УДК 517.944

*Ю. А. Митропольский, Г. П. Хома*

# О периодических решениях волновых уравнений второго порядка. II

В данной работе исследуем существование классических периодических решений задачи, описанной уравнениями

$$u_{tt} - u_{xx} = g(x, t), \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad u(x, t + T) = u(x, t), \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

и соответствующей нелинейной задачи, описанной уравнением

$$u_{tt} - u_{xx} = f(x, t, u, u_t, u_x), \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

и условиями (2). Предварительно укажем ряд существенных особенностей существования, вообще, периодических решений для линейных и нелинейных волновых уравнений вида (1), (3) и для простейшего нелинейного уравнения

$$u_{tt} - u_{xx} = \varphi(u), \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0. \tag{3'}$$

Для указанных краевых задач установлены следующие результаты:

1) если функция $g(x, t)$ ограниченная, непрерывная вместе с производной $g_t(x, t)$ в области $\Pi = \{0 \leqslant x \leqslant \pi, \ t \in \mathbb{R}\}$, то в определенном классе трех видов периодических по $t$ функций $g(x, t)$, тесно связанных с периодами вида $T = 2\pi(2p - 1)/q$, $T = 4s\pi/(2m - 1)$, где $p$, $q$, $s$, $m$ — натуральные числа, существуют классические периодические решения краевой задачи (1), (2) [1];

2) если $\varphi(u)$ — непрерывная неубывающая функция такая, что $\lim\limits_{|u| \to \infty} \varphi(u)/u = 0$, то краевая задача (3) при достаточно большом $T$ имеет нетривиальное $T$-периодическое слабое решение $u \in L^\infty$ [2];

3) если $\varphi(u)$ — непрерывная вещественная функция, $\varphi(0) = 0$,

$$F(u) = \int\limits_{\Omega} \left[\frac{1}{2} uAu + G(u)\right] dxdt, \quad F^*(u) = \int\limits_{\Omega} \left[\frac{1}{2} uA^{-1}u + G^*(u)\right] dxdt,$$

$$\overline{\lim_{|u| \to 0}} \varphi(u)/u < \lambda_1(T), \quad \lim_{|u| \to \infty} \varphi(u)/u < |\lambda_1(T)|,$$

где $\Omega = (0, \pi) \times (0, T)$, $Au = u_{tt} - u_{xx}$, $\lambda_1(T)$ — первое отрицательное собственное значение задачи Дирихле для оператора $A$ в области $\Omega$, $G^*$ — двойственная по Юнгу к $G$ функция, то при существовании такого $a \in R(A)$, что $F^*(a) < 0$, краевая задача (3′) имеет по крайней мере два $T$-периодических решения $u$ и $v$ таких, что $F(u) \leqslant 0 < F(v)$; если $\lim\limits_{|u| \to 0} \varphi(u)/u = 0$, $\lim\limits_{|u| \to \infty} \varphi(u)/u = 0$, $\varphi(u) \not\equiv 0$, то при всех достаточно больших $T$ таких, что

$T/\pi$ — рациональное число, краевая задача (3) имеет по крайней мере два $T$-периодических решения $u$ и $v$ таких, что $F(u) \leqslant 0 < F(v)$ [3];

4) если $\varphi(u)$ — вещественная неубывающая функция, $\varphi(0) = 0$, $\lim\limits_{|u|\to\infty} \varphi(u)/u = \infty$ и существуют постоянные $\alpha > 0$ и $C$ такие, что

$$\frac{1}{2}\operatorname{tg} t - \int_0^t \varphi(s)\,ds \geqslant \alpha\,|\,\varphi(t)\,| - C,$$

то краевая задача (3′) имеет нетривиальное слабое решение $u \in L^\infty$, $2\pi$-периодическое по $t$ [4].

Исследуем существование классических периодических решений краевой задачи (1), (2) и (2), (3). Для этого в дальнейшем будем пользоваться обозначением $\Pi = \{(x, t) : 0 \leqslant x \leqslant \pi,\ t \in \mathbb{R}\}$. Выражение $(r, q) = 1$ обозначает, как и раньше [5, 6], что числа $r$ и $q$ взаимно простые.

