УДК 512.544

В. И. Сенашов (ВЦ СО РАН, Красноярск)

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ПОЧТИ СЛОЙНОЙ КОНЕЧНОСТИ ГРУППЫ *

We prove a theorem which characterizes almost layer-finite groups in the class of conjugatively biprimitively-finite groups.

Доведено теорему, що характеризує майже шарово скінченні групи в класі спряжено біпримітивно скінченних груп.

Слойно конечные группы впервые введены С. Н. Черниковым и полностью описаны в его монографии [1]. Конечные расширения слойно конечных групп — почти слойно конечные группы — представляют собой более широкий класс, в который, в частности, входят все черниковские группы. В настоящей работе доказана теорема, характеризующая класс почти слойно конечных групп в классе сопряженно бипримитивно конечных групп.

Теорема. *Произвольная сопряженно бипримитивно конечная группа с сильно вложенной подгруппой либо почти слойно конечна, либо содержит собственную не почти слойно конечную подгруппу.*

Эта теорема обобщает результат автора для групп без инволюций из [2]. При доказательстве теоремы использован метод Шункова из [3] (см. также [4]).

Условие сопряженно бипримитивной конечности в теореме отбросить нельзя ввиду примеров групп Новикова – Адяна [5] и Ольшанского [6]. Напомним, что группа G удовлетворяет условию сопряженно бипримитивной конечности, если для любой ее конечной подгруппы H в фактор-группе $N_G(H)/H$ два любых сопряженных элемента простого порядка порождают конечную подгруппу.

Напомним определения специальных терминов, использующихся в работе.

Группа называется *слойно конечной*, если множество ее элементов любого порядка конечно.

Подгруппа H группы G называется *бесконечно изолированной* в G, если H содержит централизаторы всех своих элементов простых порядков, имеющие бесконечные пересечения с H.

Группа называется 2-*полной*, если ее силовские 2-подгруппы полные.

Подгруппа H группы G называется *сильно вложенной* в G, если H — собственная подгруппа группы G, содержащая инволюции, и $H \cap x^{-1}Hx$ не содержит инволюций для $x \in G \setminus H$.

Элемент с конечным централизатором в группе G называется почти *регулярным элементом* группы G.

Элемент второго порядка называется *инволюцией*.

Элемент называется *строго вещественным относительно инволюции*, если при сопряжении этой инволюцией он переходит в обратный.

Нам понадобятся следующие известные результаты, на которые мы будем ссылаться как на предложения с соответствующим номером.

1. Произвольная сопряженно бипримитивно конечная группа с условием минимальности для абелевых подгрупп является черниковской [7].

2. Если периодическая группа содержит почти регулярную инволюцию, то она локально конечна, почти разрешима и имеет полную часть [8].

3. Абелева p-группа тогда и только тогда является черниковской группой, когда ее нижний слой конечен (см., например, [1]).

4. Пусть G — локально конечная группа, i — некоторая ее инволюция и некоторая силовская 2-подгруппа из G является циклической или обобщен-

---

* Выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 96-01-00400).

ной группой кватернионов. Тогда $G = O_{2'}(G) \cdot C_G(i)$ [9, 10].

5. Локально конечная группа с условием примарной минимальности для локально разрешимых подгрупп почти локально разрешима [11].

6. Пусть G — группа, H — ее сильно вложенная подгруппа, i — инволюция из H, удовлетворяющая условию: $\text{гр}(i, i^g)$, $g \in G \setminus H$, конечна. Тогда для инволюции j из $G \setminus H$ множество элементов из H, строго вещественных относительно j, имеет ту же мощность, что и множество инволюций из H; силовские 2-подгруппы из H являются силовскими в G; все инволюции в G сопряжены между собой; все инволюции из H сопряжены в H (предложение 1.39 из [4]).

7. 2-группа, содержащая только одну инволюцию, является либо локально циклической группой (циклической или квазициклической), либо обобщенной группой кватернионов (конечной или бесконечной) [12].

8. Произвольная черниковская p-группа имеет нетривиальный центр (см., например, [1]).

9. Слойно конечная группа содержит полную часть, причем последняя содержится в ее центре (см., например, [1]).

10. Пусть G — периодическая сопряженно бипримитивно конечная группа с инволюциями, нормализатор любой конечной нетривиальной подгруппы из G, содержащий инволюции, имеет черниковскую периодическую часть. Тогда G содержит черниковскую периодическую часть.

Утверждение предложения 10 вытекает из теоремы 3.1 из [4].

11. Пусть G — локально конечная группа, которая не является почти локально разрешимой, и H — ее сильно вложенная подгруппа. Тогда $G / O_{2'}(G)$ либо имеет единственную инволюцию либо содержит нормальную подгруппу нечетного индекса, которая изоморфна одной из групп: $SL(2, K)$, $Sz(K)$, $PSU(3, K)$, где K — бесконечное локально конечное поле характеристики 2 [9].

12. Пусть G — конечная группа вида $G = O_{p'}(G) \leftthreetimes R$, где R — элементарная абелева подгруппа порядка p^2. Тогда $O_{p'}(G)$ порождается централизаторами неединичных элементов из R [13].

13. Произвольная сопряженно бипримитивно конечная группа без инволюций либо почти слойно конечна, либо содержит собственную не почти слойно конечную подгруппу [2].

14. В бесконечной локально конечной группе четверная подгруппа Клейна содержит инволюцию с бесконечным централизатором [11].

15. Периодическая почти локально разрешимая группа с конечными силовскими примарными подгруппами финитно аппроксимируема [14].

16. **Лемма Бусаркина.** *Пусть G — группа, i — ее инволюция и $C_G(i) = (i)$. Далее, предположим, что в G все подгруппы вида* $\text{гр}(i, i^g)$, $g \in G$, *конечны.*

Тогда $G = F \leftthreetimes (i)$, где F — периодическая абелева подгруппа из G и все элементы из F строго вещественны относительно i (см., например, [4]).

17. Если бесконечная периодическая группа имеет почти регулярную инволюцию, то в ней существует бесконечная абелева подгруппа, все элементы которой строго вещественны относительно этой инволюции [8].

18. Пусть G — группа, P — p-подгруппа из G, V — нормальная p'-подгруппа из G. Тогда в $\overline{G} = G / V$ выполняется соотношение $C_{\overline{G}}(PV / V) = C_G(P) V / V$ (см., например, [4]).

