УДК 517.5

В. А. Кофанов, канд. физ.-мат. наук (Днепропетр. ун-т)

О МАССИВНОСТИ МНОЖЕСТВ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ В НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЙ

It is proved that the sets of extremal functions are massive in some problems of approximation theory.

Доводиться масивність множин екстремальних функцій в деяких задачах теорії наближення.

1. Введение. Постановка задачи существования асимптотически экстремальных функций восходит к Лебегу. Дальнейшие результаты в этом направлении для конкретных задач теории приближений получили С. М. Никольский, С. Б. Стечкин, К. И. Осколков, В. Н. Темляков, Г. Я. Доронин, О. В. Давыдов и др.

В настоящей работе не только устанавливается существование экстремальных функций в некоторых задачах теории приближений, но и доказывается массивность множеств таких функций. Аппаратом для доказательства служат понятия из теории категорий и теорема Бэра. Подобный подход применялся в работах [1 – 3].

Основным результатом работы является теорема 1, доказанная в п. 2. В пп. 3 – 6 рассматриваются приложения теоремы 1 в задачах теории приближений.

2. Основная теорема. Будем говорить, что последовательности $\{p_n\}$ и $\{q_n\}$ полунорм в банаховом пространстве X согласованы, если величины

$$\alpha_n = \alpha_n(X, p_n, q_n) = \sup\left\{\frac{p_n(x)}{q_n(x)}:\ x \in X,\ q_n(x) \neq 0\right\} \tag{1}$$

конечны и отличны от нуля, причем существуют всюду плотное в X множество $\mathcal{A}$ и удовлетворяющая соотношению

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n(x_n)}{\alpha_n q_n(x_n)} = 1 \tag{2}$$

последовательность $\{x_n\}$, $x_n \in X$, называемая экстремальной для α_n, такие, что для любого $a \in \mathcal{A}$:

$$\text{а)}\quad \lim_{n\to\infty} \frac{p_n(a)}{p_n(x_n)} \| x_n \| = 0;$$

$$\text{б)}\quad \lim_{n\to\infty} \frac{q_n(a)}{q_n(x_n)} \| x_n \| = 0. \tag{3}$$

Теорема 1. *Пусть в банаховом пространстве X заданы согласованные последовательности $\{p_n\}$ и $\{q_n\}$ непрерывных полунорм. Тогда множество*

$$S = \left\{x \in X:\ \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{p_n(x)}{\alpha_n q_n(x)} < 1\right\}$$

является множеством 1-й категории в X, а следовательно, множество

$$\mathcal{M} = \left\{x \in X:\ \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{p_n(x)}{\alpha_n q_n(x)} = 1\right\}$$

массивно, и значит, всюду плотно в X.

Доказательство. Для любых $x \in X$, n, m, $k \in N$ положим

$$r_n(x) = \begin{cases} p_n(x) / \alpha_n q_n(x), & q_n(x) \neq 0, \\ 0, & q_n(x) = 0; \end{cases}$$

$$S_{m,k} = \{x \in X: \; r_n(x) \leq 1 - 1/m, \quad n \geq k\}.$$

Имеем

$$S = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} S_{m,k}.$$

Как и в [3], доказывается, что множества $S_{m,k}$ замкнуты.

Предположим, что S не является множеством 1-й категории. Тогда для некоторых m и k множество $S_{m,k}$ не является нигде не плотным. Так как оно, к тому же, замкнуто, существует шар $B = B(x_0, \; \varepsilon) := \{x: \; \| x - x_0 \| < \varepsilon\}$, содержащийся в $S_{m,k}$. Выберем элемент $a_0 \in \mathcal{A}$, удовлетворяющий неравенству $\| x_0 - a_0 \| < \varepsilon / 2$. Пользуясь соотношениями (2), (3), выбираем номер $n > k$, для которого справедливы неравенства

$$r_n(x_n) > 1 - 1/m^2, \tag{4}$$

$$0 < \left[1 - \frac{2\|x_n\| p_n(a_0)}{\varepsilon p_n(x_n)} \right]^{-1} < \sqrt{1 + 1/m}, \tag{5}$$

