УДК 517

И. Д. Ольшанецкий

О построении гиперкомплексной системы по алгебре Урбаника

Обозначим через $\mathcal{P}_0$ совокупность вероятностных мер на $R^+ = [0; +\infty)$. «Обобщенная свертка» определена К. Урбаником [1, с. 217] как некоторая бинарная операция $\circ$ на $\mathcal{P}_0$. Свойства такой операции рассматривались, в частности, в [2—4].

В настоящей статье изучается возможность построения по алгебрам Урбаника гиперкомплексных систем с локально компактным базисом. Теория таких систем изложена в [5] (см. также [6]). Показано, что при некоторых дополнительных предположениях обобщенная свертка порождает гиперкомплексную систему и тем самым на алгебры Урбаника распространяются некоторые теоремы гармонического анализа, справедливые для гиперкомплексных систем. Приведен пример такой свертки.

1. Пусть dm — борелевская мера на R^+. Рассмотрим пространство мер $M = \{fdm \mid f \in L_1(R^+, dm),\ f \geqslant 0\}$. Очевидно, $M \subset \mathcal{P}$, где $\mathcal{P}$ — пространство конечных борелевских мер на R^+. Обозначим через $\mathcal{B}(R^+)$ борелевские множества на R^+, $C_0(R^+)$ — пространство непрерывных финитных функций.

Коммутативная и ассоциативная операция $\circ$ на $\mathcal{P}_0$ называется обобщенной сверткой (о. с.), если выполнены следующие требования:

1. $\delta_0 \circ \pi = \pi$, $\pi \in \mathcal{P}_0$. Здесь и далее δ_t — вероятностная мера, сконцентрированная в точке t.

2. $(a\pi + b\mu) \circ \nu = a(\pi \circ \nu) + b(\mu \circ \nu)$; $a, b \geqslant 0$, $a + b = 1$; $\pi, \mu, \nu \in \mathcal{P}_0$.

3. $H_a\pi \circ H_a\mu = H_a(\pi \circ \mu)$, где $H_a\pi(A) = \pi(a^{-1}A)$, $A \in \mathcal{B}(R^+)$, $a \geqslant 0$, $(a^{-1}A) = \{x \mid ax \in A,\ x \geqslant 0\}$; при этом $H_0\pi = \delta_0$; $\pi, \mu \in \mathcal{P}_0$.

4. Если $\pi_n \xrightarrow{w} \pi$, то $\pi_n \circ \mu \xrightarrow{w} \pi \circ \mu$ для всех $\mu \in \mathcal{P}_0$.

5. Существует последовательность $c_1, c_2, \ldots$ положительных чисел, таких что последовательность $H_{c_n}\delta_1^{\circ n}$ слабо сходится к мере, отличной от δ_0. Степень $\delta_a^{\circ n}$ понимается в смысле операции $\circ$, т. е. $\delta_a^{\circ 1} = \delta_a$, $\delta_a^{\circ(n+1)} = \delta_a \circ \delta_a^{\circ n}$, $n = 1, 2, \ldots$.

По линейности распространим операцию $\circ$ на $\mathcal{P}$. Будем называть $(\mathcal{P}, \circ)$ обобщенной сверточной алгеброй (о. с. а.).

Имеет место представление (см. [4]):

$$\int_0^\infty f(w)(\pi \circ \mu)(dw) = \int_0^\infty \int_0^\infty T^v f(u)\, d\pi(u)\, d\mu(v), \tag{1}$$

где

$$T^v f(u) = \int_0^\infty f(w)(\delta_u \circ \delta_v)(dw), \qquad f \in L_\infty(R^+, dm). \tag{2}$$

Предположим дополнительно, что мера dm обладает свойством инвариантности, т. е.

$$\int_0^\infty \tilde{T}^v f(u)\, dm(u) = \int_0^\infty f(u)\, dm(u). \tag{3}$$

Здесь $\tilde{T}^v$ — оператор, являющийся сужением на $L_1(R^+, dm)$ оператора, сопряженного к T^v.

Нетрудно показать, что M замкнуто относительно операции $\circ$, т. е. мера $fdm \circ gdm$ абсолютно непрерывна относительно меры dm. Тогда для функций $f, g \in L_1(R^+, dm)$, $f, g \geqslant 0$, можно ввести свертку $*$ следующим образом:

$$(f * g)(x) = \frac{fdm \circ gdm}{dm} = \int_0^\infty f(y)\, \tilde{T}^y g(x)\, dm(y), \tag{4}$$

причем такая свертка очевидным образом распространяется на все функции из $L_1(R^+, dm)$. Положим теперь

$$\gamma(A, B, x) = (\varkappa_A * \varkappa_B)(x); \ A, B \in \mathcal{B}(R^+), \ x \geqslant 0. \tag{5}$$

