beta\pi}{2}\right|}{\pi n^s} \left|\sum_{k=0}^{[n/2]-1} (k+1)\,\Delta^2(k^{s-r})\, d_{n,k}(\omega)\right| +$$

$$+ O\left(n^{-s} \sum_{k=0}^{[n/2]-1} (k+1)^{-(r+1+s)}\,\omega\left(\frac{1}{k+1}\right)\right) + O(n^{-r}\omega(n^{-1})).$$

4. *Если* $s = r+1$, *то*

$$\mathscr{E}(W_\beta^r H_\omega) = \frac{2\left|\cos\dfrac{\beta\pi}{2}\right|}{\pi n^{r+1}} \int\limits_{1/(n+1)}^{1} \frac{\omega(t)}{t^2}\,dt + O(n^{-r}\omega(n^{-1})).$$

5. *Если* $s > r+1$, *то*

$$\mathscr{E}(W_\beta^r H_\omega) = O(n^{-r}\omega(n^{-1})).$$

Величины $d_{n,k}(\omega)$ *имеют тот же смысл, что и в теореме* 4.

5. Суммы Зигмунда на классах $C_{\beta,\infty}^{\psi}$. В этом пункте излагаются результаты, связанные с получением асимптотических равенств для величин

$$\mathscr{E}(C_{\beta,\infty}^{\psi}; Z_n^s) = \sup\{|f(x) - Z_n^s(f; x)|:\ f \in C_{\beta,\infty}^{\psi}\}.$$

Эти результаты получены, главным образом, Д. Н. Бушевым и автором настоящей статьи (см. [27, 28]).

Относительно последовательностей $\psi(k)$, которыми определяются классы $C_{\beta,\infty}^{\psi}$, будем предполагать, что они выпуклы вниз, т. е.

$$\psi(k+2) - 2\psi(k+1) + \psi(k) \geq 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, \tag{40}$$

и исчезающие на бесконечности:

$$\lim_{k\to\infty} \psi(k) = 0. \tag{41}$$

Множество таких последовательностей обозначается через $\mathfrak{M}$. Подмножество функций $\psi \in \mathfrak{M}$, для которых

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi(k)}{k} < \infty, \tag{42}$$

обозначается через $\mathfrak{M}'$.

В дальнейшем удобно считать, что последовательности $\psi(k)$, $k = 1, 2, \ldots$, являются сужениями на множестве натуральных чисел непрерывных при всех $v \geq 1$ функций непрерывного аргумента. При нахождении величин $\mathscr{E}(C_{\beta,\infty}^{\psi}; Z_n^s)$ это не умаляет общности, если даже считать функции $\psi(v)$ дважды непрерывно дифференцируемыми. Чтобы не вводить дополнительных обозначений, в дальнейшем множество выпуклых вниз дважды непрерывно дифференцируемых при всех $v \geq 1$ и исчезающих на бесконечности функций будем, по-прежнему, обозначать через $\mathfrak{M}$, а подмножество функций $\psi \in \mathfrak{M}$, для которых

$$\int_1^{\infty} \frac{\psi(v)}{v} dv < \infty, \tag{43}$$

— через $\mathfrak{M}'$.

Заметим, что если $\psi \in \mathfrak{M}$, то выполняется (40) и (41), а (43) влечет выполнение (42).

Если $\tau(v)$ — функция, определенная на полуоси $v \geq 0$, такова, что ее преобразование

$$\hat{\tau}(t) = \hat{\tau}(t; \beta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \tau(v) \cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dv$$

абсолютно интегрируемо на R^1, то в соответствии с (36), будем полагать

$$A(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\tau}(t)|\, dt. \tag{44}$$

Асимптотические равенства для величин $\mathscr{E}(C^{\psi}_{\beta,\infty}; Z^s_n)$ существенно зависят от поведения на бесконечности функции $g(v) = v^s \psi(v)$. Здесь предполагается, что эта функция выпукла вверх или вниз при всех $v \geq 1$. Условие выпуклости функции $g(v)$ (а также функции $\psi(v)$) можно предполагать не на всем множестве $v \geq 1$, а на множестве $v \geq C$, где C — любое действительное число, большее единицы. В таком случае в указанных работах соответствующие асимптотические равенства также найдены, однако их формулировки более громоздки и поэтому мы их не приводим.