19. В черниковской группе существует лишь конечное число классов сопряженных конечных разрешимых подгрупп заданного порядка [15].

20. В локально конечной группе со всеми черниковскими силовскими подгруппами силовские p-подгруппы сопряжены [16].

21. Пусть G — группа, H — ее подгруппа, a — некоторый элемент простого порядка $p \neq 2$ из H, удовлетворяющие условиям:

а) (G, H) — пара Фробениуса, т. е. $H \cap g^{-1} H g = 1$ для любого $g \in G \setminus H$;

б) для любого $g \in G \setminus H$ группа $\text{гр}(a, g^{-1} a g)$ конечна.

Тогда $G = F_p \leftthreetimes H$, где F_p — периодическая группа, не содержащая p-элементов, а H либо имеет единственную инволюцию, либо $H = N_G((a))$ [17].

Определение. *Пусть G — локально конечная группа Фробениуса вида $G = F \leftthreetimes L$, где F — ядро, L — дополнение. В голоморфе $\Gamma(G)$ возьмем подгруппу $T = F \leftthreetimes H$, где $H = L \leftthreetimes (t)$, t — элемент порядка $m \geq 1$, индуцирующий в некоторой силовской p-подгруппе из L автоморфизм порядка m, не делящегося на p. Группа T называется квазифробениусовой (по модулю p).*

22. Пусть G — периодическая разрешимая почти нильпотентная группа без инволюций, $L(G)$ — ее нильпотентный радикал, a — элемент простого порядка p. Если $\text{гр}(L(G), C_G(a))$ — группа Фробениуса с дополнением $C_G(a)$, то G — квазифробениусова группа по модулю p (лемма 4.27 из [18]).

23. Если H — слойно конечная группа с конечными силовскими p-подгруппами и p — произвольное простое число, то максимальный нормальный делитель H^p группы H, не содержащий p-элементов, имеет конечный индекс в H [1].

24. Пусть G — группа вида $A \leftthreetimes (i)$, где i — инволюция, A имеет нормальный ряд $1 < Q < A$ с абелевыми 2-полными факторами, причем $i c i = c^{-1}$, $(iQ) b (iQ) = b^{-1}$, $c \in Q$, $b \in A / Q$. Тогда A абелева и $i a i = a^{-1}$, $a \in A$ (предложение 3.2 из [18]).

25. Пусть G — группа, H — ее собственная подгруппа, a — элемент простого порядка $p \neq 2$ из G такие, что: почти для всех (т. е. кроме, быть может, конечного числа) элементов вида $g^{-1} a g$, где $g \in G \setminus H$, подгруппы $L_g = \text{гр}(a, g^{-1} a g)$ являются группами Фробениуса с неинвариантным множителем (a). Тогда либо $G = F \leftthreetimes N_G(a)$ и $F \leftthreetimes (a)$ — группа Фробениуса с ядром F и неинвариантным множителем (a), либо элемент a лежит в конечном нормальном делителе группы G [17].

Перейдем к доказательству теоремы.

Пусть сопряженно бипримитивно конечная группа G с сильно вложенной подгруппой является контрпримером к теореме. Т. е. в группе G любая собственная подгруппа почти слойно конечна, а сама группа G не является почти слойно конечной.

Доказательству теоремы предпошлем леммы $1 - 21$.

Лемма 1. *Силовские p-подгруппы в G черниковские, и группа G не является примарной группой.*

Доказательство. Пусть P — силовская p-подгруппа группы G. Среди ее элементарных абелевых подгрупп, очевидно, найдется максимальная подгруппа R. Бесконечной группа R быть не может ввиду условий теоремы. Следовательно, любая абелева подгруппа из P имеет конечный нижний слой. Тогда согласно предложению 3 абелевы подгруппы P удовлетворяют условию минимальности и согласно предложению 1 P — черниковская группа. Одновременно мы доказали, что G не может быть примарной группой. Лемма доказана.

Лемма 2. *Группа G не локально конечна.*

Доказательство. Пусть группа G локально конечна. Ввиду того, что все ее собственные подгруппы почти слойно конечны, согласно предложению 5 она почти локально разрешима, значит, имеет локально разрешимую подгруппу R конечного индекса. Если R — собственная подгруппа в G, то R почти слойно конечна, следовательно, такой будет и группа G. Противоречие означает локальную разрешимость G. Далее доказательство полностью совпадает с доказательством леммы 3 из [2]. Лемма доказана.

Лемма 3. *Фактор-группа группы G по ее локально конечному радикалу удовлетворяет всем условиям, наложенным на группу G.*

Доказательство леммы 3 полностью совпадает с доказательством леммы 4 из [2]. В дальнейшем считаем, в соответствии с леммой 3, что в G локально конечный радикал единичен.

Лемма 4. *Любая собственная подгруппа из G вкладывается в максимальную почти слойно конечную собственную подгруппу из G.*

Доказательство. Среди всех собственных подгрупп группы G, содержащих данную подгруппу, согласно лемме Цорна найдем максимальную (такая найдется в группе G, поскольку согласно лемме 2 G не локально конечна). Ввиду свойств группы G эта подгруппа будет почти слойно конечной. Лемма доказана.

Для произвольной группы X будем обозначать через $R(X)$ ее слойно конечный радикал.

Лемма 5. *Пусть F, M — две различные бесконечные максимальные почти слойно конечные подгруппы группы G. Тогда $R(F) \cap R(M) = 1$.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 5 из [2].

Лемма 6. *Любая максимальная собственная подгруппа из G является бесконечно изолированной подгруппой.*

Доказательство. Предположим, что утверждение леммы неверно и найдется элемент $a \in H$ простого порядка, для которого $C_G(a)$ не лежит в H и в то же время $|C_G(a) \cap H| = \infty$. Очевидно, пересечение $C_G(a) \cap R(H) = D$ бесконечно. Включим $C_G(a)$ в максимальную почти слойно конечную подгруппу B. Тогда $D \subset H \cap B$. Так как $|H : R(H)| < \infty$, то и индекс $|H : R(H) \cap D|$ конечен. Аналогично $|H : R(H) \cap D| < \infty$. Рассмотрим пересечение $T = (R(H) \cap D) \cap (R(B) \cap D)$. Поскольку пересечение подгрупп конечного индекса в группе само имеет конечный индекс в ней, индекс $|D : T|$ конечен. Следовательно, пересечение $R(H) \cap R(B)$ нетривиально и согласно лемме 5 $B = H$. Противоречие. Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть b — элемент простого порядка и пересечения $C_G(b) \cap H$, $C_G(a) \cap H^g$ бесконечны, где H — максимально собственная подгруппа группы G. Тогда $H = H^g$.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 8 из [2].