Такая функция обладает свойствами структурной меры гиперкомплексной системы (г. с.) [5, с. 6]. Действительно, $\gamma(A, B, x)$ является мерой по A при фиксированных B и x и мерой по B при фиксированных A и x. Коммутативность и ассоциативность $\gamma(A, B, x)$ вытекает из соответствующих свойств о. с., а непрерывность следует из свойств оператора T^y и того факта, что свертка любых двух функций f, g из $L_1(R^+, dm)$, одна из которых ограничена, непрерывна. Для этого достаточно свертку $f * g$ приблизить свертками функций из $C_0(R^+)$ в смысле ess sup на R^+. Это делается почти так же, как и при доказательстве леммы 1.1 (см. [5]) в случае $\alpha = 1$. Таким образом, $\gamma(A, B, x)$ действительно структурная мера, причем в качестве мультипликативной меры построенной г. с. можно взять меру dm, так как в силу (3)

$$\int_0^\infty \gamma(A, B, x)\, dm(x) = \int_0^\infty \int_0^\infty \varkappa_A(y)\, \tilde{T}^y \varkappa_B(x)\, dm(y)\, dm(x) =$$

$$= \int_0^\infty \varkappa_A(y)\, dm(y) \int_0^\infty \tilde{T}^y \varkappa_B(x)\, dm(x) = m(A)\, m(B).$$

Введем на R^+ тождественную инволюцию, тогда полученная г. с. будет эрмитовой [5, с. 15]. Если кроме этого на соответствующих f и g

$$\int_0^\infty g(x)\, T^y f(x)\, dm(x) = \int_0^\infty T^y g(x)\, f(x)\, dm(x), \tag{6}$$

то можно показать, что в этом случае полученная г. с. окажется нормальной [5, с. 15].

2. Установим соответствие между гомоморфизмами исходной о. с. а. [1, с. 219] и характерами построенной г. с. [5, с. 8]. Положим

$$\chi(x) = h(\delta_x), \qquad x \geqslant 0. \tag{7}$$

Таким образом по гомоморфизму h строится характер χ. Обратное, вообще говоря, неверно, поскольку гомоморфизмы обязательно непрерывны. Однако, в случае нормальной г. с., для которой в силу теоремы 1.4 из [5] характеры непрерывны, между гомоморфизмами исходной о. с. а. и характерами построенной г. с. существует взаимно-однозначное соответствие. Заметим, что гомоморфизм h, строящийся по некоторому характеру χ по формуле (7), действительно достаточно задавать на мерах типа δ_x, что следует из представления [1, с. 222]

$$h(\mu) = \int_0^\infty h(\delta_x)\, d\mu(x), \qquad \mu \in \mathcal{P}.$$

Теорема 1. *Каждому гомоморфизму исходной о. с. а. соответствует максимальный идеал построенной г. с. $L_1(R^+, dm)$. В случае, когда построенная г. с. нормальна, это соответствие взаимно-однозначно. Соответствующие гомоморфизм h и максимальный идеал $\mathcal{M}$ связаны формулой*

$$f(\mathcal{M}) = \int_0^\infty h(\delta_x) f(x)\, dm(x). \tag{8}$$

Эта теорема вытекает из соответствующего результата для характеров г. с. (см., например, [5, с. 9]).

Кроме того, характеры г. с., построенной по о. с. а., обладают некоторыми специфическими свойствами по сравнению с характерами обыкновенных г. с. В частности, для каждого нетривиального характера $\chi(x)$ г. с., построенной по о. с. а.: а) существует число $\alpha_0 > 0$ такое, что $\chi(x) < 1$ при $0 < x \leqslant \alpha_0$; б) $\chi(tx)$ также является характером $(t > 0)$. Доказательство этих фактов основано на свойствах 3 и 5 операции $\circ$.

Заметим также, что в случае, когда построенная г. с. является нормальной, семейство ее характеров полно в $L_1(R^+, dm)$ в силу теоремы 1.6 из [5], поэтому с учетом (7) исходная о. с. а. обладает нетривиальными гомоморфизмами, т. е. регулярна.

3. Будем предполагать в дальнейшем, что построенная г. с. нормальна. Наделим пространство $\mathcal{H}$ всех гомоморфизмов исходной о. с. а. топологией пространства максимальных идеалов. Для любой $f \in L_1(R^+, dm)$ и любого гомоморфизма $h \in \mathcal{H}$ положим

$$\hat{f}(h) = \int_0^\infty h(\delta_x) f(x)\, dm(x). \tag{9}$$

В силу теоремы 1 $\hat{f}(h) = f(\mathcal{M})$, где $\mathcal{M}$ — максимальный идеал алгебры $L_1(R^+, dm)$, отвечающий гомоморфизму h. Отсюда, в частности, следует: а) $(f_1 + f_2)\hat{}(h) = \hat{f}_1(h) + \hat{f}_2(h)$; б) $(\lambda f)\hat{}(h) = \lambda \hat{f}(h)$; в) $(f_1 * f_2)\hat{}(h) = \hat{f}_1(h)\hat{f}_2(h)$.