Далее, определим периоды $T_k$, $k = 1, 2, 3$, и соответствующие им следующие пространства:

$$T_1 = 2\pi(2\rho - 1)/q,\ q \text{ — четное},\ (2\rho - 1, q) = 1,\quad A_1^0 = \{u : u(x, t) = \\ = u(x, t + T_1) = u(\pi - x, t) = -u(-x, t) = u(x + 2\pi, t)\};$$

$$T_2 = 2\pi(2\rho - 1)/q,\ q \text{ — нечетное},\ (2\rho - 1, q) = 1,\quad A_2^0 = \{u : u(x, t) = \\ = u(\pi - x, t + T_2/2) = -u(-x, t) = u(x + 2\pi, t)\};$$

$$T_3 = 2\pi r/q,\ r \text{ — четное},\ q \text{ — нечетное},\ (r, q) = 1,\quad A_3^0 = \{u : u(x, t) = \\ = -u(x, t + T_3/2) = -u(-x, t) = u(x + 2\pi, t)\},$$

причем для функций $u \in A_k^0$, $k = 1, 2, 3$, выполнены условия

$$\int_\tau^{\tau + T_k q/2} \{u(x + \theta - \tau, \tau) + u(x - \theta + \tau, \tau)\}\,d\theta = 0,\quad k = 1, 2, 3. \qquad (4)$$

Лемма 1. *Каждая функция $u(x, t)$, разлагающаяся в равномерно сходящийся ряд Фурье вида*

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^\infty u_k(t)\sin kx,$$

*удовлетворяет условию* (4).

Доказательство. На основании условий леммы 1 и обозначения для $T_k$, $k = 1, 2, 3$, имеем

$$\int_\tau^{\tau + T_k q/2} \{u(x + \theta - \tau, \tau) + u(x - \theta + \tau, \tau)\}\,d\theta = \int_\tau^{\tau + T_k q/2} \sum_{k=1}^\infty u_k(\tau) \times \\ \times \{\sin k(x + \theta - \tau) + \sin k(x - \theta + \tau)\}\,d\theta = \\ = \sum_{k=1}^\infty u_k(\tau)\left\{\frac{\cos k(x - \theta + \tau)}{k}\Bigg|_\tau^{\tau + T_k q/2} - \frac{\cos k(x + \theta - \tau)}{k}\Bigg|_\tau^{\tau + T_k q/2}\right\} = \\ = \sum_{k=1}^\infty u_k(\tau)\{\cos k(x - T_k q/2) - \cos k(x + T_k q/2)\} = 0,\quad k = 1, 2, 3.$$

Лемма 1 доказана.

Заметим, что многие математики, за исключением О. Вейводы и М. Штедры [1], проводили доказательство существования периодических решений описанной нелинейной задачи (3) с помощью метода Фурье. Нами будут рассмотрены вопросы существования классических периодических решений в указанных пространствах функций $A_k^0$ и в пространствах $A_k$ работы [1] и показана разновидность таких решений [6].

Введем ряд обозначений. Пространство функций, непрерывных и ограниченных на $\Pi$, будем обозначать через $C$. Символ $C^j$ будет обозначать пространство таких $u \in C$, что $D_t^k D_x^l u \in C$ для всех $k+l \leqslant j$. Обозначим через $G_x$ и $G_t$ пространства функций, непрерывных и ограниченных на $\Pi$ вместе с производными соответственно по $x$ и $t$.