Если функция $g(v)$ выпукла при $v \geq 1$, то возможны такие случаи:

$$\begin{aligned}
&\text{а)}\ \ g(v) \ \ \text{выпукла вниз и} && \lim_{v \to \infty} g(v) = \infty; \\
&\text{б)}\ \ g(v) \ \ \text{выпукла вверх и} && \lim_{v \to \infty} g(v) = \infty; \\
&\text{в)}\ \ g(v) \ \ \text{выпукла вниз и} && \lim_{v \to \infty} g(v) = C > 0; \\
&\text{г)}\ \ g(v) \ \ \text{выпукла вверх и} && \lim_{v \to \infty} g(v) = C > 0; \\
&\text{д)}\ \ g(v) \ \ \text{выпукла вниз и} && \lim_{v \to \infty} g(v) = 0.
\end{aligned} \tag{45}$$

При формулировке результатов эти случаи приходится также различать, что объясняется, в первую очередь, тем, что порядок насыщения для метода Z^s_n есть величина n^{-s}.

В дальнейшем через $O(1)$ обозначаются величины, равномерно ограниченные по параметру n — степени полиномов $Z^s_n(f; x)$.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 16. *Пусть* $\sin \frac{\beta\pi}{2} = 0$, $\psi \in \mathfrak{M}$ *и* $g(v)$ *удовлетворяет одному из условий* а) – г) *из* (45). *Тогда при* $n \to \infty$

$$\mathscr{E}(C^{\psi}_{\beta,\infty}; Z^s_n) = \psi(n) A(\tau_n) + O(1) \frac{\psi(n)}{n}, \tag{46}$$

где $A(\tau_n)$ *— величина, определяемая равенством* (44) *при*

$$\tau_n(v) = \begin{cases} \dfrac{s\psi(1) + \psi'(1)}{n^{s-1}\psi(n)}v + \dfrac{(1-s)\psi(1) - \psi'(1)}{n^s\psi(n)}, & 0 \le v \le \dfrac{1}{n}; \\ v^s \dfrac{\psi(nv)}{\psi(n)}, & \dfrac{1}{n} \le v \le 1; \\ \dfrac{\psi(nv)}{\psi(n)}, & v \ge 1. \end{cases}$$

При этом $A(\tau_n) = O(1)$.

Если $\psi(v) = v^{-r}$, $0 < r \le s$, то равенство (46) совпадает с равенством (35). При этом если $r < s < r+1$, то оценка остаточного члена в (46) несколько лучше, чем в (35).

Примерами функций $\psi(v)$, для которых справедлива теорема 16, есть функции $\psi(v) = v^{-r}\ln^{\alpha}(v + C)$ при $r \in (0, s)$, $C > 0$ и любом действительном α; $\psi(v) = v^{-s}\operatorname{arctg} u$; $\psi(v) = v^{-s}(C - e^{-v})$, $C > 0$ и др.

Теорема 16′. *Пусть* $\sin\dfrac{\beta\pi}{2} = 0$, $\psi \in \mathfrak{M}$, *последовательность* $k^s\psi(k)$, $k = 1, 2, \ldots$, *выпукла вниз и* $\lim\limits_{k\to\infty} k^s\psi(k) = 0$. *Тогда при* $n \to \infty$

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta,\infty}; Z^s_n) = n^{-s} \sup_{f \in C^{\psi}_{\beta,\infty}} \|f^s\|_C + O(1)(\psi(n) + n\psi'(n)), \tag{46′}$$

где $f^s(\cdot)$ *— непрерывная функция, для которой*

$$S[f^s] = \sum_{k=1}^{\infty} k^s A_k(f; x). \tag{47}$$

Ясно, что утверждение теоремы 16′ есть аналогом п. 3 теоремы 14.