Лемма 8. *Можно считать, не нарушая общности рассуждений, что группа G содержит инволюции.*

Доказательство. Действительно, если группа G не содержит инволюций, то справедливость теоремы вытекает из предложения 13.

Лемма 9. *Все инволюции в G имеют бесконечные централизаторы.*

Доказательство. Предположим, что некоторая инволюция имеет конечный централизатор в группе G. Тогда согласно предложению 2 группа G будет локально конечной, что противоречит лемме 2. (Предложением 2 можно воспользоваться, так как G является периодической группой ввиду почти слойной конечности всех ее подгрупп.) Лемма доказана.

Обозначим через V максимальную почти слойно конечную подгруппу из G, содержащую инволюции.

Лемма 10. *В V все инволюции с бесконечными централизаторами в V порождают конечную подгруппу.*

Доказательство. Предположим, что это не так, и группа, порожденная инволюциями из V с бесконечными централизаторами в V, бесконечна. Ввиду строения почти слойно конечной группы и леммы Дицмана в этом случае в V найдется инволюция i с бесконечным $C_V(i)$, для которой индекс $|V : C_V(i)|$ бесконечен. Обозначим через $\mathfrak{N}$ класс инволюций из V, сопряженных с i в V. Для произвольного элемента $g \in G \setminus V$ рассмотрим подгруппу $V^g = g^{-1} V g$ и ее подмножество $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}^g = g^{-1} \mathfrak{N} g$. Ввиду почти слойной конечности собственных подгрупп группы G любые две инволюции из множеств $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{M}$ порождают конечные подгруппы. Тогда для произвольной фиксированной инволюции x из $\mathfrak{N}$ элементы $b_t = xt$, $t \in \mathfrak{M}$, имеют конечные порядки.

Если для бесконечного подмножества $\mathfrak{U}$ из $\mathfrak{M}$ порядки элементов b_t, $t \in \mathfrak{U}$, нечетны, то согласно свойствам групп диэдра в (b_t) найдется элемент c_t со свойством $c_t^{-1} t c_t = x$. Так как $t \in \mathfrak{U} \leq \mathfrak{M}$, то $t = g^{-1} r g$ для некоторой инволюции r из $\mathfrak{N}$. Отсюда получим $c_t^{-1} g^{-1} r g c_t = x$. Обозначая $h_t = g c_t$, получаем $x \in h_t^{-1} V h_t = V_t$. Согласно определению множества $\mathfrak{U}$ инволюции x, r сопряжены с i в V и согласно предположению имеют бесконечные централизаторы в V. Отсюда централизатор инволюции x в V также бесконечен и согласно лемме 6 $C_G(x) < V \bigcap V_t$. Тогда по лемме 7 $V = V_t$. Ввиду максимальности V и согласно свойствам группы G $h_t \in V = N_G(V)$. Элемент g можно представить в виде $g = h_t c_t^{-1}$, $t \in \mathfrak{U}$, тогда $Vg = V c_t^{-1}$, $t \in \mathfrak{U}$.

Для двух различных инволюций t_1, t_2 из $\mathfrak{U}$ соответствующие строго вещественные элементы c_{t_1}, c_{t_2} также различны. Иначе из их совпадения вытекало бы равенство $c_{t_1}^{-1} t_1 c_{t_1} = c_{t_2}^{-1} t_2 c_{t_2}$, что невозможно для различных t_1, t_2. Согласно свойствам групп диэдра элемент $j_t = x c_t^{-1}$ из Vg является инволюцией. Множество таких инволюций по мощности совпадает с мощностью множества $\mathfrak{U}$ и, значит, бесконечно. В качестве представителя смежного класса Vg возьмем инволюцию $k = x c_t^{-1}$ для некоторого t из $\mathfrak{U}$. Тогда инволюцию j_t можно представить в виде $j_t = s_t k$, $t \in \mathfrak{U}$, где $s_t \in V$ и является строго вещественным относительно инволюции j ввиду $(s_t k)^2 = k^2 = 1$ (отсюда $k^{-1} s_t k = s_t^{-1}$).

Очевидно, группа $Z = \text{гр}(s_t | t \in \mathfrak{U})$ бесконечна и $Z < V$. Инволюция k нормализует Z и не лежит в V. Включим $N_G(Z)$ (отличный от G по свойствам группы G) в максимальную собственную подгруппу M группы G. Пересечение $V \bigcap M$ бесконечно (в нем содержится подгруппа Z). Отсюда согласно лемме 5 получаем совпадение $V = M$ и включение $k \in V$ вопреки выбору k.

Противоречие означает, что для любого элемента $x \in \mathfrak{N}$ найдется бесконечное подмножество $\mathfrak{U}_x$ множества $\mathfrak{M}$ такое, что порядки элементов $b_t = xt$, $t \in \mathfrak{U}$, нечетны. Обозначим через $\mathfrak{B}$ множество инволюций вида $j_t \in (b_t)$, $t \in \mathfrak{U}$. Согласно свойствам групп диэдра и лемме 6 $\mathfrak{B} \leq V \bigcap V^g$. Ввиду максимальности V из бесконечности множества $\mathfrak{B}$ следовало бы согласно лемме 5 совпадение $V = V^g$, что противоречило бы выбору пары V, g. Следовательно, $\mathfrak{B}$ — конечное множество и, не нарушая общности рассуждений, будем считать, что оно состоит из одной инволюции j_x. Согласно свойствам групп диэдра (x), $\mathfrak{U} \subset C_G(jx)$ и $\mathfrak{U}$ — бесконечное множество инволюций из V^g. Согласно лемме 6 $x \in C_G(jx) \leq V^g$. Отсюда ввиду произвольности выбора инволюции x из

$\mathfrak{N}$ получаем $\mathfrak{N} \leq V \cap V^g$. Как и выше в такой ситуации, приходим к противоречию с выбором пары V, g. Лемма доказана.

Лемма 11. *В группе* V *нет элементарной абелевой подгруппы* 8-*го порядка с почти регулярной инволюцией в* V.

Доказательство. Пусть лемма неверна и F — подгруппа восьмого порядка из V, j — ее почти регулярная в V инволюция.

