УДК 517. 968

С. В. Переверзев, М. Азизов (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ОБ ОПТИМАЛЬНЫХ СПОСОБАХ ЗАДАНИЯ ИНФОРМАЦИИ ПРИ РЕШЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С АНАЛИТИЧЕСКИМИ ЯДРАМИ

We find an exact logarithmic order of the minimal radius of information for Fredholm integral equations of the second kind with periodic analytic kernels and free terms. We show that the order of information complexity of finding solutions of Fredholm equations with analytic kernels is greater than the complexity of approximation of analytic functions. This is not the case for Fredholm equations with kernels, which have finite smoothness.

Знайдено точний порядок у логарифмічній шкалі мінімального радіусу інформації для рівнянь Фредгольма другого роду з періодичними аналітичними ядрами та вільними членами. З цього результату випливає, що інформаційна складність розв'язання рівнянь Фредгольма з аналітичними ядрами вища за порядком, ніж складність наближення аналітичних функцій. Це відрізняє аналітичний випадок від випадку скінченної гладкості.

1. Введение и постановка задачи. Вопрос об оптимальных способах задания информации (СЗИ) при решении многих задач математической физики впервые рассматривал Н. С. Бахвалов [1] применительно к задаче Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Для интегральных уравнений данная проблема изучалась в [2], где обсуждался выбор СЗИ для приближенного решения сингулярных интегральных уравнений с ядрами типа Коши и было показано, что информация, использующаяся в квадратурных и коллокационных методах с равноотстоящими узлами, является оптимальной по порядку. Для регулярных (не сингулярных) интегральных уравнений ситуация оказалась принципиально иной. А именно: в [3] установлено, что информация, необходимая для реализации квадратурных и коллокационных методов, не является оптимальной даже по порядку для уравнения Фредгольма второго рода с ядрами и свободными членами конечной гладкости. Оказалось, что для таких уравнений оптимальный по порядку в степенной шкале СЗИ образован набором информационных функционалов того же вида, что и в известном методе Бубнова–Галеркина, но со специальным выбором нумерации этих функционалов. Дальнейшие исследования позволили уточнить упомянутый выше результат [4, 5] и обобщить его на случай операторных уравнений в гильбертовом пространстве [6, 7]. Такое обобщение дало возможность построить оптимальные по порядку в степенной шкале СЗИ для слабо сингулярных интегральных уравнений со степенной и логарифмической особенностями в ядре для уравнений Вольтерра и Фредгольма второго рода с ядрами и свободными членами конечной гладкости.

В настоящее время вопрос об оптимальных СЗИ при приближенном решении тех или иных задач рассматривается в контексте теории информационной сложности [8] и теории оптимального кодировании и восстановления [9]. Например, в обзорных статьях [9, 10] ставятся задачи об информационной сложности и об оптимальном кодировании и восстановлении решений уравнений Фредгольма второго рода. Упомянутые выше работы [4–7] по сути содержат решения этих задач для уравнений Фредгольма с ядрами и свободными членами конечной гладкости. Для уравнений с бесконечно дифференцируемыми, например, аналитическими, ядрами и свободными членами методы работ [4, 6, 7] не могут быть непосредственно использованы при решении вопроса об оптимальных СЗИ, поскольку для случая конечной гладкости в [4, 6, 7] в качестве оценки снизу для порядка погрешности оптимального СЗИ использовался порядок погрешности оптимального восстановления свободных членов соответствующих уравнений Фредгольма. Как будет показано далее, для уравнений с аналитическими ядрами и свободными членами такая оценка снизу является слишком грубой. Поэтому в настоящей работе для получения оценки снизу будет применена идея С. Хейнриха [11], связанная с оценкой числа Гельфанда некоторого специального оператора (функтора), действующего в соответствующем пространстве линейных непрерывных операторов. Отметим также, что рассматриваемый класс уравнений Фредгольма с периодическими аналитическими ядрами и свободными членами является достаточно содержательным. Такие уравнения возникают, например, в рамках метода граничных интегральных уравнений при решении задачи Дирихле для уравнения Лапласа в областях с замкнутой аналитической границей [12].

