УДК 511+512.62

В. Н. Калюжный

p-Адические меры с заданными лорановскими моментами

Пусть $\mathbb{Z}_p$ — компакт целых p-адических чисел, $K \supset \mathbf{Q}_p$ — поле, полное относительно абсолютного значения, продолжающего p-адическое. Предположим, что диск $t + p^s\mathbb{Z}_p \subset \mathbb{Z}_p$ не содержит нуля, т. е. $|p|^s < |t|$. В данной работе решается вопрос о существовании такой K-значной меры на $t+p^s\mathbb{Z}_p$, что

$$\int\limits_{t+p^s\mathbb{Z}_p} z^{-n}d\mu(z)=\theta_n,\quad n\geqslant 1, \tag{1}$$

где $(\theta_n)_{n\geqslant 1}$ — заданная последовательность элементов поля K. Отметим, что «лорановские» моменты (1) меры Мазура вычислены в [1]. Необходимые сведения о p-адическом интегрировании можно найти в [2, 3]. Ниже мы будем пользоваться стандартным отождествлением мер на $\mathbb{Z}_p$ с формальными степенными рядами, имеющими ограниченные коэффициенты [3]. Нам понадобится следующее решение степенной проблемы моментов на $\mathbb{Z}_p$ [4, 5]. Пусть

$$F(X)=\sum_{n\geqslant 0}\gamma_n\frac{X^n}{n!},\quad \log(1+X)=\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n-1}\frac{X^n}{n}\in K[[X]].$$

Лемма 1. *Для того чтобы степенная проблема моментов*

$$\int\limits_{\mathbb{Z}_p} z^n d\mu(z)=\gamma_n,\quad n\geqslant 0, \tag{2}$$

была разрешима, необходимо и достаточно, чтобы ряд $\mu(X)=F(\log(1+X))$ *имел ограниченные коэффициенты. Этот ряд отождествляется с искомой мерой* μ.

Далее для любой меры μ на $\mathbb{Z}_p$ положим, как и в [5]: $\mu^{(t,s)}(V)=\mu(t+p^sV)$, $V\subset\mathbb{Z}_p$.

Теорема. *Проблема моментов* (1) *разрешима тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{m\to\infty} C_m=0, \tag{3}$$

где

$$C_m=\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}Q_k,\quad m\geqslant 0, \tag{4}$$

$Q_k=t^{k+1}\theta_{k+1}$, *и формальный степенной ряд* $H\left(-\frac{t}{p^s}\log(1+X)\right)$,

$$H(X)=\sum_{n\geqslant 0}A_n\frac{X^n}{n!},\quad A_n=\sum_{m\geqslant n}(-1)^{m-n}\binom{m}{n}C_m, \tag{5}$$

имеет ограниченные коэффициенты. При этом

$$\mu^{(t,s)}(X)=H\left(-\frac{t}{p^s}\log(1+X)\right).$$

Для доказательства нам понадобится следующая лемма.

Лемма 2. *Для произвольных последовательностей* $(A_n)_{n\geqslant 0}\subset K$, $(Q_k)_{k\geqslant 0}\subset K$ *условия*

$$\lim_{n\to\infty} A_n=0, \tag{6}$$

$$\sum_{n\geqslant 0}\binom{n+k}{k}A_n=Q_k,\quad k\geqslant 0, \tag{7}$$

равносильны совокупности соотношений (3)—(5).

Доказательство леммы. Заметим вначале, что всякую аналитическую на $\mathbb{Z}_p$ функцию f можно представить в виде

$$f(z)=\sum_{n\geqslant 0}A_nz^n, \tag{8}$$

где (A_n) удовлетворяет условию (6), или

$$f(z)=\sum_{m\geqslant 0} C_m (z-1)^m, \tag{9}$$

где (C_m) удовлетворяет равенству (3). Коэффициенты этих разложений связаны соотношением (5). Для упомянутой функции имеем

$$\sum_{n\geqslant 0}\binom{n+k}{k} A_n=\left(\frac{D^k}{k!} z^k f(z)\right)(1)=\sum_{m=0}^{k}\frac{D^{k-m}}{(k-m)!}(z^k)\left(\frac{D^m}{m!} f(z)\right)(1)=$$

$$=\sum_{m=0}^{k}\binom{k}{m} C_m. \tag{10}$$

Напомним также, что равенства

$$\sum_{m=0}^{k}\binom{k}{m} C_m=Q_k,\quad k\geqslant 0, \tag{11}$$

и (4) образуют пару обратимых соотношений.