Согласно предложению 14 F содержит инволюцию с бесконечным централизатором в V. Пусть это будет i. Аналогично, так как $F = (i) \times K$, где K — группа диэдра, можно считать, что некоторая инволюция l также не является почти регулярной в V. Поскольку i находится в конечном нормальном в V делителе V_i, а l — в конечном нормальном в V делителе V_l, то их произведение il также попадет в конечный нормальный делитель $V_i V_l$ и il также имеет бесконечный централизатор в V. Таким образом, подгруппа $L = (i) \times (l)$ имеет бесконечный централизатор в V. Теперь рассмотрим максимальную в G подгруппу M, содержащую $C_G(j)$. Очевидно $F < C_G(j) \leq M$. Как и выше, найдем в F подгруппу L_1 четвертого порядка с бесконечным централизатором в M. Рассматривая тройку подгрупп L, L_1, F, легко заметить, что пересечение $L \cap L_1$ содержит некоторую инволюцию и централизатор этой инволюции лежит в $V \cap M$. Так как централизатор любой инволюции бесконечен в G, то V, M пересекаются по бесконечной подгруппе, и, значит, по своим слойно конечным радикалам. Противоречие с леммой 5. Лемма доказана.

Лемма 12. *В группе* V *существует лишь конечное число несопряженных конечных разрешимых подгрупп заданного порядка.*

Доказательство. Для черниковской группы утверждение леммы следует из предложения 19. Пусть V — нечерниковская группа.

Пусть сначала в группе V найдется бесконечное множество элементарных абелевых q-подгрупп порядка k

$$L_1, L_2, \ldots, L_n, \ldots .$$

Включим группу L_n в силовскую q-подгруппу Q_n из V, $n = 1, 2, \ldots$. Согласно лемме 1 силовские примарные подгруппы в V черниковские, поэтому можем применить к V предложение 20, по которому все силовские q-подгруппы $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, \ldots$ сопряжены в V. Теперь согласно предложению 19 внутри Q_n, $n = 1, 2, \ldots$, найдется лишь конечное число несопряженных подгрупп порядка $|L|$ и для элементарных абелевых подгрупп утверждение леммы доказано. Пусть теперь

$$L = L_1, L_2, \ldots, L_n, \ldots$$

— последовательность разрешимых подгрупп заданного порядка k. Доказательство будем вести индукцией по k. Так как все подгруппы последовательности разрешимы, они содержат нормальные элементарные абелевы подгруппы

$$Q = Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, \ldots$$

соответственно. Согласно доказанному выше среди них лишь конечное число несопряженных в V. Не нарушая общности рассуждений, будем считать, что все они сопряжены с Q, т. е.

$$Q_n^{c_n} = Q, \quad c_n \in V, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Рассмотрим $A = N_M(Q)$. Очевидно, $L_n^{c_n} \leq A$, $|L_n^{c_n} / Q| \leq k$, A / Q — почти слойно конечная группа и согласно индуктивному предположению среди $L_1^{c_1}/Q$, $L_2^{c_2}/Q$, … , $L_n^{c_n}/Q$, … только конечное число несопряженных в A/Q подгрупп. Но тогда такое же утверждение верно и для подгрупп начальной последовательности. Лемма доказана.

Лемма 13. *В группе V конечное число классов сопряженных элементарных абелевых подгрупп с конечными централизаторами в V.*

Доказательство. Ввиду того что в слойно конечной группе централизатор любого элемента имеет конечный индекс, достаточно рассмотреть только элементарные абелевы q-подгруппы для $q \in \pi = \pi(V \backslash R(V))$. Поскольку π — конечное множество, а порядки элементарных абелевых q-подгрупп из V не могут возрастать неограниченно для каждого q из π, мы имеем только конечное число вариантов для порядков таких подгрупп. Отсюда вследствие леммы 10 получаем утверждение леммы.

Лемма 14. *Все инволюции с бесконечными централизаторами в V сопряжены в V; если k — инволюция из V и $C_V(k)$ конечен, то k индуцирует автоморфизм в некоторой абелевой нормальной подгруппе конечного индекса из V, переводящий каждый элемент этой подгруппы в обратный.*

Доказательство. Пусть i, k — некоторые инволюции из $R(V)$, не сопряженные в V и имеющие в ней бесконечные централизаторы. Рассмотрим группу $D = \text{гр}(i, t)$, где $t = k^g \notin V$. В случае нечетности порядка элемента it группа D была бы группой Фробениуса и вопреки предположению i, t были бы сопряжены. Значит, it — элемент четного порядка. Обозначим через j инволюцию из (it). Согласно свойствам групп диэдра j является центральной инволюцией в D и, следовательно, лежит в V ввиду ее бесконечной изолированности (лемма 6). Обозначим через S силовскую 2-подгруппу из V, содержащую i и j. Так как в V все силовские 2-подгруппы сопряжены, то можно считать, не нарушая общности рассуждений, что k также лежит в S, причем $i \neq k$, иначе получили бы противоречие с предположением.

Инволюция j имеет конечный централизатор в H, так как иначе ввиду бесконечной изолированности H t попала бы в V вместе с $C_G(j)$.

В силу леммы 9 элементарная абелева 2-подгруппа группы G не может иметь порядок больше 4. Рассмотрим максимальную элементарную абелеву подгруппу $R = (i) \cdot (j)$ из S. Предположим, что все инволюции из S порождают абелеву группу. Тогда $k \in R$, иначе существовала бы элементарная абелева группа восьмого порядка в V. Инволюции i, k содержатся в конечных нормальных делителях в V, значит, V_i, V_k — их нормальные замыкания — конечны в V. Тогда $V_i V_k$ нормальна в V_{ik} и также конечна. Поскольку $j \in$ $\in V_i V_k$, то получаем противоречие с почти регулярностью j в V.

Следовательно, S — неабелева группа. Если инволюция i не лежит в $Z(S)$, то ввиду максимальности R центральная инволюция из S совпадает либо с j, либо с ij. В первом случае j попадает в слойно конечный радикал группы V, а во втором случае, как и выше, получаем противоречие с почти регулярностью j в V. Таким образом, $i \in Z(S)$.