Пусть V, E и K — линейные нормированные пространства. Пространство линейных непрерывных операторов из V в E будем обозначать через $\mathcal{L}(V, E)$. Кроме того, $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$. Предположим, что V вложено в E с константой вложения 1 и $J_V \in \mathcal{L}(V, E)$ — оператор вложения V в E. Будем предполагать, что существует линейный непрерывный оператор T, ставящий в соответствие каждому элементу $k \in K$ оператор $T_k \in \mathcal{L}(E)$. Зафиксируем некоторые подмножества $V_0 \subset V$ и $K_0 \subset K$ такие, что для любого $k \in K_0$ справедливо включение $(I - T_k)^{-j} \in \mathcal{L}(E)$, где I — тождественный оператор, и обозначим через $X_0 = K_0 \times V_0$ класс операторных уравнений

$$u - T_k u = f, \quad k \in K_0, \quad f \in V_0. \tag{1}$$

Оператор $S: X_0 \to E$, определяемый соотношением

$$S(k, f) = (I - T_k)^{-1} f, \tag{2}$$

называется оператором решения для уравнений (1) из X_0.

Под СЗИ об уравнениях (1) из класса X_0 будем понимать совокупность $N = (N_1, N_2)$ двух произвольных наборов N_1 и N_2 линейных непрерывных функционалов

$$N_1 k = (\lambda_1(k), \lambda_2(k), \ldots, \lambda_{n_1}(k)), \quad \lambda_i \in K^*, \; i = 1, 2, \ldots, n_1,$$

$$N_2 f = (\sigma_1(f), \sigma_2(f), \ldots, \sigma_{n_2}(f)), \quad \sigma_j \in V^*, \; j = 1, 2, \ldots, n_2,$$

где K^* и V^* — пространства, сопряженные к K и V соответственно. Кроме того, через $\operatorname{card}(N)$ будем обозначать общее количество линейных функционалов из СЗИ N, т. е. $\operatorname{card}(N) = n_1 + n_2$.

Под алгоритмом φ приближенного решения уравнений (1) понимаем произвольный оператор, ставящий в соответствие информационному вектору $N(k, f) = (N_1 k, N_2 f) \in R^{n_1 + n_2}$ в качестве приближенного решения уравнения (1) элемент $\varphi(N; k, f) \in E$. При фиксированном СЗИ N обозначим через $\Phi(N)$ множество всех алгоритмов φ, использующих в качестве информации значения компонентов информационного вектора $N(k, f)$. Погрешность алгоритма $\varphi \in \Phi(N)$ на классе X_0 определяется соотношением

$$e(X_0, \varphi) = \sup_{(k, f) \in X_0} \| S(k, f) - \varphi(N; k, f) \|_E.$$

Кроме того, для фиксированного СЗИ $N = (N_1, N_2)$ рассмотрим величину

$$r(X_0, N) = \inf_{\varphi \in \Phi(N)} e(X_0, \varphi),$$

называемую радиусом информации N в классе X_0. Будем рассматривать задачу оптимизации СЗИ в смысле величины

$$r_n(X_0) = \inf_{N:\ \mathrm{card}\,(N) \le n} r(X_0, N),$$

называемой минимальным радиусом информации. Эта величина равна минимальной погрешности, которую можно достигнуть на классе X_0, используя не более чем n значений информационных функционалов (ЗИФ). СЗИ N_0, для которого $\mathrm{card}\,(N_0) \le n$ и $\log r(X_0, N_0) \asymp \log r_n(X_0)$, будем называть оптимальным по порядку СЗИ для класса X_0 в логарифмической шкале.

Настоящая работа посвящена определению порядка величины r_n для класса уравнений Фредгольма второго рода с периодическими ядрами и свободными членами, допускающими по каждой переменной аналитическое продолжение в полосу $\{z = t + i\tau,\ -h < \tau < h\}$ комплексной плоскости.

В дальнейшем нам потребуется связь между минимальным радиусом информации $r_n(X_0)$ и числом Гельфанда некоторого специального оператора. Эта связь установлена в [11, 5] при следующих условиях, налагаемых на класс $X_0 = K_0 \times V_0$.