Следующие утверждения характеризуют величины $\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta,\infty}; Z^s_n)$ в случае, когда $\sin\dfrac{\beta\pi}{2} \ne 0$.

Теорема 17. *Пусть* $\sin\dfrac{\beta\pi}{2} \ne 0$, $\psi \in \mathfrak{M}'$ *и функция* $g(v)$ *удовлетворяет условию* а) *из* (45). *Тогда при* $n \to \infty$

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta,\infty}; Z^s_n) = \psi(n)A(\tau^{(1)}_n) + O(1)\frac{\psi(n)}{n}, \tag{48}$$

где $A(\tau^{(1)}_n)$ *— величина, определяемая равенством* (44) *при*

$$\tau^{(1)}(v) = \begin{cases} \dfrac{(s-1)\psi(1) + \psi'(1)}{n^{s-2}\psi(n)}v^2 + \dfrac{(2-s)\psi(1) - \psi'(1)}{n^{s-1}\psi(n)}v, & 0 \le v \le \dfrac{1}{n}; \\ v^s \dfrac{\psi(nv)}{\psi(n)}, & \dfrac{1}{n} \le v \le 1; \\ \dfrac{\psi(nv)}{\psi(n)}, & v \ge 1. \end{cases}$$

При этом

$$\frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\frac{1}{\psi(n)}\int_n^\infty \frac{\psi(t)}{t}\,dt \;<\; A(\tau_n^{(1)}) \;<\; \frac{2\pi}{\psi(n)}\int_n^\infty \frac{\psi(t)}{t}\,dt + O(1).$$

В случае, когда $\psi(v) = v^{-r}$, $r > 0$, из равенства (48) получаются соотношения (35) и (38), поскольку

$$\int_n^\infty t^{-(r+1)}\,dt = \frac{n^{-r}}{r}.$$

В указанном случае справедливо соотношение

$$\int_n^\infty \frac{\psi(t)}{t}\,dt = O(1)\,\psi(n). \tag{49}$$

Однако равенство (49) выполняется не для всех $\psi \in \mathfrak{M}'$. Например, функция $\psi_\alpha(v) = \ln^{-\alpha}(v+e)$ принадлежит $\mathfrak{M}'$ при любом $\alpha > 1$, в то же время

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\psi_\alpha(n)}\int_n^\infty \frac{\psi_\alpha(t)}{t}\,dt = \infty.$$

Теорема 18. *Пусть* $\sin\dfrac{\beta\pi}{2} \neq 0$, $\psi \in \mathfrak{M}'$, *функция* $g(v) = v^s\psi(v)$ *выпукла вверх и, кроме того,*

$$\int_1^n t^{s-1}\psi(t)\,dt = O(1)\,n^s\psi(n).$$

Тогда при $n \to \infty$

$$\mathscr{E}(C^\psi_{\beta,\infty}; Z_n^s) = \psi(n)\,A(\tau_n^{(2)}) + O(1)\,n^{-s},$$

где $A(\tau_n^{(2)})$ *— величина, определяемая соотношением* (44) *при*

$$\tau_n^{(2)}(v) = \begin{cases} \dfrac{\psi(1)}{\psi(n)}\, n^{\psi'(1)/\psi(1)}\, v^{s+\psi'(1)/\psi(1)}, & 0 \le v \le \dfrac{1}{n}; \\[2ex] v^s\,\dfrac{\psi(nv)}{\psi(n)}, & \dfrac{1}{n} \le v \le 1; \\[2ex] \dfrac{\psi(nv)}{\psi(n)}, & v \ge 1. \end{cases}$$

При этом

$$\frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\frac{1}{\pi}\int_n^\infty \frac{\psi(t)}{t}\,dt \;<\; A(\tau_n^{(2)}) \;<\; \frac{2\pi}{\psi(n)}\int_n^\infty \frac{\psi(t)}{t}\,dt + O(1),$$

$O(1)$ *— величины, равномерно ограниченные по* n.