Для $g \in C$ определим

$$(P_0 g)(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_\tau^t \{g(x+\theta-\tau, \tau) + g(x-\theta+\tau, \tau)\}\, d\theta, \tag{5}$$

$$(P_k g)(x, t) = (P_0 g)(x, t) - \frac{1}{4} \int_0^{c_k} d\tau \int_\tau^t \{g(x+\theta-\tau, \tau) + g(x-\theta+\tau, \tau)\} d\theta \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{4} \int_0^{c_k} Q(\tau)\, d\tau \int_\tau^t \sum_{i=0}^{1} g(x+(-1)^i(\theta-\tau), \tau)\, d\theta, \tag{6}$$

$$Q(\tau) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant \tau \leqslant t, \\ -1, & t < \tau \leqslant c_k, \quad c_k = T_k q/2, \quad k = 1, 2, 3. \end{cases} \tag{7}$$

В дальнейшем $L(X, Y)$ будет обозначать пространство линейных и ограниченных отображений $X$ в $Y$. Символами $Q_T^1$, $Q_T^2$ и $Q_\pi$ обозначим пространства функций $u$, удовлетворяющих на $\Pi$ соотношениям $u(x, t+T) = u(x, t)$, $u(x, t+T) = -u(x, t)$, $u(\pi - x, t) = u(x, t)$.

Лемма 2. *Пусть* $g \in G_x \cap A_k^0 \cap Q_\pi$ *и* $k = 1, 2, 3$. *Тогда* $u = P_k g$ *удовлетворяет* (1), (2). *Кроме того, для* $i = 1, 2$ $P_k \in L(C \cap Q_T^i \cap Q_\pi, C^1 \cap Q_T^i \cap Q_\pi)$, $P_k \in L(G_x \cap Q_T^i \cap Q_\pi, C^2 \cap Q_T^i \cap Q_\pi)$.

Доказательство. Нетрудно убедиться, что $u = P_k g$ удовлетворяет (1). На основании $g \in A_k^0$, т. е. в силу нечетности и $2\pi$-периодичности по $x$ функции $g$, функция $u$, определяемая уравнением $u = P_k g$, удовлетворяет краевым условиям $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$. Теперь на основании (6) имеем $P_k \in L(C \cap Q_\pi, C^1 \cap Q_\pi)$ и согласно (6) и условию (4) получаем

$$(P_k g)(x, t+T) = \frac{1}{4} \int_0^{t+T} d\tau \int_\tau^{t+T} \{g(x+\theta-\tau, \tau) + g(x-\theta+\tau, \tau)\}\, d\theta -$$

$$-\frac{1}{4} \int_{t+T}^{c_k} d\tau \int_\tau^{t+T} \{g(x+\theta-\tau, \tau) + g(x-\theta+\tau, \tau)\}\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{4} \int_{-T}^{t} dz \int_{z+T}^{t+T} \{g(x+\theta-z-T, z+T) + g(x-\theta+z+T, z+T)\}\, d\theta -$$

$$-\frac{1}{4} \int_t^{c_k - T} dz \int_{z+T}^{t+T} \{g(x+\theta-z-T, z+T) + g(x-\theta+z+T, z+T)\}\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{4} \int_{-T}^{t} dz \int_s^t \sum_{i=0}^{1} g(x+(-1)^i(v-z), z+T)\, dv - \frac{1}{4} \int_t^{c_k - T} dz \int_z^t \sum_{i=0}^{1} g(x+(-1)^i \times$$

$$\times (v-z), z+T)\, dv = \frac{1}{4} \int_{-T}^{0} dz \int_z^t \sum_{i=0}^{1} g(x+(-1)^i(v-z), z+T)\, dv +$$

$$+ \frac{1}{4} \int_0^t dz \int_z^t \sum_{i=0}^{1} g(x+(-1)^i(v-z), z+T)\, dv - \frac{1}{4} \int_t^{c_k} dz \int_z^t \sum_{i=0}^{1} g(x+(-1)^i \times$$

$$\times (v-z), z+T)\, dv + \frac{1}{4} \int_{-T}^{0} d\tau \int_\tau^t \sum_{i=0}^{1} g(x+(-1)^i(v-\tau-c_k), \tau+c_k+$$

$$+T)\, dv = I^1 + I^2 + I_k^3 + I_k^4. \tag{8}$$

Теперь, полагая в (8) $T = T_k$, $k = 1, 2, 3$, и учитывая, что $c_k = T_k q/2$, убеждаемся, что $I^1 = -I_k^4$, $I^2 + I_k^3 = (P_k g)(x, t)$, т. е. $P_k \in L(C \cap Q_T^1, C^1 \cap \cap Q_T^1)$, $k = 1, 2, 3$. Далее, при $T = T_k/2$ и $g \in G \cap A_3^0$ из (8) находим $P_k \in \in L(C \cap Q_T^2, C^1 \cap Q_T^2)$. Аналогично получаем второе утверждение леммы 2. Лемма 2 доказана.