Пусть B_K и B_V — единичные шары подпространств K и V с центрами в нуле соответственно. Предположим, что существует набор постоянных $\rho = (\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5, \rho_6)$, $\rho_i > 0$, $i = \overline{1, 6}$, таких, что

$$\rho_1 B_K \subset K_0 \subset \rho_2 B_K, \tag{3}$$

и для любых $k \in K_0$

$$\begin{aligned} &\| T_k \|_{E \to E} \le \rho_3, \quad \| (I - T_k)^{-1} \|_{E \to E} \le \rho_4, \\ &\| T_k \|_{V \to V} \le \rho_5, \quad \| (I - T_k)^{-1} \|_{V \to V} \le \rho_6. \end{aligned} \tag{4}$$

Напомним, что m-м числом Гельфанда линейного непрерывного оператора U, действующего из нормированного пространства Y в нормированное пространство Z, называется величина

$$G_m(U:\ Y \to Z) = \inf_{\lambda_i \in Y^*,\, i = \overline{1, m-1}} \ \sup_{\substack{y \in Y,\, \|y\|_Y \le 1 \\ \lambda_i(y) = 0,\, i = \overline{1, m-1}}} \| U y \|_Z.$$

Рассмотрим оператор (функтор) $\Psi:\ K \to \mathcal{L}(V, E)$, ставящий в соответствие $k \in K$ оператор $\Psi_k \in \mathcal{L}(V, E)$, определяемый равенством $\Psi_k = T_k J_V$, где J_V — оператор вложения V в E.

Теорема Хейнриха [5, 11]. *Если множество K_0 удовлетворяет условиям* (3), (4), *а $V_0 = B_V$, то для класса $X_0 = K_0 \times V_0$ справедливо соотношение*

$$r_n(X_0) \asymp \inf_{n_1 + n_2 \le n} \{ G_{n_1}(\Psi:\ K \to \mathcal{L}(V, E)) + G_{n_2}(J_V:\ V \to E) \}.$$

2. Оценка снизу. Определим упомянутый выше класс уравнений Фредгольма с периодическими аналитическимн ядрами и свободными членами. Пусть L_2 — пространство функций, суммируемых в квадрате на $[0, 2\pi]$ с обычной нормой $\| \cdot \|$ и скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$. В этом пространстве рассмотрим ортонормированный базис, образованный тригонометрическими функциями

$$e_0(t) = 1 / \sqrt{2\pi}, \ e_m(t) = \cos(mt) / \sqrt{\pi}, \ e_{-m}(t) = \sin(mt) / \sqrt{\pi}, \quad m = 1, 2, \ldots .$$

Известно, что функции $e_{l,m}(t, \tau) = e_l(t) e_m(\tau)$, $l, m = 0, \pm 1, \ldots$, образуют ортонормированный базис в пространстве $L_2(Q)$ функций двух переменных $k(t, \tau)$, суммируемых в квадрате на $Q = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ с нормой $\|\cdot\|_2$ и скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_2$, определяемым обычным образом. Для $f \in L_2$ и $k \in \in L_2(Q)$ положим $\hat{f}(m) = (f, e_m)$, $\hat{k}(l, m) = (k, e_{l,m})$ и рассмотрим следующие нормированные пространства функций одной и двух переменных:

$$A^h = \left\{ f : f \in L_2,\ \|f\|_h := \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \operatorname{ch}^2(mh) \hat{f}^2(m) \right)^{1/2} < \infty \right\},$$

$$\mathcal{A}^h = \ k : k \in L_2(Q),\ \|k\|_{2,h} := \left(\sum_{l,m=-\infty}^{\infty} \operatorname{ch}^2(lh) \operatorname{ch}^2(mh) \hat{k}^2(l, m) \right)^{1/2} < \infty ,$$

где $h > 0$, а $\operatorname{ch}(\cdot)$ — гиперболический косинус. Известно [13, с. 186], что пространства A^h и $\mathcal{A}^h$ состоят из 2π-периодических функций одной и двух переменных, допускающих по каждой переменной аналитическое продолжение в полосу $\{z = t + i\tau, -h < \tau < h\}$ комплексной плоскости (если $k \in \mathcal{A}^h$, то при любом фиксированном τ функция $g_\tau(t) = k(t, \tau)$ может быть аналитически продолжена в указанную выше полосу. Это же верно и для функции $f_t(\tau) = = k(t, \tau)$ при любом фиксированном t).