Примерами функций $\psi(v)$, удовлетворяющих условиям этой теоремы, есть функция $\psi_r(v) = v^{-r}\ln^\alpha(v+e)$ при $0 < s-1 \le r < s$ и $\alpha \in R^1$, $\psi_\alpha(v) = \ln^{-\alpha}(v+e)$ при $\alpha > 1$ в случае, когда $s \le 1$ и др.

Приведем еще несколько утверждений, относящихся к случаю, когда $\sin\dfrac{\beta\pi}{2} \neq 0$.

Теорема 19. *Пусть* $\sin\frac{\beta\pi}{2} \neq 0$, $\psi \in \mathfrak{M}'$, *функция* $g(v) = v^s\psi(v)$ *выпукла вверх или вниз и*

$$\lim_{v\to\infty} v^s\psi(v) = C > 0.$$

Тогда при $n \to \infty$

$$\mathscr{E}(C^{\psi}_{\beta,\infty}; Z^s_n) = \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\frac{1}{n^s}\int_1^n t^{s-1}\psi(t)\,dt + O(1)\,\psi(n). \tag{50}$$

В случае, когда $g(v)$ *выпукла вверх и*

$$\lim_{v\to\infty} v^s\psi(v) = \infty,$$

также справедливо равенство (50) *при тех условиях, что выполняется равенство* (49), *а также равенство*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{1}{n^s\psi(n)}\int_1^n t^{s-1}\psi(t)\,dt = \infty.$$

Отметим, что функция $\psi(v) = v^{-s}\ln^{\alpha}(v+e)$, $\alpha \geq 0$; $\psi(v) = v^{-s}\operatorname{arctg} v$ и другие удовлетворяют условиям этой теоремы.

Теорема 20. *Пусть последовательность* $k^s\psi(k)$, $k = 1, 2, \ldots$, *выпукла вниз, начиная с некоторого номера* k_0; $\lim\limits_{k\to\infty} k^s\psi(k) = 0$ *и ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{s-1}\psi(k)$$

расходится. Тогда при $n \to \infty$

$$\mathscr{E}(C^{\psi}_{\beta,\infty}; Z^s_n) = \frac{2}{\pi n^s}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\sum_{k=1}^{\infty} k^{s-1}\psi(k) + O(1)n^{-s}.$$

Одним из примеров функций $\psi(v)$, удовлетворяющих условиям этой теоремы, есть функция $\psi(v) = v^{-s}\ln^{-\alpha}(v+e)$ при $\alpha \in (0, 1]$.

Теорема 21. *Пусть функция* $v^{s-1}\psi(v)$ *интегрируема на* $[1, \infty)$, *а функция* $g(v) = v^s\psi(v)$ *выпукла вниз при всех* $v \geq a \geq 1$. *Тогда*

$$\mathscr{E}(C^{\psi}_{\beta,\infty}; Z^s_n) = \frac{1}{n^s}\sup_{f\in C^{\psi}_{\beta,\infty}}\|f^s\|_C + O(1)\left(\frac{1}{n^s}\int_n^{\infty} t^{s-1}\psi(t)\,dt + \psi(n)\right),$$

где $f^s(x)$ — *непрерывная функция, для которой выполняется равенство* (47).

6. Обобщенные суммы Зигмунда на классах $C^{\psi}_{\beta,\infty}$. Здесь излагаются результаты, которые являются распространением результатов предыдущего пункта на случай, когда вместо классических сумм Зигмунда рассматриваются суммы $Z^{\varphi}_n(f; x)$, определяемые соотношением (2″). Будем придерживаться всех обозначений, принятых в п. 5, только на этот раз полагаем $g(v) = \psi(v)/\varphi(v)$. Как и раньше, будем считать функцию $g(v)$ выпуклой вверх или вниз и различать случаи а) – д) из (45). Все утверждения, которые излагаются в этом пункте, получены И. Б. Ковальской [29].