На основании леммы 2 получаем следующее утверждение.

Теорема 1. *Для всякой $g \in G_x \cap A_k^0$ функция $u = P_k g$ является единственной функцией из пространства $C^2 \cap A_k^0$, удовлетворяющей* (1), (2) *для $T = T_k$, $k = 1, 2, 3$.*

Теорема 2. *Для всякой $g \in G_x \cap Q_\pi$ функция $u = P_0 g$ является функцией из пространства $C^2 \cap Q_\pi$, удовлетворяющей уравнению* (1) *и равным при $x = 0$ и $x = \pi$ значениям т. е. $u(0, t) = u(\pi, t)$.*

Доказательство основано на равенстве (5).

Предположим, что функция $f(x, t, u, u_t, u_x)$, правая часть уравнения (3), определена в области

$$\Omega = \{x \in [0, \pi],\ t \in \mathbb{R},\ u \in [-b, b],\ u_t \in [-c, c],\ u_x \in [-d, d]\}, \tag{9}$$

непрерывна по совокупности переменных $x, t, u, u_t, u_x$ и удовлетворяет условиям

$$|f(x, t, u, u_t, u_x)| \leqslant M, \quad f \in \mathrm{Lip}_{u,u_t u_x}(K; \Omega). \tag{10}$$

Определение. *Уравнение второго порядка* (3) *определим как $T$-периодическую систему первого класса в области* (9), *когда постоянные $b, c, d, M, K, T_k, q$ связаны неравенствами*

$$b \geqslant \frac{1}{4} M (T_k q)^2, \quad c \geqslant \frac{1}{2} M T_k q, \quad d \geqslant \frac{1}{2} M T_k q, \quad K T_k q (T_k q/2 + 2) < 1, \tag{11}$$

*для некоторых фиксированных действительных чисел $T_k$ и $q$.*

На основании метода последовательных приближений получаем следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть $k$ — одно из чисел $k = 1, 2, 3$. Предположим что функция*

$$F[u, u_t, u_x](x, t) = f(x, t, u(x, t), u_t(x, t), u_x(x, t)) \tag{12}$$

*для каждой функции $u \in G_x \cap A_k^0$ принадлежит пространству $G_x \cap A_k^0$, удовлетворяет условиям* (11) *и производные $\partial f/\partial u$, $\partial f/\partial u_t$ и $\partial f/\partial u_x$ удовлетворяют условию Липшица локально на $\Omega$.*

*Тогда для каждой функции $v \in G_x \cap A_k^0$ такой, что*

$$|v(x, t)| \leqslant \frac{1}{4} M (T_k q)^2, \quad |v_t(x, t)| \leqslant \frac{1}{2} M T_k q, \quad |v_x(x, t)| \leqslant \frac{1}{2} M T_k q, \tag{13}$$

*последовательность функций*

$$u^0(x, t) = v(x, t), \quad u_t^0(x, t) = v_t(x, t), \quad u_x^0(x, t) = v_x(x, t),$$

$$u^{m+1}(x, t) = \frac{1}{4} \int_{\tau}^{T_k q/2} Q(\tau)\, d\tau \int_{\tau}^{t} \sum_{i=0}^{1} F[u^m, u_t^m, u_x^m](x + (-1)^i (\theta - \tau), \tau)\, d\theta,$$

$$m = 0, 1, 2, \ldots$$

*сходится при $m \to \infty$ равномерно относительно $(x, t) \in [0, \pi] \times \mathbb{R}$ к функции $\tilde{u} \in C^2 \cap A_k^0$, удовлетворяющей* (2), (3).