В рамках обозначений предыдущего пункта положим $E = L_2$, $V = A^h$, $K = = \mathcal{A}^h$. Кроме того, оператор T, ставящий в соответствие каждому элементу $k \in \mathcal{A}^h$ оператор $T_k \in \mathcal{L}(L_2)$ определим следующим равенством:

$$T_k g(t) = \int_0^{2\pi} k(t, \tau) g(\tau) d\tau \tag{5}$$

и рассмотрим множество

$$\mathcal{K}_h = \mathcal{K}_h^{(\alpha)} =$$

$$= \{ k : k \in \mathcal{A}^h,\ \|k\|_{2,h} \le \alpha_1,\ \|(I - T_k)^{-1}\|_{L_2 \to L_2} \le \alpha_2 \},\ \alpha = (\alpha_1, \alpha_2).$$

Тогда класс $X^h = X^h(\alpha) = \mathcal{K}_h^{(\alpha)} \times B_{A^h}$ состоит из интегральных уравнений Фредгольма второго рода

$$u(t) - T_k u(t) := u(t) - \int_0^{2\pi} k(t, \tau) u(\tau) d\tau = f(t) \tag{6}$$

с ядрами $k(t, \tau)$ из множества $\mathcal{K}_h$ и свободными членами $f(t)$ из единичного шара B_{A^h} пространства A^h с центром в нуле.

Лемма 1. *Существует постоянная C, зависящая лишь от α и h, такая, что $r_n(X^h) \ge C e^{-\sqrt{n}h} / \sqrt{n}$.*

Доказательство. Легко проверить, что при $E = L_2$, $V = A^h$, $K = \mathcal{A}^h$ и операторе T, определяемом в (5), множество $\mathcal{K}_h^{(\alpha)}$ удовлетворяет условиям (3), (4) с некоторыми постоянными ρ_i, $i = \overline{1, 6}$, зависящими лишь от α, h. Тогда для класса X^h справедлива теорема Хейнриха, из которой следует

$$r_n(X^h) \asymp \inf_{n_1+n_2\le n}\{G_{n_1}(\Psi: \mathcal{A}^h \to \mathcal{L}(A^h, L_2)) + G_{n_2}(J_{A^h}: A^h \to L_2)\} \ge$$

$$\ge c_1 G_n(\Psi: \mathcal{A}^h \to \mathcal{L}(A^h, L_2)), \tag{7}$$

где постоянная c_1 не зависит от n. Теперь для доказательства леммы нужно оценить число Гельфанда оператора Ψ.

Пусть $\mathbb{Z}$ — поле целых чисел, а $\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ — множество пар целых чисел (l, m), $l, m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, с некоторым правилом нумерации этих пар. Через $l_2(\mathbb{Z}^2)$ и $l_\infty(\mathbb{Z}^2)$ обозначим стандартные пространства последовательностей, нумерация членов которых совпадает с нумерацией, введенной в $\mathbb{Z}^2$. Базис в $l_2(\mathbb{Z}^2)$ и $l_\infty(\mathbb{Z}^2)$ образуют последовательности $b_{l,m}$, все члены которых равны нулю за исключением члена, имеющего номер, совпадающий с номером пары (l, m) в $\mathbb{Z}^2$. Этот последний равен 1. Оператор $D: l_2(\mathbb{Z}^2) \to l_\infty(\mathbb{Z}^2)$ называется диагональным, если все его собственные элементы являются элементами базиса. Пусть $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \lambda_3 \ge \ldots \ge \lambda_n \ge \ldots$ — собственные числа диагонального оператора D и $\lambda_n \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда из теорем 11.11.7, 11.7.4, 11.5.2, [14] следует

$$G_n(D: l_2(\mathbb{Z}^2) \to l_\infty(\mathbb{Z}^2)) \asymp \lambda_n/\sqrt{n}. \tag{8}$$

Рассмотрим оператор $W: l_2(\mathbb{Z}^2) \to \mathcal{A}^h$, определяемый соотношением

$$W b_{l,m} = \operatorname{ch}^{-1}(lh)\operatorname{ch}^{-1}(mh)\, e_l(t)\, e_l(\tau).$$

