УДК 517.944; 519.46

З. І. Сименог (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПАРАСУПЕРСИМЕТРИЧНА КВАНТОВА МЕХАНІКА ДОВІЛЬНОГО ПОРЯДКУ З N ПАРАСУПЕРЗАРЯДАМИ

Parasupersymmetric quantum mechanics is generalized to the case of an arbitrary number of parasupercharges N and the order of paraquantization p. We show that parasuperpotentials can be explicitly expressed via a single arbitrary function.

Узагальнюється парасуперсиметрична квантова механіка на випадок будь-якої кількості парасуперзарядів N та порядку p. Показано, що парасуперпотенціали можуть бути явно виражені через одну довільну функцію.

Поняття парасуперсиметрії як симетрії між частинками, які підпорядковуються парастатистикам різних порядків, введене в [1]. Така симетрія притаманна квантово-механічним частинкам з вищими спінами у магнітному полі. Парасуперсиметрія описується не звичайними алгебрами Лі або їх суперсиметричним розширенням, а поліноміальними алгебрами, які одержали назву парасупералгебр [2].

Фізична теорія з суперсиметрією, що називається парасуперсиметричною квантовою механікою, запропонована в [1]; незалежна версія розроблена в [3]. Результати [1] узагальнені на випадок довільного порядку p [4–7].

У даній роботі узагальнюється парасуперсиметрична квантова механіка, запропонована в [3], на випадок довільної кількості N парасуперзарядів і довільного порядку парасуперквантизації p.

Нагадаємо, що модель парасуперсиметричної квантової механіки порядку p, запропонованої Бекерсом – Деберг, характеризується такою парасупералгеброю

$$[H, Q_a] = 0, \tag{1а}$$

$$[Q_a, [Q_b, Q_c]] = \delta_{ab} Q_c H - \delta_{ac} Q_b H, \tag{1б}$$

$$(Q_1 \pm i Q_2)^{p+1} = 0, \tag{1в}$$

де H — гамільтоніан, Q_1, Q_2 — ермітові парасуперзаряди, $a, b, c = 1, 2$ $(N = 2)$.

Покажемо, скільки суперпотенціалів можна ввести для певного N і p та одержимо співвідношення, яким ці суперпотенціали задовольняють. Також доведемо твердження про те, що суперпотенціали можна явно виразити через одну довільну функцію, що має місце як для підходу Бекерса – Деберг [3], так і для підходу Рубакова – Спірідонова [1].

Розглянемо спочатку випадок $N = 2$. Для $p = 2$ результати поставленої задачі відомі [3, 8]. Узагальнення на випадок довільного p пропонується проводити у такий спосіб. Оскільки так звана $N = 2$-парасуперсиметрична квантова механіка тісно пов'язана з алгеброю Лі $so(3)$ [9], то парасуперзаряди Q_1 та Q_2 будемо шукати у вигляді

$$Q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left((S_1 + S_2) P + i (S_1 \eta W(x) + S_2 \eta \tilde{W}(x)) \right), \tag{2а}$$

$$Q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left((S_1 - S_2) P + i (S_1 \eta W(x) - S_2 \eta \tilde{W}(x)) \right), \tag{2б}$$

де S_1, S_2 — так звані сходинкові матриці з представлення алгебри $so(3)$, тобто

$$S_1 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{p} \sqrt{jp - j(j-1)}\, e_{j,\, j-1}, \tag{3а}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{p} \sqrt{jp - j(j-1)}\, e_{j-1,\, j}, \tag{3б}$$

$$W(x) = \mathrm{diag}\,(0, W_1(x), \ldots, W_p(x)), \qquad \tilde{W}(x) = \mathrm{diag}\,(W_1(x), \ldots, W_p(x), 0)$$

— матриці розмірності $(p+1)\times(p+1)$, $W_1(x), \ldots, W_p(x)$ — парасуперпотенціали, $e_{j,k}$ — матриця розмірності $(p+1)\times(p+1)$, яка має нулі скрізь крім перетину j-го рядка та k-го стовпчика, $P=-i(\partial/\partial x)$, p — порядок парасуперквантизації. Крім того, ми вимагаємо, щоб матриця η задовольняла умови

$$\{\eta, S_a\} = 0, \quad a = 1, 2, \tag{4а}$$

та

$$\eta^2 = 1. \tag{4б}$$

Тоді гамільтоніан

$$H = \mathrm{diag}\,(H_1, H_2, \ldots, H_{p+1}), \tag{5}$$

де

$$H_r = \frac{1}{2}\left(P^2 + (-1)^{r+1} W_r' + W_r^2\right), \quad r = 1, 2, \ldots, p, \tag{6а}$$

$$H_{p+1} = \frac{1}{2}\left(P^2 + (-1)^{p} W_p' + W_p^2\right), \tag{6б}$$

буде комутувати з парасуперзарядами Q_1 та Q_2, і повинні виконуватися співвідношення

$$(-1)^r W_r^2 + W_r' = (-1)^r W_{r+1}^2 + W_{r+1}', \quad r = 1, \ldots, p-1. \tag{7}$$

