УДК 517.984

Н. В. Жернаков

Прямая и обратная задачи для периодической якобиевой матрицы

В настоящей работе изучается вид спектральной матрицы разностного оператора второго порядка с периодическими коэффициентами. Подобные вопросы для оператора Штурма — Лиувилля с периодическим потенциалом рассматривались, например, в [1—3]. Благодаря ограниченности и конечнозонности спектра периодической якобиевой матрицы удалось получить необходимые и достаточные условия на ее спектральную матричную меру. При доказательстве используется метод удвоения для разностных операторов на оси, предложенный в [4]. Как вспомогательный факт приводится теорема, описывающая все спектральные матрицы, которые соответствуют разностным операторам второго порядка на оси. Тот же вопрос для операторов Штурма — Лиувилля рассмотрен в [5].

Пусть $l_2(-\infty, \infty)$ — гильбертово пространство векторов $\vec{x} = (\ldots, x_{-k}, x_{-k+1}, \ldots, x_0, \ldots, x_k, x_{k+1} \ldots) = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ со скалярным произведением $(\vec{x}, \vec{y}) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} x_k\bar{y}_k$.

Рассмотрим разностное выражение

$$(L\varphi)(n) = a_{n-1}\varphi(n-1) + b_n\varphi(n) + a_n\varphi(n+1), \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

и разностный оператор второго порядка на оси, действующий в $l_2(-\infty, \infty)$ и порожденный (1). Будем предполагать, что все a_n положительны, а b_n вещественны. Следующая теорема описывает свойства спектральной матрицы такого оператора.

Теорема 1. *Пусть* $\Sigma(\Delta) = \begin{pmatrix} \sigma_{00}(\Delta) & \sigma_{0-1}(\Delta) \\ \sigma_{0-1}(\Delta) & \sigma_{-1-1}(\Delta) \end{pmatrix}$ — *положительно определенная матричная мера на борелевских подмножествах действительной прямой такая, что для любого натурального* k $\int\limits_{\mathbb{R}^1} |\lambda|^k d\Sigma(\lambda) < \infty$ *и* $\int\limits_{\mathbb{R}^1} d\Sigma(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Для того чтобы она являлась спектральной матрицей разностного оператора на оси, необходимо при $c = \alpha = a_{-1}$ *и достаточно при некотором* c *и некотором* α *выполнение следующих условий:*

1) $\int\limits_{\mathbb{R}^1} \lambda d\sigma_{0-1}(\lambda) = \alpha > 0$;

2) *для функций* $M_{00}(z) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} \frac{1}{\lambda - z} d\sigma_{00}(\lambda)$, $M_{0-1}(z) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} \frac{1}{\lambda - z} d\sigma_{0-1}(\lambda)$, $M_{-1-1}(z) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} \frac{1}{\lambda - z} d\sigma_{-1-1}(\lambda)$ *в верхней полуплоскости справедливо тождество*

$$-c\,(M_{00}(z)\,M_{-1-1}(z) - M_{0-1}^2(z)) = M_{0-1}(z); \tag{2}$$

3) *функции* $m_1(z) = -\frac{M_{0-1}(z)}{\alpha M_{00}(z)}$, $m_2(z) = -\frac{M_{0-1}(z)}{\alpha M_{-1-1}(z)}$ *не являются рационально зависящими от* z.

При выполнении условий 1 — 3 $\alpha = c = a_{-1}$, *где* a_{-1} — *элемент якобиевой матрицы, построенной по* $d\Sigma(\lambda)$, *а функции* $m_1(z)$ *и* $m_2(z)$ *являются функциями Вейля полубесконечных верхней и нижней якобиевых матриц соответственно* (*см.* (3))

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} \ddots & & & & & & \\ a_{-3} & b_{-3} & a_{-2} & & & & \\ & a_{-2} & b_{-1} & a_{-1} & & & \\ \hline & & a_{-1} & b_0 & a_0 & & \\ & & & a_0 & b_1 & a_1 & \\ & & & & a_1 & b_1 & a_2 \\ & & & & & \ddots & \end{array}\right) \tag{3}$$

Замечания к теореме 1.

1. Теорема справедлива независимо от того, самосопряжен или нет разностный оператор в $l_2(-\infty, \infty)$, соответствующий (1).

2. Условия 3 нельзя ослабить до предположения у меры $d\Sigma(\lambda)$ бесконечного числа точек роста. В качестве примера рассмотрим $d\sigma_{00}(\lambda) =$

$$= \frac{1}{3} I_{[-2,-1/2]\cup[1/2,2]}(\lambda)\,d\lambda, \quad d\sigma_{0-1}(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\,d\sigma_{00}(\lambda), \quad d\sigma_{-1-1}(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2}\,d\sigma_{00}(\lambda).$$

Для такой матрицы выполнено условие 1 с $\alpha = 1$, тождество (2) с $c = 1$, но $m_1(z) = -M_{0-1}(z)/M_{00}(z) = -1/z$.