Кроме того, определим оператор $U: \mathcal{L}(A^h, L_2) \to l_\infty(\mathbb{Z}^2)$, сопоставляющий каждому $A \in \mathcal{L}(A^h, L_2)$ последовательность

$$UA = \{\operatorname{ch}^{-1}(mh)\operatorname{ch}^{-1}(Ae_m, e_l)\}, \quad (l, m) \in \mathbb{Z}^2.$$

Легко видеть, что $\|W\| \le 1$, $\|U\| \le 1$. Пусть теперь $\Psi_k = T_k J_{A^h}$, где J_{A^h} — оператор вложения J_{A^h} в L_2, а T_k определен в (5). Тем самым определен оператор (функтор) $\Psi: \mathcal{A}^h \to \mathcal{L}(A^h, L_2)$. Тогда оператор $D = U\Psi W$ действует из $l_2(\mathbb{Z}^2)$ в $l_\infty(\mathbb{Z}^2)$ таким образом, что

$$D b_{l,m} = \operatorname{ch}^{-1}(lh)\operatorname{ch}^{-2}(mh)\, b_{l,m}, \quad l, m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Это означает, что D — диагональный оператор, а числа $\xi_{l,m} = \operatorname{ch}^{-1}(lh)\times$ $\times\operatorname{ch}^{-2}(mh)$ являются собственными значениями D. Рассмотрим множества

$$Q_\nu = \{(l, m): l, m \in \mathbb{Z}, |l| + 2|m| \le \nu\}, \quad \nu = 1, 2, \ldots,$$

и пусть $\operatorname{card}(Q_\nu)$ — общее число пар $(l, m) \in Q_\nu$. Легко проверить, что

$$\nu^2 + \nu - 1 \le \operatorname{card}(Q_\nu) \le \nu^2 + \nu + 1. \tag{9}$$

С другой стороны, при $(l, m) \in Q_\nu$ все собственные числа $\xi_{l,m}$ оператора D удовлетворяют неравенству

$$\xi_{l,m} \asymp e^{-(|l|+2|m|)h} \ge e^{-\nu h}. \tag{10}$$

Пусть теперь $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \ldots \geq \lambda_n \geq \ldots$ — элементы последовательности $\{\xi_{l,m}\}$, упорядоченные по убыванию. В силу (9) при любом $\nu = 1, 2, \ldots$ существует не менее ν^2 собственных чисел оператора D, удовлетворяющих (10). Но тогда $\lambda_{\nu^2} \geq c_2 e^{-\nu h}$ или, что то же самое,

$$\lambda_n \geq c_2 e^{-\sqrt{n} h}, \tag{11}$$

где постоянная c_2 не зависит от n. Объединяя (8) и (11), для $D = U\Psi W$ имеем

$$G_n(U\Psi W: l_2(\mathbb{Z}^2) \to l_\infty(\mathbb{Z}^2)) \geq c_3 e^{-\sqrt{n} h} / \sqrt{n}. \tag{12}$$

Кроме того, из основного свойства чисел Гельфанда следует

$$G_n(U\Psi W: l_2(\mathbb{Z}^2) \to l_\infty(\mathbb{Z}^2)) \leq$$

$$\leq \| U \| G_n(\Psi: \mathcal{A}^h \to \mathcal{L}(A^h, L_2)) \| W \| \leq G_n(\Psi: \mathcal{A}^h \to \mathcal{L}(A^h, L_2)). \tag{13}$$

Утверждение леммы следует из последнего неравенства и (7), (12).

3. Оценка сверху. Рассмотрим СЗИ $N_{Q_\nu} = (N_{1,\nu}, N_{2,\nu})$, определяемый следующими наборами информационных функционалов:

$$N_{1,\nu} k = (\lambda_{l,m}(k) = \hat{k}(l, m), (l, m) \in Q_\nu),$$

$$N_{2,\nu} f = (\sigma_m(f) = \hat{f}(m), m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm \nu).$$

Используя значения этих функционалов, поставим в соответствие каждому свободному члену $f(t)$ уравнения (6) частную сумму его ряда Фурье порядка ν, т. е.