$$1 + \frac{2\|x_n\| q_n(a_0)}{\varepsilon q_n(x_n)} < \sqrt{1 + 1/m}. \tag{6}$$

Элементы $y_n = a_0 + \varepsilon x_n / 2 \| x_n \|$ принадлежат шару B, а следовательно, и множеству $S_{m,k}$. Поэтому

$$r_n(y_n) \leq 1 - 1/m. \tag{7}$$

Используя соотношения (5) – (7) и определение полунормы, имеем

$$r_n(x_n) = r_n(y_n - a_0) = r_n(y_n) \frac{p_n(y_n - a_0)}{p_n(y_n)} \frac{q_n(y_n)}{q_n(y_n - a_0)} \leq$$

$$\leq \left(1 - \frac{1}{m}\right) \frac{p_n(y_n - a_0)}{p_n(y_n - a_0) - p_n(a_0)} \frac{\varepsilon q_n(x_n) / 2\|x_n\| + q_n(a_0)}{\varepsilon q_n(x_n) / 2\|x_n\|} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{m}\right) \left(1 - \frac{2\|x_n\| \, p_n(a_0)}{\varepsilon p_n(x_n)}\right)^{-1} \left(1 + \frac{2\|x_n\| \, q_n(x_0)}{\varepsilon q_n(x_n)}\right) \leq 1 - \frac{1}{m^2},$$

что противоречит (4). Вторая часть утверждения теоремы 1 вытекает из первой в силу определения массивного множества (как дополнительного к множеству 1-й категории) и теоремы Бэра о категории.

3. Асимптотическое сравнение наилучшего и линейных методов.

Утверждение 1. *Пусть* $X_1 \subset X_2 \subset X_3 \subset \ldots \subset X_n \subset \ldots$ *— последовательность конечномерных подпространств банахова пространства* X, *объединение* $\mathcal{A} = \bigcup_n X_n$ *которых всюду плотно,* $E_n(x) = E(x, \; X_n) = \inf \{\| x - y \|: \; y \in X_n\}$ *— наилучшее приближение элемента* x *подпространством* X_n, $\mathcal{E}_n(x) = \| x - \mathcal{A}_n(x) \|$, *где* $\mathcal{A}_n: \; X \to X$ *— линейные непрерывные операторы такие, что для любого* $u \in X_n$ $\mathcal{A}_n u = u$ *(например, проекторы). Тогда последовательности* $\{E_n\}$ *и* $\{\mathcal{E}_n\}$ *(взятые в любом порядке) полунорм согласованы между собой, причем*

$$\alpha_n(X, \mathcal{E}_n, E_n) = \| \mathcal{I} - \mathcal{A}_n \|, \quad n \in N, \tag{8}$$

где $\mathcal{I}$ *— тождественный оператор.*

Доказательство. Очевидно, $0 \le \alpha_n(X, E_n, \mathcal{E}_n) \le 1$. Докажем (8). Обозначая через $u_n(x)$ один из элементов наилучшего приближения x подпространством X_n, имеем

$$\| x - \mathcal{A}_n(x) \| = \| x - u_n(x) - \mathcal{A}_n(x - u_n(x)) \| \le \| \mathcal{I} - \mathcal{A}_n \| E_n(x).$$

С другой стороны,

$$\sup_{x \notin X_n} \frac{\| x - \mathcal{A}_n(x) \|}{E_n(x)} \ge \sup_{x \notin X_n} \frac{\| x - \mathcal{A}_n(x) \|}{\| x \|} = \sup_{x \ne 0} \frac{\| x - \mathcal{A}_n(x) \|}{\| x \|} = \| \mathcal{I} - \mathcal{A}_n \|.$$

Итак, (8) доказано. Осталось заметить, что условия (3) также выполнены, так как для любого $a \in \mathcal{A}$ $E_n(a) = \mathcal{E}_n(a) = 0$, начиная с некоторого номера n. Утверждение 1 доказано.