Рассмотрим максимальную в G подгруппу M, содержащую $C_G(t)$. Пусть теперь $D_1 = \text{гр}(i^{g_1}, t)$ взята так, что $i^{g_1} \notin M$. Рассмотрим силовскую 2-подгруппу P из M, содержащую инволюцию t и центральную инволюцию j_1 из D_1 (D_1, как и выше, не является группой Фробениуса). Инволюция j_1 попадет в M вместе с $C_G(t)$. Мы имеем ситуацию , аналогичную таковой в начале доказательства леммы. Как и в том случае, j_1 почти регулярна в M и согласно лемме 9 $R_1 = (t)(j_1)$ является максимальной элементарной абелевой подгруппой в P. Это сразу влечет принадлежность центральной инволюции из P_1 подгруппе R_1. Как и ранее, сразу же исключаются возможности инволюциям j_1 и tj_1 быть центральными в P ввиду их почти регулярности в M. Таким образом, $j \in Z(P)$. Теперь заметим, что $M = V^g$. Действительно, V^g содержит в слойно конечном радикале элемент $t = k^g$. Его же содержит в своем слойно конечном радикале и M. Согласно лемме 5 получаем $M = V^g$. Теперь, учитывая сопряженность силовских подгрупп в M, получаем сопряженность между собой центров силовских подгрупп S и P. Снова используя лемму 9, видим, что эти циклические центры совпадают с (i) и (j) соответственно. Тем самым первое утверждение леммы доказано.

Предположим, что $C_V(k)$ конечен. В этом случае $k \notin R(V)$. Если силовские p-подгруппы из $R(V)$ конечны, то рассмотрим пересечение $R(V) \cap C_G(k)$. Это пересечение конечно и для любого элемента из него согласно предложению 15 найдется нормальный делитель, не содержащий этого элемента. Тогда пересечение всех таких нормальных делителей согласно теореме Пуанкаре само будет иметь конечный индекс в V (указанных нормальных делителей конечное число). Если теперь взять его пересечение с $R(V)$, то получим нормальную подгруппу U конечного индекса в V. Инволюция k действует на U регулярно и, значит, согласно предложению 16 строго вещественно. Таким образом, для конечных силовских подгрупп второе утверждение леммы доказано.

Пусть теперь в V имеются бесконечные силовские подгруппы. Тогда ввиду строения почти слойно конечных групп V будет иметь нетривиальную полную часть $\tilde{V}$. Рассмотрим группу $\tilde{V} \leftthreetimes (k)$. Так как k имеет конечный централизатор в V, то согласно предложению 17 k действует регулярно на $\tilde{V}$ и, значит, в силу предложения 16 и ввиду строения полной части группы V инволюция k переводит любой элемент из $\tilde{V}$ сопряжением в обратный.

В фактор-группе $V / \tilde{V}$ все силовские подгруппы конечны. Как и выше для случая конечных силовских подгрупп, найдем нормальную подгруппу Q конечного индекса в $V / \tilde{V}$, состоящую из строго вещественных элементов относительно $k\tilde{V}$. Согласно предложению 16 Q — абелева группа. Очевидно, выбросив из Q силовские подгруппы по простым числам из $\pi(Q) \cap \pi(\tilde{V})$, мы опять получим абелеву нормальную подгруппу конечного индекса в $V / \tilde{V}$. Согласно предложениям 16, 18 ее полный прообраз в V также будет абелевой нормальной в V подгруппой, состоящей из строго вещественных относительно k элементов. Лемма доказана.

Обозначим через i некоторую инволюцию из центра силовской 2-подгруппы S группы G (такая найдется ввиду предложения 8 и лемм 1, 8). Согласно лемме 4 и ввиду тривиальности локально конечного радикала группы G найдется максимальная собственная почти слойно конечная подгруппа H, содержащая $C_G(i)$. Зафиксируем в дальнейшем введенные обозначения i, S, H.

Согласно предположению группа G содержит сильно вложенную подгруппу. Из определения сильно вложенной подгруппы с помощью предложения 6 легко покажем, что H также имеет сильно вложенную подгруппу. Тогда из предложения 6 для произвольной инволюции k из H имеем $k^h = i$ для некоторого элемента $h \in H$. Это означает, что в H все инволюции имеют бесконечные централизаторы в H, и если $H \cap H^g$ содержит некоторую инволюцию, то согласно лемме 7 $H = H^g$. Таким образом, подгруппа H сильно вложена в группу G.

Лемма 15. *Среди собственных подгрупп группы G найдется максимальная* *нечерниковская группа с инволюциями, не являющаяся слойно конечной.*

Доказательство. В силу предложения 10 в группе G найдется собственная нечерниковская подгруппа X с инволюциями. Согласно лемме Цорна и лемме 4 включим X в максимальную собственную нечерниковскую подгруппу B.

Предположим, что B слойно конечна. Если $B \cap B^g$ для некоторого $g \in G \setminus B$ нетривиально, то, учитывая слойную конечность B, согласно лемме 5 получаем $B = B^g$. Тогда $B \neq N_G(B)$. Равенство $N_G(B) = G$ невозможно в силу леммы 3, а строгое включение $N_G(B)$ в G противоречит максимальности B. Таким образом, B пересекается со всеми сопряженными с ней подгруппами тривиально. Так как B является нечерниковской слойно конечной группой, она не может быть примарной группой согласно лемме 1. Тогда вследствие предложения 21 получаем противоречие с леммой 3. Это противоречие показывает, что B не является слойно конечной группой. Лемма доказана.

Обозначим через $\mathfrak{M}$ множество всех конечных подгрупп группы G вида $L_g = \text{гр}\,(a, a^g)$, где элемент a простого порядка p выбираем из H, если H — нечерниковская группа, и $a \in B$ — нечерниковской подгруппе, которая найдется в G согласно лемме 15, если группа H — черниковская ($g \in G \setminus H$ в первом случае и $g \in G \setminus B$ во втором). Причем ввиду сопряженности инволюций в G и сильной изолированности групп B и H в группе B все инволюции почти регулярны.

Ввиду бесконечности множества вариантов выбора порядка элемента a и строения почти слойно конечной группы выберем его порядок таким достаточно большим, что он не делит индекс $|H : R(H)|$, где $R(H)$ — слойно конечный радикал группы H, в первом случае, и не делит индекс $|B : R(B)|$, где $R(B)$ — слойно конечный радикал группы B, во втором случае. Это можно сделать ввиду строения нечерниковской почти слойно конечной группы. Во втором случае будем также предполагать, что $p \notin \pi(H)$. Это можно сделать ввиду черниковости H.

Лемма 16. *Любая группа T четного порядка из множества $\mathfrak{M}$ содержит сильно вложенную подгруппу и никакая сопряженная с T подгруппа не лежит в H.*

Доказательство. Из-за сильной вложенности группы H все инволюции в группе G сопряжены. Подберем элемент b таким образом , чтобы группа T^b содержала инволюцию i.