Рассмотрим разностное выражение (1) с периодическими (с периодом N) коэффициентами $a_n = a_{n+N}$, $b_n = b_{n+N}$. Пусть $\varphi_{-1}(n, \lambda)$ и $\varphi_0(n, \lambda)$ — два решения разностного уравнения $(L\varphi)(n) = \lambda\varphi(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, с начальными данными $\varphi_{-1}(-1, \lambda) = 1$, $\varphi_{-1}(0, \lambda) = 0$, $\varphi_0(-1, \lambda) = 0$, $\varphi_0(0, \lambda) = 1$. Для таких решений при всех целых n справедлива формула

$$\begin{pmatrix} \varphi_{-1}(n+N, \lambda) \\ \varphi_0(n+N, \lambda) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \varphi_{-1}(n, \lambda) \\ \varphi_0(n, \lambda) \end{pmatrix}, \quad \text{где } M = \begin{pmatrix} \varphi_{-1}(N-1, \lambda) & \varphi_{-1}(N, \lambda) \\ \varphi_0(N-1, \lambda) & \varphi_0(N, \lambda) \end{pmatrix}$$

— матрица монодромии. Рассматриваемое разностное выражение порождает в $l_2(-\infty, \infty)$ ограниченный самосопряженный оператор; обозначим его через A. Спектр оператора A совпадает с $\{\lambda : \Delta^2(\lambda) \leqslant 4\}$, где $\Delta(\lambda) = \varphi_0(N, \lambda) + \varphi_{-1}(N-1, \lambda)$, и состоит из конечного числа зон $[\lambda_1, \lambda_2] \cup [\lambda_3, \lambda_4] \cup \ldots \cup [\lambda_{2N-1}, \lambda_{2N}]$. Точки $\lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \lambda_3 < \lambda_4 \leqslant \lambda_5 < \ldots \leqslant \lambda_{2N-1} < \lambda_{2N}$ являются корнями уравнения $\Delta^2(\lambda) = 4$ (см. [6, 7]). Оказывается, что знание матрицы монодромии позволяет не только найти спектр оператора, но и выписать его спектральную матрицу.

Теорема 2. *Спектральная матрица оператора A имеет вид*

$$d\Sigma(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\begin{pmatrix} \dfrac{\varphi_0(N-1, \lambda)\,d\lambda}{\pm a_{-1}\sqrt{4-\Delta^2(\lambda)}} & \dfrac{(\varphi_0(N, \lambda) - \varphi_{-1}(N-1, \lambda))\,d\lambda}{\pm 2a_{-1}\sqrt{4-\Delta^2(\lambda)}} \\ \dfrac{(\varphi_0(N, \lambda) - \varphi_{-1}(N-1, \lambda))\,d\lambda}{\pm 2a_{-1}\sqrt{4-\Delta^2(\lambda)}} & \dfrac{-\varphi_{-1}(N, \lambda)\,d\lambda}{\pm a_{-1}\sqrt{4-\Delta^2(\lambda)}} \end{pmatrix} \\ 0, \quad \lambda \notin \bigcup\limits_{k=1}^{N} [\lambda_{2k-1}, \lambda_{2k}]. \quad \lambda \in \bigcup\limits_{k=1}^{N} [\lambda_{2k-1}, \lambda_{2k}], \end{cases}$$

Знак перед корнем выбирается следующим образом. Рассмотрим комплексную плоскость с разрезами вдоль интервалов спектра и выберем перед корнем знак $+$ на верхнем крае разреза вдоль $[\lambda_{2N-1}, \lambda_{2N}]$, знаки на верхних краях других разрезов определяются аналитическим продолжением.

Диагональные элементы $d\Sigma(\lambda)$ положительны благодаря выбору знака и тому, что $\varphi_0(N-1, \lambda)$ и $\varphi_{-1}(N, \lambda)$ имеют чередующиеся знаки на последовательных зонах спектра.

С помощью метода удвоения для разностных выражений на оси и теоремы 1 доказывается теорема, обратная к теореме 2.