В дальнейшем полагаем

$$\mathscr{E}(C^{\psi}_{\beta,\infty}; Z^{\varphi}_n) = \sup\{|f(x) - Z^{\varphi}_n(f;x)|: \ f \in C^{\psi}_{\beta,\infty}\}.$$

Теорема 22. *Пусть* $\sin\dfrac{\beta\pi}{2} = 0$, $\psi \in \mathfrak{M}$ *и, кроме того, для каждого* $n \in N$ *найдется постоянная* K_1 *такая, что*

$$\frac{n|\psi'(n)|}{\psi(n)} \le K_1.$$

Тогда если функция $g(v)$ *удовлетворяет условиям* б) *или* г) *или же* $g(v)$ *удовлетворяет условиям* а) *или* в) *из* (45) *и, к тому же,*

$$\frac{n|\varphi'(n)|}{\varphi(n)} \le K_2 \qquad \forall\, n \in N, \quad K_2 = \text{const},$$

то при $n \to \infty$ *выполняется равенство*

$$\mathscr{E}(C^{\psi}_{\beta,\infty}; Z^{\varphi}_n) = \psi(n)\,A(\tau_n) + O(1)\,\frac{\psi(n)}{n}, \tag{51}$$

где $A(\tau_n)$ *— величина, определяемая равенством* (44) *при*

$$\tau_n(v) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(n)}{\psi(n)}\left(\dfrac{\psi'(1)\varphi'(1) - \varphi'(1)\psi'(1)}{\varphi^2(1)}(nv-1) + \dfrac{\psi(1)}{\varphi(1)}\right), & 0 \le v \le \dfrac{1}{n}; \\[2ex] \dfrac{\varphi(n)\psi(nv)}{\psi(n)\varphi(nv)}, & \dfrac{1}{n} \le v \le 1; \\[2ex] \dfrac{\psi(nv)}{\psi(n)}, & v \ge 1. \end{cases} \tag{52}$$

При этом $A(\tau_n) = O(1)$.

Эта теорема является аналогом теоремы 16. Примерами пар функций ψ и φ, для которых она справедлива, есть пары $\psi(v) = v^{-r}\ln^{\alpha}(v+e)$, $\varphi(v) = v^{-s}\ln^{\beta}(v+e)$, где $0 < r < s$, α и β — любые действительные числа; $\psi(v) = v^{-r}\operatorname{arctg} v$, $\varphi(v) = v^{-r}$, $r > 0$; $\psi(v) = \ln^{-\alpha}(v+e)(C + e^{-v})$, $\varphi(v) = \ln^{-\alpha}(v + e)$, $\alpha > 0$ и др.

Теорема 22′. *Пусть* $\sin\dfrac{\beta\pi}{2} = 0$, $\psi \in \mathfrak{M}$, *выполнено условие* д) *из* (45). *Тогда если*

$$\lim_{v\to\infty} \frac{v|\psi'(v)|}{\varphi(v)} = 0,$$

то при $n \to \infty$

$$\mathscr{E}(C^{\psi}_{\beta,\infty}; Z^{\varphi}_n) =$$

$$= \varphi(n) \sup_{f \in C^{\psi}_{\beta,\infty}} \|f^{\varphi}\|_C + O(1)\left(\psi(n) + n|\psi'(n)| + \frac{n|\varphi'(n)|\psi(n)}{\varphi(n)}\right), \tag{53}$$

где $f^{\varphi}(x)$ *— непрерывная функция, для которой*

$$S[f^{\varphi}] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi(k)} A_k(f; x). \tag{54}$$

Понятно, что утверждение этой теоремы — аналог теоремы 16′. Следующие утверждения относятся к случаю, когда $\sin\frac{\beta\pi}{2} \neq 0$.

Теорема 23. *Пусть* $\sin\frac{\beta\pi}{2} \neq 0$, $\psi \in \mathfrak{M}'$, *функция* $g(v)$ *выпукла вниз и, кроме того, выполнены условия*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\psi(n)}{n\varphi(n)} > 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n|\varphi'(n)|}{\varphi(n)} \leq C = \text{const}.$$

Тогда при $n \to \infty$

$$\mathscr{E}(C^{\psi}_{\beta,\infty}; Z^{\varphi}_n) = \psi(n) A(\tau_n) + O(1)\frac{\psi(n)}{n}, \tag{55}$$