Пусть сначала H — нечерниковская подгруппа. Предположим, что группа T^b лежит в H. Тогда ввиду выбора числа p элементы a^b, a^{gb} содержатся в слойно конечном радикале группы H и централизаторы $C_H(a^g)$ и $C_H(a^{gb})$ бесконечны. Из леммы 7 и бесконечности $C_H(a)$ следует, что $H = H^{b^{-1}} = H^{b^{-1}g^{-1}}$. Но $H = N_G(H)$ согласно лемме 3 и ввиду максимальности подгруппы H. Следовательно, $b^{-1}, b^{-1}g^{-1} \in H$, что влечет включение $g \in H$, но это противоречит выбору элемента g. Противоречие означает, что группа T^b не лежит в H и пересекается с ней нетривиально. В случае черниковской подгруппы H группа T^b не лежит в H за счет выбора числа p. Таким образом, группа T^b содержит сильно вложенную подгруппу, тогда сильно вложенная подгруппа найдется и в группе T.

Заметим, что попутно мы доказали и вторую часть утверждения леммы. Лемма доказана.

Лемма 17. *Можно считать, не нарушая общности рассуждений, что p выбрано настолько большим, что группы $T \in \mathfrak{M}$ не содержат инволюций.*

Доказательство. Пусть T — произвольная группа четного порядка из $\mathfrak{M}$. Она содержит сильно вложенную подгруппу согласно лемме 16. В силу теоремы Бендера (предложение 11) $T / O_{2'}(T)$ либо имеет единственную инволюцию, либо содержит нормальную подгруппу F нечетного индекса, которая изоморфна одной из групп типа $SL(2,K)$, $Sz(K)$, $PSU(3,K)$, где K — конечное поле характеристики 2.

Рассмотрим сначала вторую возможность. Так как силовские 2-подгруппы в G сопряжены и являются черниковскими, порядок нижнего слоя в группе F ограничен (это элементарная абелева подгруппа). Тогда на основании свойств групп перечисленных выше трех типов их порядки ограничены некоторым числом, не зависящим от p.

Теперь ввиду конечности множества порядков простых подгрупп F в группе $T / O_{2'}(T)$ выберем число p настолько большим, что оно не делит порядков голоморфов этих подгрупп для всех подгрупп T из $\mathfrak{M}$. Т. е. образы элементов a, a^g в фактор-группе централизуют простую компоненту. Тогда они централизуют и силовскую 2-подгруппу $\overline{S}_2$ из $\overline{T}$. Согласно предложению 18 найдутся элементы $b, c \in C_G(S_2)$ такие, что $a \in bO_{2'}(T)$, $a^g \in cO_{2'}(T)$. Но ввиду сопряженности силовских 2-подгрупп в G можем считать, что $S_2 < H$. Тогда ввиду сильной вложенности H элементы b, c лежат в H. Поскольку нижний слой в группе S_2 — нециклическая элементарная абелева подгруппа, согласно предложению 12 $O_{2'}(T) < H$. Теперь получили включение a, $a^g \in H$, что противоречит лемме 16.

Пусть имеет место первая возможность, т. е. $T / O_{2'}(T)$ имеет единственную инволюцию. В этом случае силовская 2-подгруппа в ней согласно предложению 7 либо циклическая, либо обобщенная группа кватернионов и в силу предложения 4 группа имеет вид $T = O_{2'}(T) \cdot C_T(k)$, где k — некоторая инволюция из T.

Если H — черниковская группа, то ввиду включения $C_G(k^f) \leq H$ для некоторого $f \in G$ и выбора числа $p \notin \pi(H)$ порождающие элементы группы T принадлежат $O_{2'}(T)$. Это вытекает из изоморфизма групп $T/O_{2'}(T)$ и $C_T(k)/W$, где $W = O_{2'}(T) \cap C_G(k)$. Получили противоречие с тем, что группа T содержит инволюции.

Пусть теперь H — нечерниковская группа. Предположим, что T неразрешима. Обозначим $X = O_{2'}(T) \cap C_T(k)$. Ввиду порождаемости T элементами порядка p и ее неразрешимости фактор-группа $T / O_{2'}(T)$ также содержит элементы порядка p, а отсюда, такие элементы содержит и фактор-группа $C_T(k)/X$, и, значит, $C_T(k)$ имеет p-элементы.

Обозначим через Z подгруппу, порожденную всеми p-элементами из $C_T(k)$. Ввиду сопряженности всех инволюций в G инволюции k, i сопряжены с помощью некоторого элемента l. Отсюда $C_T(k) < H^l$. Тогда $Z < H^l$. Еще немного ограничим возможность для выбора элемента a — в случае нечерниковской группы H будем предполагать, что p не принадлежит конечному множеству $\pi(|H : C_H(K)|)$. Здесь через K обозначили замыкание всех 2-элементов из $R(H)$ в H. Индекс $|H : C_H(K)|$ конечен ввиду черниковости силовской 2-подгруппы из H и свойств слойно конечных групп. Заметим, что группа $C_H(K) \cap R(H)$ локально разрешима.

Теперь ввиду выбора числа p имеем $Z < C_G(K^l) \cap R(H^l)$. Это означает, как мы показали выше, разрешимость Z. Осталось заметить, что $C_T(k) = ZX$ или $T = O_{2'}(T)Z$, чтобы получить разрешимость группы T.

Покажем, что группа T не может быть разрешимой. Действительно, в этом случае в фактор-группе $\overline{T} = T/O_{2'}(T)$ максимальная нормальная 2-подгруппа S централизуется образами порождающих элементов, следовательно, находится в ее центре и является циклической. В фактор-группе по ней, очевидно, уже нет нормальных 2-подгрупп, а ввиду разрешимости T найдется нормальная элементарная абелева q-подгруппа Q и $q \neq 2$. Учитывая строение группы автоморфизмов циклической 2-группы, видим, что полный прообраз в $\overline{T}$ группы Q имеет вид $Q_1 \times S$, где Q_1 — q-подгруппа, и нормален в $\overline{T}$. Но тогда мы получили противоречие с построением подгруппы $O_{2'}(T)$. Противоречие означает, что $\overline{T}$ является 2-группой. Однако это противоречит тому, что T порождается p-элементами. Лемма доказана.