Из теоремы 1, утверждения 1 и того факта, что пересечение массивных множеств массивно, вытекает такое следствие.

***Следствие* 1**. *В условиях утверждения* 1 *множество элементов* $x \in X$, *удовлетворяющих соотношениям*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{E \| x, X_n \|}{\alpha_n \| x - \mathcal{A}_n(x) \|} = 1$$

и

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\| x - \mathcal{A}_n(x) \|}{\| \mathcal{I} - \mathcal{A}_n(x) \| E(x, X_n)} = 1,$$

где $\alpha_n = \alpha_n(X, E_n, \mathcal{E}_n)$, *массивно в* X.

Отметим, что непустота множеств функций, удовлетворяющих каждому из соотношений следствия 1 в отдельности, установлена в [4].

Справедливо (см., например, [2]) следующее предложение.

Предложение. *Если последовательность норм* $\| \mathcal{A}_n \|$ *линейных непрерывных операторов* $\mathcal{A}_n$ *в банаховом пространстве* X *неограничена, то множество* $\{x \in X: \varlimsup_{n\to\infty} \| \mathcal{A}_n(x)\| = \infty\}$ *массивно в* X.

Из этого предложения и следствия 1 вытекает такое следствие.

***Следствие* 2.** *Пусть выполнены условия утверждения* 1, *причем последовательность норм* $\| \mathcal{A}_n \|$ *неограничена. Тогда множество элементов* $x \in X$, *для которых* $\varlimsup_{n\to\infty} \| \mathcal{A}_n(x)\| = \infty$ *и в то же время существует подпоследовательность* $\{n_k\}$ *такая, что*

$$\| x - \mathcal{A}_{n_k}(x)\| \sim \alpha_{n_k}^{-1} E(x, X_{n_k}),$$

где $\alpha_n = \alpha_n(X, E_n, \mathcal{E}_n)$, *массивно в* X.

Отметим некоторые случаи, когда справедливы равенства $\alpha_n = 1$, $n \in N$.

Пусть $X = L_p(\mathcal{I})$, $1 \le p \le \infty$, — пространства суммируемых в p-й степени при $p < \infty$ (соответственно непрерывных) на отрезке $\mathcal{I}$ функций f с нормами

$$\|f\|_{L_p(\mathcal{I})} = \left\{ \int_{\mathcal{I}} |f(x)|^p \, dx \right\}^{1/p}, \quad \|f\|_{L_\infty(\mathcal{I})} = \max_{x \in \mathcal{I}} |f(x)|.$$

Аналогичный смысл имеют обозначения L_p, $\|f\|_p$, $\|f\|_\infty$ для пространств 2π–периодических функций.

Пусть, далее, T_n — пространство тригонометрических полиномов порядка $\le n$, $S_n(f)$ — сумма Фурье функции f порядка n, $\mathfrak{I}_n(f)$ — тригонометрический полином из пространства T_n, интерполирующий функцию $f \in L_\infty$ в узлах $\{x_{k,n}\}$, $k = \overline{1,\ 2n+2}$, $n \in N$, удовлетворяющих условию

$$0 < x_{1,n} < x_{2,n} < \ldots < x_{2n+2,n} \le 2\pi. \tag{9}$$

Замечание. Для любого $n \in N$ справедливы равенства

$$\alpha_n(L_p, E_{n,p}, \mathcal{E}_n) = 1, \ \ 1 \le p \le \infty, \ \ \alpha_n(L_\infty, E_{n,\infty}, e_n) = 1, \tag{10}$$

где $E_{n,p} = E(f, T_n)_p$, $\mathcal{E}_n = \|f - S_n(f)\|_p$, $e_n = \|f - \mathfrak{I}_n(f)\|_\infty$.