где $A(\tau_n)$ *— величина, определяемая равенством* (44) *при* $\tau_n(v)$, *задающейся формулой* (52). *При этом*

$$\frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right| \frac{1}{\psi(n)} \int_n^{\infty} \frac{\psi(t)}{t}\,dt \leq A(\tau_n) < \frac{2\pi}{\psi(n)} \int_n^{\infty} \frac{\psi(t)}{t}\,dt + O(1).$$

Теорема 24. *Пусть* $\sin\frac{\beta\pi}{2} \neq 0$, $\psi \in \mathfrak{M}'$, *функция* $g(v)$ *выпукла вверх и, кроме того,*

$$\lim_{v\to\infty} \frac{v|\psi'(v)|}{\psi(v)} < C = \text{const}, \qquad \int_1^n \frac{\psi(t)}{t\varphi(t)}\,dt = O(1)\frac{\psi(n)}{\varphi(n)}.$$

Тогда при $n \to \infty$

$$\mathscr{E}(C^{\psi}_{\beta,\infty}; Z^{\varphi}_n) = \psi(n) A(\tau^{(1)}_n) + O(1)\psi(n), \tag{56}$$

где $A(\tau^{(1)}_n)$ *— величина, определяемая равенством* (44) *при* $\tau^{(1)}_n(v)$, *задающейся формулой*

$$\tau^{(1)}_n(v) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(n)\psi(1)}{\psi(n)\varphi(1)}(nv)^{\alpha}, \quad \alpha = \dfrac{\psi'(1)}{\psi(1)} - \dfrac{\varphi'(1)}{\varphi(1)}, & 0 \leq v \leq \dfrac{1}{n}; \\[2ex] \dfrac{\varphi(n)}{\psi(n)}\dfrac{\psi(nv)}{\varphi(nv)}, & \dfrac{1}{n} \leq v \leq 1; \\[2ex] \dfrac{\psi(nv)}{\psi(n)}, & v \geq 1. \end{cases}$$

При этом

$$\frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right| \frac{1}{\psi(n)} \int_n^{\infty} \frac{\psi(t)}{t}\,dt \leq A(\tau^{(1)}_n) \leq \frac{2\pi}{\psi(n)} \int_n^{\infty} \frac{\psi(t)}{t}\,dt + O(1).$$

Теорема 25. *Пусть* $\sin\frac{\beta\pi}{2} \neq 0$, $\psi \in \mathfrak{M}$, *функция* $g(v)$ *выпукла вверх и, кроме того,*

$$\psi(n)\left(\int_n^\infty \frac{\psi(t)}{t}\,dt\right)^{-1} = o\left(\frac{n|\varphi'(n)|}{\varphi(n)}\right),$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{1}{\psi(n)}\int_n^\infty \frac{\psi(t)}{t}\,dt = \infty, \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{\varphi(n)}{\psi(n)}\int_1^n \frac{\psi(t)}{t\varphi(t)}\,dt = \infty.$$

Тогда при $n\to\infty$

$$\mathscr{E}(C^\psi_{\beta,\infty}) = \psi(n)\,A(\tau_n^{(1)}) + O(1)\,\varphi(n), \tag{57}$$

где $\tau_n^{(1)}(v)$ *— такая же функция, как и в теореме* 24. *При этом*

$$\frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\frac{1}{\psi(n)}\int_n^\infty \frac{\psi(t)}{t}\,dt \le A(\tau_n^{(1)}) \le$$

$$\le \frac{2\pi}{\psi(n)}\int_n^\infty \frac{\psi(t)}{t}\,dt + \frac{4\varphi(n)}{\psi(n)}\int_1^{n'} \frac{\psi(t)}{t\varphi(t)}\,dt + O(1).$$

Нетрудно проверить, что условиям теоремы 25 удовлетворяют, например, функции $\psi(v) = \ln^{-\alpha}(v+e)$ и $\varphi(v) = \ln^{-3\alpha/2}(v+e)$ при любом $\alpha>1$.