$$S_\nu f(t) = \sum_{m=-\nu}^{\nu} e_m(t)\, \hat{f}(m),$$

а каждому ядру $k(t, \tau)$ — вырожденное ядро

$$k_\nu(t, \tau) = \sum_{(l, m) \in Q_\nu} e_l(t) e_m(\tau) \hat{k}(l, m).$$

Таким образом, СЗИ N_{Q_ν} позволяет поставить в соответствие каждому уравнению (6) уравнение

$$\overline{u}(t) - T_{k_\nu} \overline{u}(t) := \overline{u}(t) - \int_0^{2\pi} k_\nu(t, \tau) \overline{u}(\tau)\, d\tau = S_\nu f(t). \tag{14}$$

Так как (14) является интегральным уравнением с вырожденным ядром, построение его решения в виде тригонометрического многочлена порядка ν сводится к решению конечной системы линейных алгебраических уравнений. Тем самым определен некоторый алгоритм $\varphi_\nu \in \Phi(N_{Q_\nu})$, при котором, используя только ЗИФ из набора N_{Q_ν}, мы ставим в соответствие каждому уравнению (6) в качестве приближенного решения точное решение уравнения (14), т. е.

$$\varphi_\nu(N_{Q_\nu}; k, f) = (I - T_{k_\nu})^{-1} S_\nu f.$$

Теорема 1. *Пусть* $\nu = \left[\sqrt{n}\right] - 2$, *где* $[a]$ — *целая часть числа* a. *Тогда*

$$ce^{-\sqrt{n}h}/\sqrt{n} \le r_n(X^h) \asymp r(X^h, N_{Q_\nu}) \asymp e(X^h, \varphi_\nu) \asymp e^{-\sqrt{n}h}$$

и N_{Q_ν} *является оптимальным по порядку в логарифмической шкале СЗИ для класса* X^h.

Для доказательства теоремы нам потребуется следующее утверждение.

Лемма 2. *Если* $k \in \mathcal{K}_h(\alpha)$, *то*

$$\| T_k - T_{k_\nu} \|_{A^h \to L_2} \le 8\alpha_1 e^{-\nu h}, \quad \| T_k - T_{k_\nu} \|_{L_2 \to L_2} \le \alpha_1 e^{-\nu h/2}.$$

Доказательство проведем для первого неравенства. Второе неравенство доказывается аналогично.

По определению Q_ν и $k_\nu(t, \tau)$ справедливы равенства

$$T_k f(t) - T_{k_\nu} f(t) = \int_0^{2\pi} \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} e_l(t) \sum_{m > (\nu - |l|)/2} e_m(\tau) \hat{k}(l, m) \right) f(\tau)\, d\tau =$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{\infty} e_l(t) \sum_{m > (\nu - |l|)/2} \hat{k}(l, m) \hat{f}(m).$$

Но тогда, учитывая, что $\operatorname{ch}(p) \le e^{|p|} \le 2\operatorname{ch}(p)$, для любой $f \in A^h$ имеем

$$\| T_k f - T_{k_\nu} f \|^2 = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{m > (\nu - |l|)/2} \hat{k}(l, m) \hat{f}(m) \right)^2 \le$$

$$\le \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{m > (\nu - |l|)/2} \hat{k}^2(l, m) \right) \left(\sum_{m > (\nu - |l|)/2} \hat{f}^2(m) \right) \le$$

$$\le 16 \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{m > (\nu - |l|)/2} \frac{\operatorname{ch}^2(mh)}{e^{2|m|h}} \hat{k}^2(l, m) \right) \left(\sum_{m > (\nu - |l|)/2} \frac{\operatorname{ch}^2(mh)}{e^{2|m|h}} \hat{f}^2(m) \right) \le$$

$$\le 16 e^{-2\nu h} \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{2|l|h} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \operatorname{ch}^2(mh) \hat{k}^2(l, m) \right) \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \operatorname{ch}^2(mh) \hat{f}^2(m) \right) \le$$

$$\le 64 e^{-2\nu h} \| f \|_h^2 \sum_{m,l=-\infty}^{\infty} \operatorname{ch}^2(lh) \operatorname{ch}^2(mh) \hat{k}^2(l, m) =$$

$$= 64 e^{-2\nu h} \| k \|_{2,h}^2 \| f \|_h^2. \tag{15}$$

В силу произвольности $f \in A^h$ утверждение леммы следует из последнего неравенства и определения класса $\mathcal{K}_h(\alpha)$.