Зауважимо, що співвідношенням (7) задовольняють потенціали вигляду $W_1(x) = W_2(x) = \ldots = W_p(x) = W(x)$. Якщо $W(x) = \omega x$ (осциляторно-подібна взаємодія) і матриці S_1, S_2 вибираються в представленні (3), то гамільтоніан має вигляд

$$H = \frac{1}{2}\left(P^2 + \omega^2 x^2 + \eta\omega\right), \tag{8}$$

де

$$\eta = \mathrm{diag}\,(1, -1, 1, \ldots, (-1)^p). \tag{9}$$

Звідси легко визначити спектр H:

$$\begin{aligned} E_n &= \omega(n+1) \quad \text{для} \quad \eta = 1, \\ E_n &= \omega n \quad \text{для} \quad \eta = -1, \quad n = 0, 1, 2, \ldots . \end{aligned} \tag{10}$$

Якщо $p = 2$, то гамільтоніан (8) можна інтерпретувати як гамільтоніан трирівневої системи та однієї бозонної моди [10]. У цьому випадку $\eta = \mathrm{diag}\,(1, -1, 1)$, і така конфігурація відповідає $V(\Lambda)$-типу трирівневих систем [10, 11].

Нагадаємо, що для узагальненої парасуперсиметричної квантової механіки Рубакова – Спірідонова для довільного p (при відповідному виборі парасуперзарядів) співвідношення на потенціали мають вигляд [6, 7]

$$(-1)^r W_r^2 + W_r' + c_r = (-1)^r W_{r+1}^2 + W_{r+1}' + c_{r+1}, \quad r = 1, \ldots, p-1. \tag{11}$$

Твердження. *Суперпотенціали* $W_1, \ldots, W_p$, *що задовольняють умови* (7) *або* (11), *можна явно виразити через одну довільну функцію.*

Твердження досить просто доводяться за індукцією. Зауважимо тільки, що для двох суперпотенціалів їх можна подати у вигляді

$$W_1 = \frac{u' + u^2 + c_1 - c_2}{2u}, \quad W_2 = \frac{u' - u^2 + c_1 - c_2}{2u}, \tag{12}$$

де $u = W_1 - W_2 \neq 0$ (див. також [12]). Три потенціали можна подати у вигляді (12) та

$$W_3 = \frac{-v' - v^2 + c_3 - c_2}{2v}, \tag{12a}$$

де

$$u = \frac{-a' + \varepsilon\sqrt{(a')^2 - 4((c_1 - c_2)\,a - a^2)(c_2 - c_3 - a)}}{2(c_2 - c_3 - a)}, \quad \varepsilon = \pm 1, \tag{13a}$$

$$v = \frac{a}{u}, \tag{13б}$$

якщо $W_1 - W_2 \neq 0$, $W_2 - W_3 \neq 0$, a — довільна функція.

Перейдемо тепер до випадку $N = 3$. Парасупер態алгебра має вигляд (1), де $a, b, c = 1, 2, 3$. Парасуперзаряди Q_1, Q_2, Q_3 шукаємо у вигляді

$$Q_a = \frac{1}{\sqrt{2}} A_a (P + i\eta W_a(x)), \quad a = 1, 2, 3, \tag{14}$$

де A_a [9] — матриці з представлення алгебри $so(4)$, матриця η задовольняє (4).

Для $p = 2$, вибираючи парасуперзаряди у вигляді (14), де A_a — (4×4)- або (6×6)-вимірні матриці, що реалізують представлення алгебри $so(4)$, одержимо такі умови на потенціали W_1, W_2, W_3:

$$W_1' - W_1^2 = W_2' - W_2^2 = W_3' - W_3^2. \tag{15}$$

Якщо A_a реалізують представлення $D(1/2, 1/2)$ алгебри $so(4)$,

$$\begin{aligned} A_1 &= S_{41} = i(e_{4,1} + e_{1,4}), \\ A_2 &= S_{42} = i(e_{4,2} + e_{2,4}), \\ A_3 &= S_{43} = i(e_{4,3} + e_{3,4}), \end{aligned} \tag{16}$$

то матриця η набуває вигляду

$$\eta = \operatorname{diag}(1, 1, 1, -1). \tag{17}$$

Розглянемо взаємодію типу осцилятора: $W_1(x) = W_2(x) = W_3(x) = \omega x$. Гамільтоніан має вигляд

$$H = \frac{1}{2}(P^2 + \omega^2 x^2 + \eta\omega),$$

де η — матриця (17). Спектр H легко знайти, і він буде мати вигляд (10). Гамільтоніан у цьому випадку можна інтерпретувати як гамільтоніан 4-рівневої системи, причому конфігурація рівнів відповідає f-типу [10].