Теорема 26. *Пусть* $\sin\frac{\beta\pi}{2}\neq 0$ *и* $\psi\in\mathfrak{M}$. *Тогда если функция* $g(v)$ *выпукла вверх или вниз и, кроме того,*

$$\lim_{v\to\infty} g(v) = c, \qquad 0<c<\infty,$$

$$\frac{n|\varphi'(n)|}{\varphi(n)} \le C = \text{const}, \tag{58}$$

или когда $g(v)$ *выпукла вверх и, кроме того, наряду с* (58) *выполняются соотношения*

$$\lim_{v\to\infty} g(v) = \infty, \qquad \int_n^\infty \frac{\psi(t)}{t}\,dt = O(1)\,\psi(n),$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{\varphi(n)}{\psi(n)}\int_1^n \frac{\psi(t)}{t\varphi(t)}\,dt = \infty,$$

то справедливо асимптотическое равенство

$$\mathscr{E}(C^\psi_{\beta,\infty}; Z_n^\varphi) = \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\varphi(n)\int_1^n \frac{\psi(t)}{t\varphi(t)}\,dt + O(1)\,\psi(n). \tag{59}$$

Условия этой теоремы выполняются, если, например, $\psi(v) = \varphi(v)\,(e^{-v}+c)$, $c>0$, $\psi(v) = \varphi(v)\ln^\alpha(v+e)$, $\alpha\ge 0$, $\psi(v) = \varphi(v)\,\mathrm{arc\,tg}\,v$, где $\varphi(v)$ — произвольная функция, удовлетворяющая условию (58).

Теорема 27. *Пусть* $\sin\frac{\beta\pi}{2}\neq 0$, $\psi\in\mathfrak{M}$ *и, кроме того,*

$$\lim_{n\to\infty}\int_n^\infty \frac{\psi(t)}{t\varphi(t)}\,dt = C>0, \qquad \lim_{v\to\infty}\frac{v|\psi'(v)|}{\varphi(v)} = 0.$$

Тогда при $n\to\infty$

$$\mathscr{E}(C^{\psi}_{\beta,\infty}; Z^{\varphi}_n) =$$

$$= \varphi(n) \sup_{f \in C^{\psi}_{\beta,\infty}} \|f^{\varphi}\|_C + O(1)\left(n|\psi'(n)| + \varphi(n)\psi(n) + \varphi(n)\int\limits_n^{\infty} \frac{\psi(t)}{t\varphi(t)}\, dt \right), \qquad (60)$$

где $f^{\varphi}(x)$ *— непрерывная функция, для которой*

$$S[f^{\varphi}] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi(k)} A_k(f; x).$$

7. Обобщенные суммы Зигмунда на классах $L^{\psi}_{\beta,1}$**.** На основании идей и методов, изложенных в [25], в работе [29] установлено, что утверждения теорем 22 – 27 *остаются справедливыми и тогда, когда в левых частях равенств* (51), (53), (55) – (57), (59) *и* (60) *вместо величин* $\mathscr{E}(C^{\psi}_{\beta,\infty}; Z^{\varphi}_n)$ *стоят величины*

$$\mathscr{E}(L^{\psi}_{\beta,1}; Z^{\varphi}_n)_1 = \sup\{\|f(\cdot) - Z^{\varphi}_n(f;\cdot)\|_1 : \ f \in L^{\psi}_{\beta,1}\}.$$

При этом в правых частях равенств (53) *и* (60) *вместо величины*

$$\sup_{f \in C_{\beta,\infty}} \|f^{\varphi}\|_C$$

следует взять величину

$$\sup_{f \in L_{\beta,1}} \|f^{\varphi}\|_1,$$

где f^{φ} *— интегрируемая функция, для которой справедливо равенство* (54).

Таким образом, в пространстве L_1 справедливы аналоги теорем 22 – 27.