Следует сказать, что в работе [1] для исследования классических периодических решений волнового уравнения (1) рассмотрены другие, отличные от $P_k$, операторы вида

$$(S_1 g)(x, t) = -\frac{1}{2} \int_0^{x} \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} g(\xi, \tau)\, d\tau d\xi, \quad (S_2 g)(x, t) = -\frac{1}{2} \int_x^{\pi} \int_{t+x-\xi}^{t-x+\xi} g(\xi, \tau) d\tau d\xi. \tag{14}$$

Заметим, что операторы (14) взяты из решения таких задач Коши [7]:

$$u^1_{tt} - u^1_{xx} = g(x, t), \quad u^1(0, t) = 0, \quad u^1_x(0, t) = h_1(t); \tag{15}$$

$$u^2_{tt} - u^2_{xx} = g(x, t), \quad u^2(0, t) = 0, \quad u^2_x(\pi, t) = h_2(t), \tag{16}$$

а именно, справедливо следующее утверждение: каждое решение задачи Коши (15) в классе гладких функций представимо в виде

$$u^1(x, t) = \frac{1}{2}\int\limits_{t-x}^{t+x} h_1(\alpha)\,d\alpha + (S_1g)(x, t) \equiv \int\limits_0^x \frac{h_1(t+\xi) + h_1(t-\xi)}{2}\,d\xi + $$
$$+ (S_1g)(x, t), \tag{17}$$

а каждое решение задачи Коши (16) — в виде

$$u^2(x, t) = \frac{1}{2}\int\limits_{t+\pi-x}^{t-\pi+x} h_2(\alpha)\,d\alpha + (S_2g)(x, t) \equiv$$

$$\equiv -\int\limits_x^\pi \frac{h_2(t+\pi-\xi) + h_2(t-\pi+\xi)}{2}\,d\xi + (S_2g)(x, t). \tag{18}$$

При исследовании классических периодических решений в работе [1] операторы (14) определены для указанных ранее периодов $T_k$, $k = 1, 2, 3$, на пространствах функций

$$T_1: \quad A_1 = \{u: \quad u(x, t) = u(x, t+T_1) = u(\pi - x, t)\};$$
$$T_2: \quad A_2 = \{u: \quad u(x, t) = u(\pi - x, t + T_2/2)\};$$
$$T_3: \quad A_3 = \{u: \quad u(x, t) = -u(x, t + T_3/2)\}.$$

Хотя в общем $A^0_k \subset A_k$, результаты, сформулированные ранее и в работе [1], различны. Это следует из того, что ранее установленные результаты верны в пространстве $G_x \cap A^0_k$, а результаты существования классических периодических решений в работе [1] установлены в пространстве $G_t \cap A_k$, причем следует сказать, что в пространстве $A_3$ решение не единственное. Данный результат подтверждает следующее утверждение.

Теорема 4. *Для всякой* $g \in G_t \cap A_3$ *две функции*

$$u_i(x, t) = \frac{1}{2}\int\limits_{t-x-\pi+2^{i-1}\pi}^{t+x+\pi-2^{i-1}\pi} h_i(\alpha)\,d\alpha + (S_ig)(x, t) = (R^i_3 g)(x, t), \quad i = 1, 2,$$

*где*

$$h_i(t) = -\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{k-1}\int\limits_0^\pi \{g(\xi, t + 2\pi j + 2^{2-i}\pi - \xi) - g(\xi, t + 2\pi j -$$
$$- \pi + 2^{i-1}\pi + \xi)\}\,d\xi,$$

*являются функциями из пространства* $C^2 \cap A_3$, *удовлетворяющими* (1), (2); $T_3 = 2\pi r/q$, $r = 2k$, $q = 2s - 1$.

Теорема 5. *Для всякой* $g \in G_t \cap A_k$, $k = 1, 2$, *функция* $u \equiv Sg = \frac{1}{2}(S_1g + S_2g)$ *удовлетворяет уравнению* (1) *и равным при* $x = 0$ *и* $x = \pi$ *значениям* $u(0, t) = u(\pi, t)$. *Кроме того, для* $i = 1, 2$

$$S \in L(C \cap Q^i_T \cap Q_\pi, C^1 \cap Q^i_T \cap Q_\pi), \quad S \in L(G_t \cap Q^i_T \cap Q_\pi, C^2 \cap Q^i_T \cap Q_\pi),$$

$$(Sg)_t(0, t) = (Sg)_t(\pi, t), \quad (Sg)_x(0, t) = -(Sg)_x(\pi, t).$$

Доказательство основано на выражении (14).