Предположим, что выполняются условия (6) и (7). Тогда формула (8) определяет аналитическую функцию на $\mathbb{Z}_p$, а следовательно, справедливы соотношения (5) и (3). Из (7) и (10) вытекает (11), откуда следует (4).

Пусть теперь выполняются соотношения (3)—(5). Из системы (4) следует (11). Условие (3) позволяет рассматривать аналитическую функцию f на $\mathbb{Z}_p$ в виде (9). Из (5) и (3) следует (6), а из (10), (11) вытекает (7).

Доказательство теоремы. Поскольку [5, с. 58]

$$t^{k+1}\int_{t+p^s\mathbb{Z}_p} z^{-k-1} d\mu(z)=t^{k+1}\int_{\mathbb{Z}_p}\frac{d\mu^{(t,s)}(z)}{(t+p^s z)^{k+1}}=$$

$$=\sum_{n\geqslant 0}\binom{n+k}{k}\left(-\frac{p^s}{t}\right)^n\int_{\mathbb{Z}_p} z^n d\mu^{(t,s)}(z),$$

условие теоремы равносильно справедливости равенств (7) для величин

$$A_n=\left(-\frac{p^s}{t}\right)^n\int_{\mathbb{Z}_p} z^n d\mu^{(t,s)}(z),\quad n\geqslant 0. \tag{12}$$

В силу того что для таких A_n условие (6) выполняется автоматически, систему (7) согласно лемме 2 можно заменить системой (3) — (5). Равенства (12) справедливы тогда и только тогда, когда выполняется соотношение (2) для $\mu=\mu^{(t,s)}$ и $\gamma_n=\left(-\frac{t}{p^s}\right)^n A_n$, $n\geqslant 0$. Экспоненциальная производящая функция этих величин имеет вид $F(X)=H\left(-\frac{t}{p^s}X\right)$. По лемме 1 соотношения 2 выполняются в том и только том случае, когда ряд $H\left(-\frac{t}{p^s}\log(1+X)\right)=F(\log(1+X))=\mu^{(t,s)}(X)$ имеет ограниченные коэффициенты.

Пример. Важную роль в p-адическом анализе играет мера μ_ξ [6, 7]. В [5] показано, что $\mu_\xi(X)=(1-\xi(1+X))^{-1}$ $(|1-\xi|\geqslant 1)$ является решением степенной проблемы моментов с $\gamma_n=D_n^{(\xi)}$, $n\geqslant 0$, определяемыми экспоненциальной производящей функцией $F(X)=(1-\xi e^X)^{-1}$.

Меру μ_ξ получим как решение проблемы моментов (1) с

$$\theta_n = \frac{(-1)^n \xi^t}{(n-1)!\, p^{sn}} G^{(n)}_{p,\xi^{p^s}}\left(\frac{t}{p^s}\right), \quad n \geqslant 1.$$

Здесь $G_{p,\xi}$ — «подкрученный» аналог лог-гамма-функции [7], который при $x \in \mathbb{C}_p$, $|x| > 1$, можно представить в виде

$$G_{p,\xi}(x) = -D_0^{(\xi)} \operatorname{Log}(x) + \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{nx^n} D_n^{(\xi)}. \tag{13}$$

На основании (4), (13) имеем

$$C_m = \xi^t \sum_{n=0}^{m} (-1)^{m-n} \binom{m}{n} \left(-\frac{t}{p^s}\right)^{n+1} \sum_{k\geqslant 0} \left(-\frac{p^s}{t}\right)^{n+k+1} \times$$

$$\times \binom{k+n}{n} D_k^{(\xi^{p^s})} = \xi^t \sum_{k\geqslant 0} \left(-\frac{p^s}{t}\right) D_k(\xi^{p^s}) \sum_{n=0}^{m} (-1)^{m-n} \times$$

$$\times \binom{m}{n}\binom{k+n}{k} = \xi^t \sum_{k\geqslant m} \left(-\frac{p^s}{t}\right)^k D^{(\xi^{p^s})} \binom{k}{m} \to 0$$