1. *Zygmund A.* Smooth functions // Duke Math. J. – 1945. – **12**. – P. 47–76.
2. *Fejer L.* Untersuchungen über Fouriersche Reihen // Math. Ann. – 1904. – **58**. – S. 501–569.
3. *Bochner S.* Summation of multiple Fourier series by spherical means // Trans. Amer. Math. Soc. – 1936. – **40**, № 2. – P. 175–207.
4. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.
5. *Du Bois Reymond.* Untersuchungen über die Convergenz und Divergenz der Fourierschen Darstellunge Formeln // Abh. Akad. München. – 1876. – **12**. – S. 103–117.
6. *Бернштейн С. Н.* О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени // Сообщ. Харьк. мат. о-ва. – 1912. – **2**, № 13. – С. 49–194.
7. *Привалов И. И.* Sur les fonctions conjuguées // Bull. Soc. math. France. – 1916. – **44**. – P. 100–103.
8. *Alexits G.* Sur l'ordre de grandeur de l'approximation d'une fonction par les moyennes de la série Fourier // Math. fiz. lapok. – 1941. – **48**. – P. 410–433.
9. *Butzer P., Nessel J. R.* Fourier analysis and approximation. – Basel: Birhäuser, 1971. – 553 p.
10. *Zygmund A.* The approximation of functions by tipical means of their Fourier series // Duke Math. J. – 1945. – **12**. – P. 695–704.
11. *Zamansky M.* Classes de saturation de certains procédés d'approximation de séries Fourier des fonctions continues et applications à quelques problèmes d'approximation // Ann. Sci. Ecole norm. supér. – 1949. – **66**. – P. 19–93.
12. *Favard J.* Sur les meilleurs procédés d'approximation de certaines classes de fonctions par les polynomes trigonométriques // Bull. Soc. math. France. – 1937. – **2**. – P. 209–224; ***61***. – *P.* 243–256.
13. *Никольский С. М.* Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1945. – **15**. – С. 1–76.

14. *Теляковский С. А.* Приближение функций, дифференцируемых в смысле Вейля, суммами Валле Пуссена // Докл. АН СССР. – 1960. – **131**, № 2. – С. 259–262.
15. *Никольский С. М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1946. – **10**, № 3. – С. 207–256.
16. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения. – М.: Наука, 1976. – 320 с.
17. *Nagy B.* Sur une générale procédés de sommation pour les séries de Fourier // Hung. Acta Math. – 1948. – № 3. – P. 14–62.
18. *Теляковский С. А.* О нормах тригонометрических полиномов и приближении дифференцируемых функций линейными средними их рядов Фурье. I // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1961. – **62**. – С. 61–97.
19. *Теляковский С. А.* О приближении дифференцируемых функций линейными средними их рядов Фурье // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1960. – **24**, № 2. – С. 213–242.
20. *Ефимов А. В.* О приближении некоторых классов непрерывных функций суммами Фурье и суммами Фейера // Там же. – 1958. – **22**, № 1. – С. 81–116.
21. *Ефимов А. В.* Линейные методы приближения некоторых классов непрерывных периодических функций // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1961. – **62**. – С. 3–47.
22. *Ефимов А. В.* О линейных методах суммирования рядов Фурье // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1960. – **24**, № 5. – С. 743–756.
23. *Степанец А. И.* Равномерные приближения тригонометрическими полиномами. – Киев: Наук. думка, 1981. – 340 с.
24. *Теляковский С. А.* Приближение функций, удовлетворяющих условию Липшица, суммами Фейера // Укр. мат. журн. – 1969. – **21**, № 3. – С. 334–343.
25. *Стечкин С. Б., Теляковский С. А.* О приближении дифференцируемых функций тригонометрическими полиномами в метрике *L* // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1967. – **88**. – С. 20–29.
26. *Моторный В. П.* Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами в среднем // Мат. заметки. – 1974. – **16**, № 1. – С. 15–26.
27. *Бушев Д. Н.* Приближение классов периодических функций линейными средними их рядов Фурье: Дис. … канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1984. – 152 с. – Машинопись.
28. *Бушев Д. Н., Степанец А. И.* О приближении слабо дифференцируемых периодических функций // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 3. – С. 405–412.
29. *Ковальская И. Б.* Приближение периодических функций суммами Зигмунда и их аналогами: Дис. … канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1987. – 130 с. – Машинопись.

Получено 19.08.97