Так как $Sg \in Q_\pi$ удовлетворяет уравнению (1) и принимает при $x = 0$ и $x = \pi$ равные значения, то аннулировать действие оператора $S$ в точках

$x = 0$ и $x = \pi$ может лишь только функция $\varphi$ пространства $Q_\pi$, удовлетворяющая однородному уравнению $\varphi_{tt} - \varphi_{xx} = 0$ и имеющая свойства $\varphi(0, t) = \varphi(\pi, t)$, $\varphi_t(0, t) = \varphi_t(\pi, t)$, $\varphi_x(0, t) = -\varphi_x(\pi, t)$.

Легко проверить, что такой функцией будет функция

$$\varphi(x, t) = b(t + x) + b(t - x + \pi) \equiv 2b(t + x), \tag{19}$$

где $b \in C^2 \cap Q_\pi$.

Таким образом, периодические решения задачи (1), (2) будем искать в виде $u = \frac{1}{2}(S_1 g + S_2 g) + \varphi \equiv Sg + \varphi$. Функцию $\varphi \in Q_\pi$ выбираем так, чтобы $u(0, t) = 0$. Тогда на основании определения операторов $S_1$ и $S_2$ и условия $u(0, t) = 0$ получаем функцию [6]

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(S_1 g + S_2 g)(x, t) + \frac{1}{4}\int_0^\pi d\xi \int_{\omega-\xi}^{\omega+\xi} g(\xi, \tau)\, d\tau + \int_\omega^{t+x} h(\tau)\, d\tau +$$
$$+ \int_{\omega+\pi}^{t-x+\pi} h(\tau)\, d\tau \equiv (R_1 g)(x, t), \tag{20}$$

где

$$h(t) = \int_0^\pi \sum_{j=0}^{2p-2} (-1)^j \{g(\xi, t + j\pi + \xi) - g(\xi, t + j\pi - \xi)\}\, d\xi, \tag{21}$$

$\omega$ — произвольное число, которая для всякой $g \in G_t \cap A_1$ является единственной из пространства $G_t^2 \cap A_1$, удовлетворяющей (1), (2).

Далее, для всякой функции $g \in G_t \cap A_2$, $p = 1$, функция

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(S_1 g + S_2 g)(x, t) + \frac{\pi - x}{4\pi}\int_0^\pi d\xi \int_{t-\xi}^{t+\xi} g(\xi, \tau)\, d\tau +$$
$$+ \frac{x}{4\pi}\int_0^\pi d\xi \int_{t-\pi+\xi}^{t+\pi-\xi} g(\xi, \tau)\, d\tau \equiv (R_2 g)(x, t) \tag{22}$$

является единственной из пространства $C^2 \cap A_2$, удовлетворяющей (1), (2).

На основании изложенных выше результатов получаем следующее утверждение.

Теорема 6. *Для всякой* $g \in G_t \cap A_1$ *и* $g \in G_t \cap A_2$, $p = 1$, *функция* $u = R_k g$, $k = 1, 2$, *является единственной из пространства* $C^2 \cap A_k$, *удовлетворяющей* (1), (2).

Теорема 7. *Пусть $k$ — одно из чисел* 1, 2, 3. *Предположим, что для функции*

$$f(x, t, u(x, t), u_t(x, t), u_x(x, t)) \equiv g(x, t) + \varepsilon f_1(x, t, u(x, t), u_t(x, t), u_x(x, t)) \tag{23}$$

$g \in G_t \cap A_k$ *и для каждой функции* $u \in G_t \cap A_k$ *функция* $f_1 \in G_t \cap A_k$ *и производные* $\partial f_1/\partial u$, $\partial f_1/\partial u_t$, $\partial f_1/\partial u_x$ *удовлетворяют условию Липшица локально на* $\Omega = [0, \pi] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$.

