УДК 517.956

В. А. Маловичко

О нелокальной краевой задаче для уравнения четвертого порядка

В настоящей работе изучается разрешимость нелокальной краевой задачи для уравнения

$$Lu(x, y) \equiv M^* Mu(x, y) + e(x, y)\, u = f(x, y), \tag{1}$$

где $Mu(x, y) = k(y)\, u_{xx} - u_{yy} + a(x, y)\, u_x + b(x, y)\, u_y + c(x, y)\, u$, $k(y) > 0$ при $y < 0$, $k(y) = 0$ при $y \geqslant 0$, M^* — оператор, формально сопряженный с оператором M. Отметим, что оператор M гиперболо-параболический.

Пусть Ω — односвязная область на плоскости, ограниченная в верхней полуплоскости отрезками прямых с концами в точках $A(-1,0)$, $B(-1,1)$, $C(1,1)$, $D(1,0)$, а в нижней полуплоскости—двумя характеристиками AE и DE оператора M (точка E лежит на оси Oy); $(l_1(x, y), l_2(x, y))$— вектор единичной внешней нормали к границе Γ области Ω в точке $(x, y) \in \Gamma$; $\Gamma_1 = DE$, $\Gamma_2 = AE$, $\Gamma_3 = CD$, $\Gamma_4 = AB$, $\Gamma_5 = BC$, $\Gamma_3^* = \{(x, y) \in \Gamma_3 : a(x, y) \neq 0\}$, $\Gamma_4^* = \{(x, y) \in \Gamma_4 : a(x, y) \neq 0\}$.

Будем предполагать, что $k(y)$, $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y) \in C^2(\overline{\Omega})$; $e(x, y) \in C(\overline{\Omega})$; $e(x, y) > \alpha > 0$, $(x, y) \in \Omega$;

$$a(x, y) = -a(-x, y),\ (x, y) \in \Gamma_1 \cup \Gamma_3,\ b(x, y) = b(-x, y),\ (x, y) \in \Gamma_1, \tag{2}$$
$$c(x, y) = c(-x, y), \quad (x, y) \in \Gamma_1.$$

Так как AE и DE — характеристики оператора M, то

$$k(y)\, l_1^2(x, y) - l_2^2(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2. \tag{3}$$

З а д а ч а. В области Ω найти решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$u(x, y) = \omega u(-x, y), \quad (x, y) \in \Gamma_1 \cup \Gamma_3^*, \tag{4}$$

$$Mu(x, y) = -\omega Mu(-x, y), \quad (x, y) \in \Gamma_2 \cup \Gamma_4^*, \tag{5}$$

$$u(x, y) = u_y(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Gamma_5, \tag{6}$$

где $\omega = \text{const}$.

Введем следующие обозначения: W — множество функций $u(x, y) \in C^4(\overline{\Omega})$, удовлетворяющих условиям (4)—(6), H_+— гильбертово пространство, полученное замыканием множества W по норме

$$\| u \|_+^2 = \int_\Omega [(Mu)^2 + u^2]\, d\Omega,$$

H_-— пространство с негативной нормой $\| \cdot \|_-$, построенное по $L_2(\Omega)$ и H_+.

Л е м м а 1. *Задача* (1), (4)—(6) *является самосопряженной.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Интегрируя по частям выражение $Lu \cdot v$, u, $v \in W$, получаем

$$\int_\Omega Lu \cdot v d\Omega = \int_\Gamma [k(Mu)_x l_1 - (Mu)_y l_2]\, v d\Gamma - \int_\Gamma (al_1 + bl_2)\, Mu \cdot v d\Gamma -$$
$$- \int_\Gamma Mu\, (kv_x l_1 - v_y l_2)\, d\Gamma + \int_\Gamma (ku_x l_1 - u_y l_2)\, Mv d\Gamma + \int_\Gamma (al_1 + bl_2)\, u \cdot Mv d\Gamma -$$
$$- \int_\Gamma u\, [k(Mv)_x l_1 - (Mv)_y l_2]\, d\Gamma + \int_\Omega u \cdot Lv d\Omega. \tag{7}$$

Обозначим

$$Q(x,y)=\{k(y)[Mu(x,y)]_x l_1(x,y)-[Mu(x,y)]_y l_2(x,y)\}\,v(x,y),\quad (x,y)\in\Gamma. \tag{8}$$

Очевидно, что $Q(x,y)=0$ на $\Gamma_3\cup\Gamma_4\cup\Gamma_5$. Покажем, что при $\omega\neq 0$

$$Q(x,y)=-Q(-x,y),\quad (x,y)\in\Gamma_1. \tag{9}$$

Меняя в (8) x на $-x$ и учитывая, что $l_1(-x,y)=-l_1(x,y)$, $l_2(-x,y)=l_2(x,y)$, имеем

$$Q(-x,y)=\{k(y)[Mu(-x,y)]_x l_1(x,y)-[Mu(-x,y)]_y l_2(x,y)\}\,v(-x,y),$$
$$(x,y)\in\Gamma_1.$$