Доказательство. Очевидно, левые части равенств (10) не превышают 1. Далее, для функции $f_n(x) = \cos(n+1)x$ имеем $E(f_n, T_n)_p = \|f_n\|_p$, $S_n(f_n) = 0$. Отсюда следует первое из равенств (10). Пусть теперь φ_n — кусочно-линейная функция,

$$\varphi_n \in L_\infty, \ \varphi_n(x_{i,n}) = 0, \ i = \overline{1,\ 2n+2}, \ \varphi_n(0) = 1,$$

$$\varphi_n((x_{k,n} + x_{k+1,n})/2) = (-1)^k, \ k = \overline{1,\ 2n+1}, \ \|\varphi_n\|_\infty = 1.$$

Тогда $E(\varphi_n, T_n)_\infty = \|\varphi_n\|_\infty$, $\mathfrak{I}_n(\varphi_n) = 0$. Отсюда следует второе равенство (10).

Отметим также, что перечень случаев, когда справедливы равенства $\alpha_n = 1$, нетрудно продолжить.

4. Замечание к теореме Уитни. Пусть π_n — пространство алгебраических многочленов степени $\le n$, $p_n = E(f, \pi_n)$ — наилучшее равномерное приближение функции $f \in L_\infty(\mathfrak{I})$, $q_n = \omega_n(f)$ — n-й модуль гладкости функции f на отрезке $\mathfrak{I}$, W_n — точная константа в теореме Уитни [5]. Очевидно, все условия теоремы 1 выполнены. Поэтому справедливо такое следствие.

Следствие 3. *Множество функций $f \in L_\infty(\mathfrak{I})$, для которых $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{E(f,\ \pi_n)}{w_n \omega_n(f)} = 1$, массивно в $L_\infty(\mathfrak{I})$.*

5. Приближение наилучшими в среднем полиномами на подотрезке. Через $u_n(f)$ обозначим один из полиномов наилучшего в метрике L_p, $1 \le p \le \infty$, приближения функции f подпространством T_n. Из результатов работы [6] вытекает, что при $p = \infty$ для любой $f \in L_p$ и для любого отрезка $\mathfrak{I} \subset [0, 2\pi]$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\|f - u_n(f)\|_{L_p(\mathfrak{I})}}{\|f - u_n(f)\|_{L_p}} = 1. \tag{11}$$

Справедливо такое следствие.

Следствие 4. *Множество функций $f \in L_p$, $1 \le p \le \infty$, таких, что для любого отрезка $\mathfrak{I} \subset [0, 2\pi]$ справедливо (11), массивно в L_p.*

Доказательство. Положим

$$p_n(f) = \|f - u_n(f)\|_{L_p(\mathfrak{I})}, \ \ q_n(f) = \|f - u_n(f)\|_{L_p}.$$

Очевидно, последовательности $\{p_n\}$ и $\{q_n\}$ полунорм согласованы, причем

$\alpha_n = \alpha_n(L_p, p_n, q_n) \le 1$. Очевидно также, что существует функция $f_n \in L_p$, равная нулю вне отрезка $\mathfrak{I}$, для которой $u_n(f_n) = 0$. Следовательно, $\alpha_n = 1$. В силу теоремы 1 множество

$$S(\mathfrak{I}) = \left\{ f \in L_p : \ \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\| f - u_n(f) \|_{L_p(\mathfrak{I})}}{\| f - u_n(f) \|_{L_p}} = 1 \right\}$$

массивно в L_p. Пусть $\{\mathfrak{I}_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность всех отрезков $\mathfrak{I}_k \subset [0, 2\pi]$, концы которых рациональны. Тогда множество $S = \bigcap_{k=1}^{\infty} S(\mathfrak{I}_k)$ массивно в L_p. Пусть $f \in S$ и $\mathfrak{I}$ — любой отрезок, содержащийся в $[0, 2\pi]$. Найдется отрезок $\mathfrak{I}_k$ такой, что $\mathfrak{I}_k \subset \mathfrak{I}$. В силу очевидного неравенства $\| f - u_n(f) \|_{L_p(\mathfrak{I})} \ge \| f - u_n(f) \|_{L_p(\mathfrak{I}_k)}$ f принадлежит множеству функций, удовлетворяющих соотношению (11). Следствие 4 доказано.

