УДК 513.88

В. А. Штраус

О структуре операторов, дважды перестановочных с операторами класса $K(H)$

В настоящей статье рассматриваются только ограниченные линейные операторы, действующие в сепарабельном гильбертовом пространстве. С терминологией и основными результатами по теории операторов в J-пространствах, включая операторы класса $K(H)$, можно познакомиться в работе [1], о спектральных операторах см. [2]. Пусть A — некоторый оператор. Символами $\mathfrak{F}(A)$ и $\mathcal{K}(A)$ обозначены соответственно слабое замыкание множества операторов вида $Q(A)$, где $Q(z)$ — произвольный многочлен, и совокупность операторов, перестановочных со всяким оператором, с которым перестановочен оператор A. Операторы из $\mathcal{K}(A)$ будем называть дважды перестановочными с A. Если B дважды перестановочен с самосопряженным оператором A, то, как известно из теоремы Неймана, $B \in \mathfrak{F}(A)$, однако если A является π-самосопряженным, то, вообще говоря, $B \notin \mathfrak{F}(A)$.

Пример. Пусть $\{e_k\}_{-3}^{+\infty}$ — некоторый ортонормированный базис исходного пространства, операторы J, A и S заданы условиями

$$J^2 = I, \quad Je_{-3} = e_{-1}, \quad Je_{-2} = e_0, \quad Ae_{-3} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}(-i)^k e_k,$$

$$Ae_{-2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} e_k, \quad Ae_{-1} = Ae_0 = 0, \quad Se_{-3} = e_{-1}, \quad Se_{-2} = Se_{-1} = Se_0 = 0,$$

$$Je_k = e_k, \quad Ae_k = \frac{1}{k}(e_k + (i)^k e_{-1} + e_0), \quad Se_k = 0, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Тогда, как нетрудно проверить, оператор A является J-самосопряженным по отношению к эрмитово-индефинитной форме, задаваемой оператором J, $S \in \mathfrak{K}(A)$, но $S \notin \mathfrak{F}(A)$.

Теорема 1. *Пусть A — J-самосопряженный оператор класса $K(H)$, $B \in \mathfrak{K}(A)$. Тогда $B = C + S$, где $C \in \mathfrak{F}(A)$, а S — конечномерный нильпотентный оператор, причем $SP = 0$ для любого перестановочного с A J-ортогонального проектора P, для которого оператор AP является скалярным спектральным оператором.*

Замечание. Поскольку $\mathfrak{F}(A) \subset \mathfrak{K}(A)$, то $S \in \mathfrak{K}(A)$.

Следствие. *Если в условиях теоремы 1 оператор A спектрален, то $\mathfrak{F}(A) = \mathfrak{K}(A)$.*

Теорема 2. *Пусть A — J-самосопряженный оператор, обладающий максимальным неотрицательным инвариантным подпространством, разлагающимся в прямую сумму одномерного нейтрального и равномерно положительного подпространств. Тогда $\mathfrak{F}(A) = \mathfrak{K}(A)$.*

Заметим (см. [3, 4]), что в условиях теоремы 2 оператор A является оператором класса $K(H)$.

1. *Азизов Т. Я., Иохвидов И. С.* Линейные операторы в пространствах с индефинитной метрикой и их приложения // Мат. анализ. Итоги науки и техники.— 1979.— 17.— С. 113—207.
2. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Спектральные операторы.— М.: Мир, 1974.— 664 с.
3. *Азизов Т. Я.* О полноте и базисности собственных и присоединенных векторов J-самосопряженных операторов класса $K(H)$ // Докл. АН СССР.— 1980.— 253, № 5.— С. 1033—1035.
4. *Азизов Т. Я., Шлякман М. Я.* Об эффекте Кюне—Иохвидова—Штрауса // Укр. мат. журн.— 1983.— 35, № 4.— С. 484—485.

Челябин. политехн. ин-т

Получено 21.03.85