Доказательство *теоремы* 1. В силу теоремы о разрешимости приближенного уравнения [15, с. 517] и второго неравенства леммы 2 для $k \in \mathcal{K}_h(\alpha)$ и достаточно большого ν имеем

$$\| (I - T_{k_\nu})^{-1} \|_{L_2 \to L_2} \le \frac{\| (I - T_k)^{-1} \|_{L_2 \to L_2}}{1 - \| (I - T_k)^{-1} \|_{L_2 \to L_2} \| (T_k - T_{k_\nu})^{-1} \|_{L_2 \to L_2}} \le$$

$$\le \frac{\alpha_2}{1 - \alpha_1 \alpha_2 e^{-\nu h/2}} \le \beta_2,$$

где постоянная β_2 не зависит от ν. Кроме того, для всех $k \in \mathcal{K}_h(\alpha)$ и $g \in L_2$

$$\| T_k g \|_h^2 = \left\| \int_0^{2\pi} \left(\sum_{m,l=-\infty}^{\infty} \hat{k}(l,m) e_l(t) e_m(\tau) \right) g(\tau)\, d\tau \right\|_h^2 =$$

$$= \left\| \sum_{l=-\infty}^{\infty} e_l(t) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{k}(l,m)\hat{g}(m) \right\|_h^2 = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \operatorname{ch}^2(lh) \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{k}(l,m)\hat{g}(m) \right)^2 \leq$$

$$\leq \sum_{l=-\infty}^{\infty} \operatorname{ch}^2(lh) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{k}^2(l,m) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{g}^2(m) \leq \| g \|^2 \, \| k \|_{2,h}^2 \leq \alpha_1^2 \| g \|^2.$$

Но тогда для решения $u(t)$ любого уравнения (6) из X^h имеем

$$\| u \|_h = \| f + T_k (I - T_k)^{-1} f \|_h \leq \| f \|_h + \| T_k (I - T_k)^{-1} f \|_h \leq$$

$$\leq 1 + \alpha_1 \| (I - T_k)^{-1} f \| \leq 1 + \alpha_1 \alpha_2. \tag{16}$$

Для $f \in B_{A^h}$ (см., например, [13, с. 187])

$$\| f - S_\nu f \| \leq e^{-\nu h}. \tag{17}$$

Таким образом, из леммы 2 и (15)–(17) при $\nu = \left[\sqrt{n} \right] - 2$ находим

$$e(X^h, \varphi_\nu) = \sup_{(k,f) \in X^h} \| (I - T_k)^{-1} f - (I - T_{k_\nu})^{-1} S_\nu f \| =$$

$$= \sup_{(k,f) \in X^h} \| (I - T_k)^{-1} ((f - S_\nu f) + (T_k - T_{k_\nu})(I + T_k (I - T_{k_\nu})^{-1}) f) \| \leq$$

$$\leq \beta_2 e^{-\nu h} + \beta_2 \sup_{(k,f) \in X^h} \| T_k - T_{k_\nu} \|_{A^h \to L_2} \| f + T_k (I - T_{k_\nu})^{-1} f) \|_h \leq$$

$$\leq \beta_2 e^{-\nu h} + 2 \beta_2 \alpha_1 e^{-\nu h} (1 + \alpha_1 \alpha_2) \leq c_4 e^{-\sqrt{n} h}, \tag{18}$$

где постоянная c_4 зависит лишь от α и h.

С другой стороны, при $\nu = \left[\sqrt{n} \right] - 2$ из (9) имеем

$$\operatorname{card}(N_{Q_\nu}) = \operatorname{card}(Q_\nu) + 2\nu + 1 \leq \nu^2 + 3\nu + 2 \leq$$

$$\leq n - 4\sqrt{n} + 4 + 3\sqrt{n} - 6 + 2 = n - \sqrt{n} < n. \tag{19}$$

Объединяя (18) и (19), получаем оценку сверху для $r_n(X^h)$:

$$r_n(X^h) \leq e(X^h, \varphi_{[\sqrt{n}]-2}) \leq c_4 e^{-\sqrt{n} h}.$$

Требуемая оценка снизу следует из леммы 1. Теорема доказана.