6. Неравенства типа Джексона. Пусть $X = L_p^r$ — пространство функций f таких, что $f^{(r)} \in L_p$, с нормой

$$\| f \|_{L_p^r} = \max \{ \| f^{(k)} \|_p : \ 0 \le k \le r \}, \ 1 \le p \le \infty, \ r = 0, 1, 2, \dots ,$$

$p_n(f)$ — произвольная полунорма в X,

$$q_n(f) = \omega(f^{(r)}, \gamma_n)_p := \sup \{ \| f^{(r)}(\cdot + h) - f^{(r)}(\cdot) \|_p : \ | h | \le \gamma_n \}$$

— модуль непрерывности функции $f^{(r)}$. Величины $\chi_{n,r} = \alpha_n(L_p^r, p_n, q_n)$ называются точными константами в неравенствах типа Джексона.

Утверждение 2. *Пусть* $X = L_p^r$, $1 \le p \le \infty$, $r = 0, 1, 2, \dots$; *последовательности подпространств* X_n *и операторов* $\mathcal{A}_n$ *удовлетворяют условиям утверждения* 1, *а* $p_n(f) = E(f, X_n)_q$ *или* $p_n(f) = \| f - \mathcal{A}_n(f) \|_q$, $1 \le q \le \infty$. *Если* $\gamma_n \to 0$, *а последовательности экстремальных* (*в смысле* (2)) *для* $\chi_{n,r}$ *функций* x_n *удовлетворяют соотношению*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\| x_n \|_{L_p^r}}{\omega(x_n^{(r)}, \gamma_n)} \gamma_n = 0, \tag{12}$$

то множество

$$\left\{ f \in L_p^r : \ \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{p_n(f)}{\chi_{n,r}\omega(f^{(r)}, \gamma_n)} = 1 \right\}$$

массивно в L_p.

Доказательство. Достаточно проверить выполнение соотношений (3). Пусть a — произвольный тригонометрический полином. Соотношение 3а) следует из того, что $p_n(a) = 0$, начиная с некоторого номера, а соотношение 3б) вытекает из предположения (12), так как $\omega(a, \gamma_n) = O(\gamma_n)$ при $n \to \infty$. Утверждение 2 доказано.

Пусть $X_n = T_n$ или $X_n = S_{2n,r}$ — пространство сплайнов порядка r дефекта 1 по равномерному разбиению $\{ i\pi / n \}$, $i = \overline{1, 2n}$.

Утверждение 3. *Множества*

$$\mathcal{M} = \left\{ f \in L_p^r : \ \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{p_n(f)}{\chi_{n,r}\omega(f^{(r)}, \gamma_n)} = 1 \right\}$$

массивны в L_p^r *в каждом из следующих случаев* ($p_n(f) = E(f, X_n)_q$ *в случаях* 1 – 6; $p_n(f) = \| f - S_n(f) \|_\infty$ *в случае* 7):

1) $q = p = \infty$, $X_n = T_n$, $r = 0$, $\gamma_n = \pi / n$, $\chi_{n,r} \sim 1$;

2) $q = p = \infty$ *или* $q = p = 1$, $X_n = T_n$, $r = 1, 3, 5, \ldots$, $\gamma_n = \pi / n$, $\chi_{n,r} = K_r / 2n^r$, *где* K_r *— константы Фавара*;

3) $q = p = 2$, $X_n = T_n$, $r = 0$, $\gamma_n = \pi / n$, $\chi_{n,r} \sim \left(\sqrt{2}\right)^{-1}$;

4) $q = p = \infty$, $X_n = T_n$, $r = 0$, $\gamma_n = \pi / kn$, $k \in N$, $\chi_{n,r} \sim (k+1)/2$;

5) $q = p = \infty$, $X_n = S_{2n,r}$, $r = 0, 1, 2, \ldots$, $\gamma_n = \pi / n$, $\chi_{n,r} = K_r / 2n^r$;

6) $q = 1$, $p = \infty$, $X_n = S_{2n,r}$, $r = 0, 1, 2, \ldots$, $\gamma_n = \pi / n$, $\chi_{n,r} = K_{r+1} / n^r$;

7) $r = 0$, $\gamma_n = 4\pi / 3(2n+1)$, $\chi_{n,r} \sim 0{,}5\, \pi^2 \ln n$.