при $m \to \infty$. Далее согласно (5) получаем

$$A_n = \sum_{m\geqslant n} (-1)^{m-n} \binom{m}{n} \xi^t \sum_{k\geqslant m} \left(-\frac{p^s}{t}\right)^k D_k^{(\xi^{p^s})} \binom{k}{m} =$$

$$= \xi^t \sum_{k\geqslant n} \left(-\frac{p^s}{t}\right)^k D_k^{(\xi^{p^s})} \sum_{m=n}^{k} (-1)^{m-n} \binom{m}{n}\binom{k}{m} = \xi^t \left(-\frac{p^s}{t}\right)^n D_n^{(\xi^{p^s})}.$$

Наконец, по теореме находим

$$H(X) = \xi^t \sum_{n\geqslant 0} D_n^{(\xi^{p^s})} \frac{1}{n!} \left(-\frac{p^s}{t} X\right)^n = \frac{1}{1 - \xi^{p^s} \exp\left(-\frac{p^s}{t} X\right)},$$

$$\mu^{(t,s)}(X) = \frac{\xi^t}{1 - \xi^{p^s}(1+X)} = \xi^t \mu_{\xi^{p^s}}(X) = \mu_\xi^{(t,s)}(X).$$

Тем самым ограничения на диск $t + p^s\mathbb{Z}_p$ мер μ и μ_ξ совпадают.

Следствие. *Для того чтобы функция $f \in C(\mathbb{Z}_p)$ допускала интегральное представление вида $f(z) = \int_{1+p\mathbb{Z}_p} \lambda^{-z} d\mu(\lambda)$, необходимо и достаточно, чтобы ряд $H\left(-\frac{1}{p}\log(1+X)\right)$, где $H(X) = \sum_{n\geqslant 0} (\Delta^n f)(-n) \frac{X^n}{n!}$, $(\Delta f)(z) = f(z+1) - f(z)$, имел ограниченные коэффициенты. Этот ряд отождествляется с мерой $\mu^{(1,1)}$.*

Для доказательства достаточно заметить, что при $t = s = 1$ в обозначениях теоремы имеем

$$C_m = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} f(k+1) = (\Delta^m f)(1) \to 0, \quad m \to \infty,$$

$$A_n = \sum_{m\geqslant n} (-1)^{m-n} \binom{m}{n} (\Delta^m f)(1) = \left(\frac{\Delta^n}{(1+\Delta)^{n+1}} f\right)(1) = (\Delta^n f)(-n).$$

Можно показать, что это следствие эквивалентно следствию теоремы 2 из работы [5]. Другие подходы к вопросу об интегральном представлении указанного вида содержатся в теоремах 14 [8] и 2 [9].

1. *Diamond I.* The p-adic gamma measures // Proc. Amer. Math. Soc.— 1979.— **75**, N 2.— P. 211—217.
2. *Коблитц Н.* p-Адические числа, p-адический анализ и дзета-функции.— М. : Мир, 1982.— 192 с.
3. *Lang S.* Cyclotomic fields.— New York ets : Springer, 1978.— **11**.— 253 p.
4. *Amice Y.* Duals // Proc. of Conf. on p-adic Analysis, Nijmegen.— 1978.— P. 1—15.
5. *Калюжный В. Н.* Степенная проблема моментов на p-адическом диске // Теория функций, функцион. анализ и их приложения.— 1983.— Вып. 39.— С. 56—61.
6. *Осипов Ю. В.* p-Адическое преобразование Фурье // Успехи мат. наук.— 1979.— **34**.— Вып. 5.— С. 229—230.
7. *Koblitz N.* p-Adic analysis: a short course on recent Work // London Math. Soc. Lect. Note Ser.— 1980.— N 46.— 163 p.
8. *Serre J.-P.* Formes modulaires et fonctions zêta p-adiques // Lect Notes Math.— 1973.— № 350.— P. 192—268.
9. *Barsky D.* Transformation de Cauchy p-adique et algebra d'Iwasawa // Math. Ann.—1978.— **232**.— S. 255—266.

Харьк. ун-т

Получено 26.02.85