Теорема 3. *Пусть*

$$\lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \lambda_3 < \lambda_4 \leqslant \lambda_5 < \ldots \leqslant \lambda_{2N-1} < \lambda_{2N} \tag{4}$$

— набор действительных точек, определяющий зоны спектра оператора с периодическими коэффициентами (необходимые и достаточные условия см. в [7]). Предположим, что матрица $d\Sigma(\lambda)$ имеет вид

$$d\Sigma(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\begin{pmatrix} \dfrac{P(\lambda)\,d\lambda}{\pm\sqrt{R(\lambda)}} & \dfrac{Q(\lambda)\,d\lambda}{\pm 2a\sqrt{R(\lambda)}} \\ \dfrac{Q(\lambda)\,d\lambda}{\pm 2a\sqrt{R(\lambda)}} & \dfrac{S(\lambda)\,d\lambda}{\pm\sqrt{R(\lambda)}} \end{pmatrix}, & \lambda \in \bigcup\limits_{k=1}^{N} [\lambda_{2k-1}, \lambda_{2k}], \\ 0, & \lambda \notin \bigcup\limits_{k=1}^{N} [\lambda_{2k-1}, \lambda_{2k}], \end{cases}$$

где

1) $R(\lambda) = -\prod_{k=1}^{2N}(\lambda - \lambda_k)$;

2) *знак перед корнем выбирается так, чтобы на верхней части разреза вдоль* $[\lambda_{2N-1}, \lambda_{2N}]$ *он был положительным, а далее определяется аналитическим продолжением;*

3) $P(\lambda) = \lambda^{N-1} + p_1\lambda^{N-2} + \ldots + p_{l-1}$, $S(\lambda) = \lambda^{N-1} + s_1\lambda^{N-2} + \ldots + s_{N-1}$ *имеет чередующиеся знаки на последовательных интервалах спектра;*

4) *полином* $Q(\lambda) = \lambda^N + q_1\lambda^{N-1} + \ldots + q_N$, *константа* $a > 0$, $P(\lambda)$, $S(\lambda)$ *и* $R(\lambda)$ *удовлетворяют тождеству*

$$4a^2P(\lambda)\,S(\lambda) - Q^2(\lambda) \equiv R(\lambda), \tag{5}$$

тогда $d\,\Sigma(\lambda)$ *является спектральной матрицей разностного оператора с периодическими коэффициентами, причем период коэффициентов (возможно не наименьший) равен* N.

С помощью теоремы 3 можно дать другое решение задачи восстановления периодической якобиевой матрицы по спектральным данным, рассмотренным в [7]. Пусть заданы набор крайних точек зон спектра (4), ν_k, $k = 1, 2, \ldots, N-1$, — корни полинома $\varphi_0(N-1, \lambda)$ и $\varepsilon_k = \operatorname{sgn}(\varphi_0(N, \nu_k) - \varphi_{-1}(N-1, \nu_k))$. По набору (4) восстановим $\Delta(\lambda)$. Так как $\varphi_{-1}(N-1, \nu_k) = \dfrac{\Delta(\nu_k) - \varepsilon_k\sqrt{\Delta^2(\nu_k) - 4}}{2}$, $k = 1, 2, \ldots, N-1$, найдем $\varphi_{-1}(N-1, \lambda)$ по интерполяционной формуле Лагранжа. В качестве $Q(\lambda)$ возьмем $Q(\lambda) = \dfrac{\Delta(\lambda) - 2\varphi_{-1}(N-1, \lambda)}{q}$, где q — старший коэффициент числителя. Положим $P(\lambda) = \prod_{k=1}^{N-1}(\lambda - \lambda_k)$, определим a и $S(\lambda)$ из (5). Следовательно, по спектральным данным можно записать спектральную матрицу и найти коэффициенты разностного выражения путем псевдоортогонализации системы $1, \lambda, \lambda^2, \ldots$ по $d\Sigma(\lambda)$ (см. [4], гл. VII). Заметим, что для вычисления элементов периодической якобиевой матрицы достаточно псевдоортогонализировать набор $1, \lambda, \ldots, \lambda^{[N/2]+2}$.

1. *Титчмарш Э. Ч.* Разложение по собственным функциям.— М. : Изд-во иностр. лит., 1961.— Т. 2.— 555 с.
2. *Левитан Б. М.* Обратные задачи Штурма — Лиувилля.— М. : Наука, 1984.— 240 с.
3. *Марченко В. А.* Операторы Штурма — Лиувилля и их приложения.— Киев : Наук. думка, 1977.— 329 с.
4. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов.— Киев : Наук. думка, 1965.— 800 с.
5. *Рофе-Бекетов Ф. С.* Спектральная матрица и обратная задача Штурма — Лиувилля на всей оси $(-\infty, \infty)$ // Теория функций, функцион. анализ и их приложения.— 1967.— Вып. 4.— С. 189—197.
6. *Тода М.* Теория нелинейных решеток.— М. : Мир, 1984.— 282 с.
7. *Перколаб Л. В.* Обратная задача для периодической матрицы Якоби // Теория функций, функцион. анализ и их приложения.— 1984.— Вып. 42.— С. 107—121.

Киев. ун-т

Получено 11.12.85