Доказательство. В работах [7 – 13] найдены точные константы $\chi_{n,r}$ (лиС указано их асимптотическое поведение) и построены экстремальные последовательности функций x_n в случаях 1 – 7. Нетрудно видеть, что во всех этих случаях выполнены условия (12). В случаях 1 – 4 и 7, очевидно, выполнены и остальные условия утверждения 2. Поэтому утверждение 3 в этих случаях вытекает из утверждения 2. Но так как пространства $S_{2n,r}$ не вложены друг в друга в случаях 5 и 6, утверждение 2 не применимо. Воспользуемся теоремой 1. Для этого достаточно проверить условия (3). Проверим их в случае 5. Из результатов работы [11] следует, что в качестве экстремальных для $\chi_{n,r}$ функций x_n можно взять функции Стеклова с шагом $o(n^{-1})$ от идеальных сплайнов Эйлера порядка r, для которых $n^r E(x_n, S_{2n,r})_\infty = n^r \| x_n \|_\infty \to K_r$, $n \to \infty$, а $\omega(x_n^{(r)}, \pi / n) = \| x_n \|_{L_p^r} = 1$. Из этих соотношений вытекают равенства (3), если в качестве $\mathcal{A}$ взять $\bigcup_n T_n$. Аналогично проверяются условия (3) в случае 6. Утверждение 3 доказано.

Отметим, то непустота множеств $\mathcal{M}$ в случаях 1 – 7 установлена в [4].

1. *Рубан В. И.* Об интерполировании функций и их производных элементами подпространств общего положения // Исследования по современным проблемам суммирования и приближения функций и их приложениям. – Днепропетровск: Днепропетр. ун-т, 1983. – С. 52 – 54.
2. *Wickeren E.* A Baire approoch to quantitative resonance principles // Numer. Funct. anal. and optimiz. – 1987. – **9**, N 1. – P. 147 – 180.
3. *Saff E. B., Totik V.* Behavior of polynomials of best uniform approximation // Trans. Amer. Math. Soc. – 1989. – **316**, N 2. – P. 567 – 590.
4. *Давыдов О. В.* О точности неравенств типа Джексона и Лебега // Приближение функций и суммирование рядов. – Днепропетровск: Днепропетр. ун-т, 1991. – С. 19 – 28.
5. *Whitney H.* On function with bounded n-th differences // J. Math. Pures Appl. – 1967. – P. 67 – 95.
6. *Кадец М. И.* О распределении точек максимального уклонения при аппроксимации непрерывных функций многочленами // Успехи мат. наук. – 1960. – **15**, вып. 1 (91). – С. 199 – 202.
7. *Корнейчук Н. П.* Точная константа в теореме Джексона о наилучшем равномерном приближении непрерывных периодических функций // Докл. АН СССР. – 1962. – **145**, № 3. – С. 514 – 515.
8. *Лигун А. А.* О точных константах приближения дифференцируемых периодических функций // Мат. заметки. – 1973. – **14**, № 1. – С. 21 – 30.
9. *Черных Н. И.* О неравенствах Джексона в L_2 // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1967. – **88**. – С. 71 – 74.
10. *Корнейчук Н. П.* О т~чной константе в неравенстве Джексона для непрерывных периодических функций // Мат. заметки. – 1982. – **32**, № 5. – С. 669 – 774.
11. *Ligun A. A.* Inequlitis for upper bounds of functions // Anal. Math. – 1976. – **2**, № 1. – P. 11 – 40.
12. *Корнейчук Н. П.* Неравенства для наилучшего приближения сплайнами дифференцируемых периодических функций // Укр. мат. журн. – 1979. – **31**, № 4. – С. 380 – 388.
13. *Гаврилюк В. Т., Стечкин С. Б.* Приближение непрерывных периодических функций суммами Фурье // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1985. – **172**. – С. 107 – 127.

Получено 30.01.92