Зауважимо, що суперпотенціали W_1, W_2, W_3, які задовольняють (15), явно виражаються через одну довільну функцію u:

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{u'' + (u')^2}{2u'}, \quad W_2 = \frac{u'' - (u')^2}{2u'}, \\ W_3 &= \frac{u''}{2u'} - u'\,\frac{1 + \exp(u)}{-1 + \exp(u)}. \end{aligned} \tag{18}$$

Розглянемо тепер загальний випадок з довільною кількістю парасуперзарядів N і довільним порядком парасуперквантизації p. Парасуперзаряди шукаємо у вигляді

$$Q_a = \frac{1}{\sqrt{2}} S_{N+1,a}(P + i\eta W_a(x)), \quad a = 1, 2, \dots, N, \tag{19}$$

де W_a — суперпотенціали, $S_{N+1,a}$ — генератори алгебри $so(N+1)$:

$$[S_{\mu\nu}, S_{\lambda\sigma}] = i(\delta_{\mu\lambda} S_{\nu\sigma} + \delta_{\nu\sigma} S_{\mu\lambda} - \delta_{\mu\sigma} S_{\nu\lambda} - \delta_{\nu\lambda} S_{\mu\sigma}), \tag{20}$$

де $\delta_{\mu\nu}$ — символ Кронекера, $\mu, \nu, \lambda, \sigma = 1, \dots, N+1$. Використовуючи співвідношення (1) $(a, b, c = 1, \dots, N)$, маємо такий результат:

а) $W_1 = W_2 = \dots = W_N = W$

або

б) суперпотенціали $W_1, \dots, W_N$ задовольняють умови

$$S_{N+1,a}(1 - S_{N+1,b}^2)(\eta W_a' - \eta^2 W_a^2 - \eta W_b' + \eta^2 W_b^2) = 0, \quad a, b = 1, 2, \dots, N, \tag{21}$$

а матриці $S_{N+1,a}$ задовольняють алгебру Кемера

$$S_{N+1,a} S_{N+1,b} S_{N+1,c} + S_{N+1,c} S_{N+1,b} S_{N+1,a} = \delta_{ab} S_{N+1,c} + \delta_{bc} S_{N+1,a}. \tag{22}$$

Отже, в загальному випадку ми маємо один суперпотенціал. Якщо ж матриці $S_{N+1,a}$ задовольняють алгебру Кемера (22), то маємо потенціали $W_1, \dots$ $\dots, W_N$, які згідно з доведеним вище твердженням можна явно виразити через одну довільну функцію.

Таким чином, ми узагальнили парасуперсиметричну квантову механіку Беккерса – Деберг на випадок довільної кількості парасуперзарядів N та довільного порядку p і показали, що як у випадку $N = 2$, $p = 2$, так і у загальному випадку, парасуперпотенціали можуть бути явно виражені через одну довільну функцію.

Автор висловлює щиру подяку А. Г. Нікітіну за постановку задачі та корисні поради та В. І. Фущичу за обговорення та підтримку даної роботи.

1. *Rubakov V. A., Spiridonov V. P.* On pararelativistic quantum mechanics // Mod. Phys. Lett. – 1988. – **A3**. – P. 1337–1347.
2. *Durand S., Vinet L.* Dynamic parasuperalgebras of parasupersymmetric harmonic oscillator, cyclotron motion and Morse Hamiltonian // J. Phys. – 1990. – **A23**. – P. 3661–3672.
3. *Beckers J., Debergh N.* Parastatistics and supersymmetry in quantum mechanics // Nucl. Phys. – 1990. – **B340**. – P. 767–776.
4. *Spiridonov V. P.* Hierarchy of the parasupersymmetric Hamiltonians in quantum mechanics // J. Phys. – 1991. – **A24**. – P. L529–L534.
5. *Tomiya M.* Comment on generalized parasupersymmetric quantum mechanics // Ibid. – 1992. – **A25**. – P. 4699–4704.
6. *Khare A.* Parasupersymmetric quantum mechanics of arbitrary order // Ibid. – 1992. – **A25**. – P. L749–L754.
7. *Khare A.* Parasupersymmetry in quantum mechanics // J. Math. Phys. – 1993. – **34**. – P. 1277–1294.
8. *Beckers J., Debergh N.* A note on recent Lie parasuperstructures // J. Phys. – 1990. – **A23**. – P. L1073–L1077.
9. *Debergh N., Nikitin A. G.* Parasupersymmetric quantum mechanics with an arbitrary number of parasupercharges and orthogonal Lie algebras, June, 1994. – U.Lg Preprint PTM-94/10.
10. *Semenov V. V., Chumakov S. M.* Generalizations of the superalgebra other than the parasuperalgebra // Phys. Lett. – 1991. – **B262**. – P. 451–454.
11. *Yoo H. I., Eberly J. H.* Dynamical theory of an atom with two or three levels interacting with quantized cavity fields // Phys. Rept. – 1985. – **118**. – P. 241–337.
12. *Beckers J., Debergh N., Nikitin A. G.* More on parasupersymmetries of the Schrödinger equation // Mod. Phys. Lett. – 1993. – **A8**. – P. 435–444.

Одержано 23.02.95