Учитывая условия (4), (5), получаем

$$Q(-x,y)=\{k(y)[-\omega Mu(x,y)]_x l_1(x,y)-[-\omega Mu(x,y)]_y l_2(x,y)\}\times$$
$$\times\frac{v(x,y)}{\omega}=-Q(x,y),\quad (x,y)\in\Gamma_1.$$

Покажем, что при $\omega=0$

$$Q(x,y)=0,\quad (x,y)\in\Gamma_1\cup\Gamma_2. \tag{10}$$

Поскольку оператор $l_1\,\partial/\partial y-l_2\partial/\partial x$ является внутренним дифференциальным оператором на $\Gamma_1\cup\Gamma_2$, то из условия (5) следует

$$l_1(Mu)_y-l_2(Mu)_x=0 \text{ на } \Gamma_2. \tag{11}$$

Умножая (11) на l_2 и учитывая (3), находим $k(y)(Mu)_x l_1-(Mu)_y l_2=0$ на Γ_2. Следовательно, $Q(x,y)=0$ на Γ_2.

Из условия (4) при $\omega=0$ следует $Q(x,y)=$ на Γ_1.

На основании (9), (10) заключаем, что первый интеграл по Γ в (7) равен нулю.

Обозначим

$$P(x,y)=[a(x,y)\,l_1(x,y)+b(x,y)\,l_2(x,y)]\,Mu(x,y)\cdot v(x,y),\quad (x,y)\in\Gamma.$$

В силу условия (6) $P(x,y)=0$ на Γ_5. В силу условий (2), (4), (5), при $\omega\neq 0$

$$P(-x,y)=[a(x,y)\,l_1(x,y)+b(x,y)\,l_2(x,y)]\,[-\omega Mu(x,y)]\,\frac{v(x,y)}{\omega}=$$
$$=-P(x,y),\quad (x,y)\in\Gamma_1\cup\Gamma_3.$$

Если же $\omega=0$, то $P(x,y)=0$ на $\Gamma\setminus\Gamma_5$ в силу условий (4), (5).

Таким образом, второй интеграл по Γ в (7) равен нулю. Аналогично можно показать, что и остальные интегралы по Γ в (7) равны нулю. Лемма доказана.

Лемма 2. *Для любой функции $u(x,y)\in W$ выполняются энергетические неравенства*

$$\gamma_1\|u\|_+\geqslant\|Lu\|_-\geqslant\gamma_2\|u\|_+, \tag{12}$$

где γ_1, γ_2 — положительные постоянные, не зависящие от $u(x,y)$.

Доказательство. Интегрируя по частям выражение $Lu\cdot u$, $u\in W$, и учитывая, что интегралы по Γ в силу условий (4)—(6) равны нулю, имеем

$$\int_\Omega Lu\cdot u\,d\Omega=\int_\Omega[(Mu)^2+eu^2]\,d\Omega. \tag{13}$$

Так как $e(x,y)>\alpha>0$, то, применяя к левой части (13) неравенство Шварца, получаем правое неравенство (12).

Левое неравенство (12) доказывается так:

$$\|Lu\|_- = \sup_{v\in H_+} \frac{\int\limits_\Omega Lu\cdot v d\Omega}{\|v\|_+} = \sup_{v\in W} \frac{\int\limits_\Omega Lu\cdot v d\Omega}{\|v\|_+} =$$

$$= \sup_{v\in W} \frac{\int\limits_\Omega (Mu\cdot Mv + euv)\, d\Omega}{\|v\|_+} \leqslant \sup_{v\in W} \frac{\gamma_1 \|u\|_+ \|v\|_+}{\|v\|_+} = \gamma_1 \|u\|_+.$$

Лемма доказана.

Определение. *Пусть* $f(x, y) \in L_2(\Omega)$. *Функцию* $u(x, y) \in H_+$ *назовем сильным решением задачи* (1), (4) — (6), *если существует последовательность функций* $u_k(x, y) \in W$ *такая, что*

$$\lim_{k\to\infty} \|u_k - u\|_+ = \lim_{k\to\infty} \|Lu_k - f\|_- = 0.$$

Согласно [1, с. 93—108], из неравенств (12) следует такая теорема.

Теорема. *Для любой функции* $f(x, y) \in L_2(\Omega)$ *существует единственное сильное решение* $u(x, y) \in H_+$ *задачи* (1), (4)—(6).

1. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов.— Киев : Наук. думка, 1965.— 798 с.

Киев. технол. ин-т пищ. пром-сти

Получено 22.02.85
после доработки — 01.08.85