Лемма 18. *Пусть W — сильно вложенная подгруппа из G, T — подгруппа, сопряженная с W в G, h — нетривиальный p-элемент из $D = W \cap T$. Если $C_T(h)$ бесконечен, то и $C_W(h)$ бесконечен, и наоборот.*

Доказательство. Пусть $C_W(h)$ конечен и элементы $g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots$ из $C_T(h)$ такие, что $W_1, W_2, \ldots, W_n, \ldots$ — различные подгруппы, отличные от W. Так как W — сильно вложенная подгруппа, элемент g_n имеет представление $g_n = h_n t_n$, где $h_n \in W$, t_n — инволюция, сопряженная с i в G. Отсюда $W_n = t_n W t_n$. Обозначим через D_n пересечение подгрупп W и W_n. Пусть P_n — силовская p-подгруппа из D_n, содержащая элемент h. Ввиду сильной вложенности W группа гр(D_n, t_n) имеет представление $D_n \lambda(t_n)$, причем инволюцию t_n подберем таким образом, чтобы она нормализовала P_n. Тогда $t_n \in N_G(Z(P_n))$.

Среди подгрупп $Z(P_1), Z(P_2), \ldots, Z(P_n), \ldots$ лишь конечное число различных ввиду конечности централизатора $C_W(h)$. Множество различных подгрупп $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ также не может быть бесконечным, иначе нашлась бы подгруппа P_m, у которой бесконечен $C_W(Z(P_m))$, а это влечет включение $t_m \in N_G(Z(P_m)) \leq W$. Но тогда и $g_m \in W$ вопреки выбору g_m. Поэтому будем считать, не нарушая общности рассуждений, что

$$P = P_1 = P_2 = \ldots = P_n = \ldots$$

и, значит, в нормализаторе $N_G(P)$ содержится бесконечно много инволюций $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$. Бесконечность централизатора $C_T(h)$ и конечность группы P влечет бесконечность пересечения $N_G(P) \cap T$. Отсюда согласно лемме 5 группа T содержит бесконечно много инволюций, но это противоречит сильной вложенности группы T и лемме 10. Противоречие означает, что $C_W(h)$ бесконечен. Лемма доказана.

Лемма 19. *Если H — нечерниковская подгруппа, то простое число p можно выбрать таким достаточно большим, что силовские p-подгруппы в $L_g \in \mathfrak{M}$ — циклические.*

С учетом леммы 17 доказательство леммы 19 аналогично доказательству леммы 13 из [2].

Лемма 20. *Если H — черниковская группа, то группа B почти абелева.*

Доказательство. Согласно предложению 9 слойно конечный радикал T группы B имеет полную часть A, причем $A \leq Z(T)$. Как уже отмечалось, в B

найдется почти регулярная инволюция k, которая ввиду свойств слойно конечных групп лежит в разности $B\setminus T$. В группе $T\leftthreetimes(k)$, очевидно, A является нормальной подгруппой, причем k действует регулярно на A ввиду предложения 17.

Рассмотрим фактор-группу $\overline{T}\leftthreetimes(kA)$, где $\overline{T} = T/A$. Так как $\overline{T}$ не содержит бесконечных силовских подгрупп, то согласно предложению 23 для каждого простого p в $\overline{T}$ найдется p'-подгруппа $\overline{T}_p$ конечного индекса, нормальная в $\overline{T}\leftthreetimes(kA)$. Рассмотрим $\overline{C}$ — пересечение $\overline{T}_p$ по всем $p \in \pi(C_{\overline{T}}(kA))$. Группа $\overline{C}$ имеет конечный индекс в $\overline{T}$ ввиду почти регулярности kA в $\overline{T}\leftthreetimes(kA)$. Группа $\overline{C}$ — абелева, так как имеет регулярный автоморфизм второго порядка. Ввиду локальной конечности $\overline{C}\leftthreetimes(kA)$ и свойств групп Фробениуса подгруппа $\overline{C}$ состоит из элементов, строго вещественных относительно kA.

Поскольку A и C являются абелевыми 2-полными группами, то в силу предложения 24 C — абелева группа. Поскольку она имеет конечный индекс в B, это доказывает утверждение леммы.

Замечание. Ввиду строения нечерниковской почти абелевой почти слойно конечной группы B будем считать, что число p выбрано так, что оно не делит индекс $|B : L(B)|$, где $L(B)$ — нильпотентный радикал группы B (этот индекс конечен, а множество $\pi(B)$ бесконечно).

В дополнение к выбору числа p согласно лемме 13 можем считать, что оно не принадлежит множеству $\bigcup \pi(C_B(K))$, где K пробегает все элементарные абелевы подгруппы из B, имеющие в B конечные централизаторы (это множество в силу леммы 13 конечно) в случае черниковской группы H, и в случае нечерниковской H число $p \notin \pi(C_H(K))$ для элементарных абелевых подгрупп K из H с конечными централизаторами в H.

В дальнейшем будем рассуждать об элементе a из B или из H простого порядка, выбранного согласно замечанию.

Лемма 21. *Если H — черниковская подгруппа, то простое число p можно выбрать таким достаточно большим, что силовские p-подгруппы в $L_g =$ $=$ гр (a, a^g) $(g \in G\setminus B)$ — циклические.*

Доказательство. Так как B — почти нильпотентная группа согласно лемме 20, то она имеет вид $B = L(B)K$, где $L(B)$ — нильпотентный радикал группы B, K — ее конечная подгруппа.

Рассмотрим подгруппы вида $L_g =$ гр (a, a^g), $g \in G\setminus B$. Повторяя рассуждения из доказательства леммы 19 для подгруппы B вместо H, получаем включение $O_{p'}(L_g) \leq B$. Подгруппа R лежит в B ввиду включения $R \leq C_G(a)$. Таким образом, имеем $O_{p'}(L_g)\leftthreetimes R \leq B$.

Ввиду выбора p подгруппа R содержится в нильпотентном радикале $L(B)$ подгруппы B. Пусть Q — силовская q-подгруппа из $O_{p'}(L_g)$. Пользуясь леммой Фраттини, выберем Q таким образом, чтобы Q нормализовалось подгруппой R. Если $Q < L(B)$, то, очевидно, $Q \times R$. Если q — делитель индекса $|B : L(B)|$, то, согласно определению нильпотентного радикала, R нормализуется подгруппой Q. Таким образом, опять получаем $Q \times R$. Поскольку это рассуждение справедливо для любого $q \in \pi(O_{p'}(L_g))$, то заключаем, что $O_{p'}(L_g) < C_G(a)$. Отсюда, ввиду выбора элемента a, следует, что все элементы из $O_{p'}(L_g)$ имеют в B бесконечные централизаторы, согласно лемме 6 целиком лежащие в B. Зафиксируем произвольный элемент $c \neq 1$ из $O_{p'}(L_g)$.