Замечание. Интегральные уровнения Фредгольма второго рода с ядрами и свободными членами конечной гладкости имеют то свойство, что для восстановления их решений с фиксированной точностью ε в оптимальном случае требуется такое же по порядку число ЗИФ, как и для восстановления свободных членов. Например, из [4] следует, что для восстановления с точностью ε решений уравнений (6), ядра и свободные члены которых имеют суммируемые в квадрате производные $\partial^{i+j}(k)/\partial t^i \partial \tau^j$, $f^{(i)}$, $i, j = \overline{0, r}$, требуется ЗИФ, общее число которых имеет порядок $\varepsilon^{-1/r}$. Известно, что такой же порядок имеет число ЗИФ, требуемых для восстановления с точностью ε свободных членов уравнений указанного класса.

Для уравнений Фредгольма второго рода с аналитическими ядрами и свободными членами ситуация принципиально иная. Из теоремы 1 следует, что для восстановления решений уравнений из класса X^h с точностью ε требуется $n \asymp \log^2(1/\varepsilon)$ ЗИФ. С другой стороны, известно [16, с. 63], что число ЗИФ, требуемых для восстановления элементов некоторого класса V_0 с точностью ε, совпадает по порядку с величиной $n_\varepsilon(V_0) = \min\{n: a_n(V_0) \le \varepsilon\}$, где $a_n(V_0)$ — поперечник Александрова класса V_0. Из [13, с. 186, 240] находим, что $a_n(B_{A^h}) \asymp \varepsilon^{-nh/2}$. Таким образом, для восстановления с точностью ε свободных членов уравнений из класса X^h требуется $n_\varepsilon(B_{A^h}) \asymp \log(1/\varepsilon)$ ЗИФ, что по порядку меньше $n \asymp \log^2(1/\varepsilon)$. Это означает, что с точки зрения объема требуемой информации задача восстановления решений уравнений из X^h сложнее, чем задача восстановления свободных членов этих уравнений.

1. *Бахвалов Н. С.* Об оптимальных способах задания информации при решении дифференциальных уравнений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1962. – **2**, № 4. – С. 559–592.
2. *Иванов В. В.* Об оптимальных алгоритмах численного решения сингулярных интегральных уравнений // Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. – М.: Наука, 1972. – С. 209–219.
3. *Переверзев С. В.* О сложности задачи нахождения решений уравнений Фредгольма второго рода с гладкими ядрами. II // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 2. – С. 189–193.
4. *Переверзев С. В.* Гиперболический крест и сложность приближенного решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода с дифференцируемыми ядрами // Сиб. мат. журн. – 1991. – **32**, № 1. – С. 107–115.
5. *Frank K., Heinrich S., Pereversev S. V.* The exact order of information complexity for Fredholm equations of the second kind with kernels from Sobolev classes. – Kaiserslautern: Universitat Kaiserslautern, 1994.
6. *Pereversev S. V., Sharipov C. C.* Information complexity of the equations of the second kind with compact operators in Hilbert space // J. Complexity. – 1992. – **8**, № 2. – P. 176–202.
7. *Переверзев С. В., Махкамов К. Ш.* Галеркинская информация, гиперболический крест и сложность операторных уравнений // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 5. – С. 639–648.
8. *Трауб Дж., Вожьняковский Х.* Общая теория оптимальных алгоритмов. – М.: Мир, 1983. – 382 с.
9. *Корнейчук Н. П.* Теория приближений и проблема оптимизации вычислений // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 5. – С. 579–593.
10. *Wozniakowski H.* Information-based complexity // Ann. Rev. Comput. Sci. – 1986. – **1**. – P. 318–380.
11. *Heinrich S.* Complexity of integral equations and relations to s-numbers // J. Complexity. – 1993. – **9**, № 2. – P. 141–153.
12. *Зализняк С. Н., Мельник Ю. И., Подлипенко Ю. К.* О приближенном решении нтегральных уравнений теории потенциала // Укр. мат. журн. – 1981. – **33**, № 3. – С. 385–391.
13. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. – 304 с.
14. *Пич А.* Операторные идеалы. – М.: Мир, 1982. – 536 с.
15. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 744 с.
16. *Теоретические* основы и конструирование численных алгоритмов задач математической фиики / Под. ред. К. И. Бабенко. – М.: Наука, 1979. – 295 с.

Получено 05.04.95