Пусть $N =$ л. о. $(L_1(R^+, dm) \cap P(R^+))$, где $P(R^+)$ — совокупность всех положительно определенных функций в смысле [5, с. 26].

Теорема 2. *На $\mathcal{H}$ существует регулярная борелевская мера $d\hat{m}(h)$, такая, что для любой функции $f \in N$: 1) $\hat{f} \in L_1(\mathcal{H}, d\hat{m})$; 2) $f(x) = \int_0^\infty \hat{f}(h) h(\delta_x)\, d\hat{m}(h)$.*

Справедливы также теоремы, являющиеся аналогами теорем Планшереля и Бохнера.

Т е о р е м а 3. *Преобразование $f \to \hat{f}$ является изометрическим отображением множества, плотного в $L_2(R^+, dm)$, на множество, плотное в $L_2(\mathcal{H}, d\hat{m})$, и поэтому продолжается единственным образом до изометрического отображения $L_2(R^+, dm)$ на $L_2(\mathcal{H}, d\hat{m})$.*

Т е о р е м а 4. *Всякая непрерывная положительно определенная функция представима единственным образом в виде*

$$p(x) = \int_{\mathcal{H}} h(\delta_x)\, d\tilde{\mu}(h) \tag{10}$$

где $\tilde{\mu}$ — неотрицательная конечная регулярная мера на $\mathcal{H}$.

При доказательстве теорем 2—4 используются соответствующие факты теории г. с. и связь гомоморфизмов исходной о. с. а. с характерами построенной г. с., установленная формулой (7).

П р и м е р. Пусть о. с. задается следующим образом:

$$\int_0^\infty f(x)(\mu \circ \nu)(dx) = \frac{1}{2}\int_0^\infty\int_0^\infty (f((x^\alpha + y^\alpha)^{1/\alpha}) + f(|x^\alpha - y^\alpha|^{1/\alpha}))\, d\mu(x)\, d\nu(y),$$

$$\mu, \nu \in \mathcal{P},$$

т. е. действие оператора T^y имеет вид

$$T^y f(x) = \frac{1}{2}(f((x^\alpha + y^\alpha)^{1/\alpha}) + f(|x^\alpha - y^\alpha|^{1/\alpha}));\ \ x, y \geqslant 0.$$

Положим $dm = x^{\alpha-1}dx$, dx — мера Лебега. Равенства (3) и (6) легко проверяются, поэтому г. с. $L_1(R^+, dm)$, построенная таким образом, является нормальной. Ее характеры должны удовлетворять уравнению

$$\frac{1}{2}(\chi((x^\alpha + y^\alpha)^{1/\alpha}) + \chi(|x^\alpha - y^\alpha|^{1/\alpha})) = \chi(x)\,\chi(y);\ \ x, y \geqslant 0;\ \ |\chi(x)| \leqslant 1.$$

Решения данного уравнения — функции вида $\chi(t, \lambda) = \cos \lambda t^\alpha$, $t \geqslant 0$, $\lambda \geqslant 0$. Применяя теорему Бохнера для данного случая, получаем представление для положительно определенной функции $p(x)$:

$$p(x) = \int_0^\infty \cos \lambda x^\alpha d\sigma(\lambda), \quad x \geqslant 0, \tag{11}$$

$d\sigma(\lambda)$ — конечная мера на R^+ Отметим также, что для исходной о. с. а. все гомоморфизмы имеют вид

$$h(\mu) = \int_0^\infty \cos \lambda x^\alpha d\mu(x), \quad \mu \in \mathcal{P}. \tag{12}$$

1. *Urbanik K.* Generalized convolutions // Studia Math.— 1964.— **23**, N 3.— P. 217—245.
2. *Urbanik K.* Generalized convolutions II / Ibid.— 1973.— **45**, N 1.— P. 57—70.
3. *Urbanik K.* Generalized convolutions III // Ibid.— 1984.— **80**, N 2.— P. 167—189.
4. *Волькович В. Э.* Об аналитическом описании алгебр К. Урбаника // Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук.— 1979.— № 5.— С. 12—17.
5. *Березанский Ю. М., Калюжный А. А.* Гиперкомплексные системы с локально компактным базисом.— Киев, 1982.— 53 с.— (Препринт / АН УССР, Ин-т математики; 82.40).
6. *Березанский Ю. М., Крейн С. Г.* Гиперкомплексные системы с континуальным базисом // Успехи мат. наук.— 1957.— **12**, № 1.— С. 147—152.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 19.06.85