Как показано выше, $a \in C_G(c) \leq B$. Проведя аналогичные рассуждения относительно подгруппы B^g вместо B и элемента a^g вместо a, видим, что $a^g \in$ $\in C_G(c)$, $c \in O_{p'}(L_g)$. Таким образом, $a^g \in B$. Ввиду выбора p, $|C_G(a^g) \cap$ $\cap B| = \infty$. Очевидно, $|C_G(a^g) \cap B^g| = \infty$. Значит, в силу леммы 7 $B = B^g$ для элемента g из $G \setminus B$. Противоречие с выбором подгруппы L_g. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Пусть сначала H — нечерниковская подгруппа. В силу леммы 19 считаем, не нарушая общности рассуждений, что найдется элемент $a \in H$ порядка p такого, что силовская p-подгруппа в L_g — циклическая.

Предположим, что в $C_{L_g}(a)$ нашелся элемент b простого порядка, который перестановочен с нетривиальным элементом c из нильпотентного радикала N_g группы $L_g = \text{гр}\,(a, a^g)$.

Вследствие выбора порядка p элемента a элемент b имеет бесконечный централизатор в H, значит, согласно лемме 6 он целиком содержится в H вместе с элементом c. Отсюда следует, что пересечение $D_g = N_g \cap H$ нетривиально, так как содержит элемент c. Рассмотрим максимальную нормальную элементарную абелеву q-подгруппу A_g из D_g. Если a действует регулярно на A_g, то ввиду строения группы регулярных автоморфизмов q-группы и конечности индекса слойно конечного радикала в почти слойно конечной группе добиваемся за счет выбора p, чтобы q было настолько большим, что оно не делит индекс $|H : R(H)|$. Тогда $A_g < R(H)$. Согласно свойствам слойно конечных групп и лемме 6 $C_G(A_g) \leq H$.

Пусть теперь элемент a перестановочен с нетривиальным элементом из A_g. Тогда либо он централизует всю A_g и снова имеем $C_G(A_g) \leq H$, либо A_g расщепляется: $A_g = B_g \times C_g$, где $C_g < C_G(a)$, а на B_g элемент a действует регулярно. Тогда, как и выше, имеем ограничение на порядок q: q не делит индекс $|H : R(H)|$.

Окончательно получаем независимо от действия a на A_g включение $C_G(A_g) \leq H$, что влечет согласно лемме 5 $N_G(A_g) \leq H$. Тогда $C_G(D_g) \leq H$.

Если $N_g \neq D_g$, то ввиду нормализаторного условия в нильпотентных группах нормализатор подгруппы D_g в N_g отличен от D_g и согласно доказанному лежит в H. Противоречие с построением D_g.

Если же $N_g = D_g$, то ввиду нормальности N_g в L_g и включения $N_G(D_g) \leq$ $\leq H$ получаем $L_g < H$ вопреки выбору группы L_g.

Таким образом, любой элемент простого порядка из $C_G(a)$ действует регулярно на N_g. Тогда согласно предложению 22 и лемме 19 L_g — группа Фробениуса с неинвариантным множителем (a). В силу предложения 25 G содержит нетривиальную нормальную локально конечную подгруппу вопреки лемме 3.

Случай черниковской подгруппы H рассматривается с учетом леммы 21 аналогично с заменой в рассуждениях подгруппы H на подгруппу B. Теорема доказана.

1. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами системы подгрупп. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
2. *Сенашов В. И.* Характеризация групп с условием минимальности для не почти слойно конечных подгрупп // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, №7, 8. – С. 1002 – 1008.

3. *Шунков В. П.* Теоремы вложения для групп с инволюциями и характеризация черниковских групп // Алгебра и логика. – 1988. – **27**, №1 – С. 100 – 121.
4. *Шунков В. П.* О вложении примарных элементов в группе. – Новосибирск: Наука, 1992. – 148 с.
5. *Адян С. И.* Проблема Бернсайда и тождества в группах. – М.: Наука, 1975. – 336 с.
6. *Ольшанский А. Ю.* Геометрия определяющих соотношений в группе. – М.: Наука, 1989. – 448 с.
7. *Сучкова Н. Г., Шунков В. П.* О группах с условием минимальности для абелевых подгрупп // Алгебра и логика. – 1986. – **25**, №4. – С. 445 – 469.
8. *Шунков В. П.* О периодических группах с почти регулярной инволюцией // Там же. – 1972. – **11**, №4. – С. 470 – 493.
9. *Kegel O. H., Wehrfritz B. A. F.* Locally finite groups. – Amsterdam; London: North Holland Publ. Co., 1973. – 256 p.
10. *Hartley B.* Finite groups of automorphisms of locally soluble groups // J. Algebra. – 1979. – **57**, №1. – P. 242 – 257.
11. *Павлюк И. И., Шафиро А. А., Шунков В. П.* О локально конечных группах с условием примарной минимальности для подгрупп // Алгебра и логика. – 1974. – **13**, №3. – С. 324 – 336.
12. *Шунков В. П.* Об одном классе p-групп // Там же. – 1970. – **9**, №4. – С. 484 – 496.
13. *Brauer R., Suzuki M.* On finite groups with an abelian Sylow subgroups // Can. J. Math. – 1962. – **14**. – P. 436 – 450.
14. *Каргаполов М. И.* Локально конечные группы, обладающие нормальными системами с конечными факторами // Сиб. мат. журн. – 1961. – **2**, №6. – С. 853 – 873.
15. *Черников Н. С.* О бесконечно простых локально конечных группах. – Киев, 1982. – 20 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 82.37).
16. *Бусаркин В. М., Горчаков Ю. М.* Конечные расщепляемые группы. – М.: Наука, 1968. – 111 с.
17. *Созутов А. И., Шунков В. П.* Об одном обобщении теоремы Фробениуса на бесконечные группы // Мат. сб. – 1976. – **100**, №4. – С. 495 – 508.
18. *Шунков В. П.* M_p-группы. – М.: Наука, 1990. – 160 с.

Получено 11.12.96,
после доработки — 25.06.97