*Тогда существует* $r > 0$ *и* $\varepsilon_0 > 0$ *такие, что для каждого* $\varepsilon$, $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ *в шаре пространства* $C^2 \cap A_k$, $k = 1, 2$, *с центром в* $R_k g$ *и радиусом* $r$ *существует единственная функция* $u$, *удовлетворяющая* (2), (3), *и в шаре пространства* $C^2 \cap A_3$ *с центром* $R_3^i g$, $i = 1, 2$, *и радиусом* $r$ *существуют две функции* $u_i$, $i = 1, 2$, *удовлетворяющие* (2), (3), *где* $f(x, t, u, u_t, u_x)$ *определена выражением* (23).

Для доказательства теоремы достаточно применить принцип сжатых отображений к уравнению $u = R_k(g + \varepsilon f_1)$ для $k = 1, 2$ и $u_i = R_3^i(g + \varepsilon f_1)$ для $k = 3$.

Заметим, что применение принципа Шаудера позволяет установить существование решения интегральных уравнений

$$u(x, t) = \frac{1}{4}\int_0^{T_k q/2} Q(\tau)\, d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} F[u, u_t, u_x](\eta, \tau)\, d\eta, \tag{24}$$

$$u(x, t) = (R_k F[u, u_t, u_x])(x, t) \tag{25}$$

и, следовательно, волнового дифференциального уравнения (3) при более слабых предположениях относительно функции $F[u, u_t, u_x](x, t) = f(x, t, u(x, t), u_t(x, t), u_x(x, t))$.

Например, справедливо следующее утверждение.

Теорема 8. *Пусть $k$ — одно из чисел 1, 2, 3 и*

1) *функция $f(x, t, u)$, правая часть уравнения $u_{tt} - u_{xx} = f(x, t, u)$, $(x, t) \in \mathbb{R}^2$, определена в области $\Omega = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2,\ u \in [-b, b]\}$, непрерывна по совокупности переменных $x, t, u$, $T_k$-периодическая по $t$, $2\pi$-периодическая по $x$, удовлетворяет условию $|f(x, t, u)| \leqslant M$ $(M = \mathrm{const})$ и при каждом $(x, t) \in \mathbb{R}^2$ непрерывна по $u$ равномерно относительно $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T_k q/2]$;*

2) *постоянные $b, M, T_k, q$ связаны неравенством $b > M(T_k q)^2/16$;*

3) *функция $F[u](x, t) = f(x, t, u(x, t))$ для каждой функции $u \in C \cap A_k^0$ принадлежит пространству $C \cap A_k^0$.*

*Тогда краевая задача*

$$u_{tt} - u_{xx} = f(x, t, u), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2, \tag{26}$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{27}$$

$$u(x, t + T) = u(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2 \tag{28}$$

*имеет по крайней мере одно непрерывное $T_k$-периодическое решение.*

Заметим, что на основании определенных операторов $R_k$ аналогичный результат для краевой задачи (26) — (28) можно получить и в пространстве $C \cap A_k$.


1. *Вейвода О., Штедры М.* Существование классических периодических решений волнового уравнения. Связь теоретико-числового характера периода и геометрических свойств решений // Дифференц. уравнения.— 1984.— **20**, № 10.— С. 1733—1739.
2. *Brezis Haïm, Coron Jean-Michel.* Periodic solutions of nonlinear ware equations and Hamiltoniar system // Amer. J. Math.— 1981.— **103**, N 3.— P. 559—570.
3. *Coron J. M.* Solutions periodiques non triviales d'une equation des ondes // Commun. Part. Different. Equat.— 1981.— **6**, N 7.— P. 829—848.
4. *Brezis Haïm, Coron Jean-Michel, Nirenberg Lonis.* Fre vibrations for a nonlinear ware equation and a theorem of P. Rabinowitz // Communs Pure and Appl. Math.—1980.— **33**, N 5.— P. 667—684.
5. *Митропольский Ю. А., Хома Г. П.* О периодических решениях волновых уравнений второго порядка: I // Укр. мат. журн.— 1986.— **38**, № 5.— С. 593—600.
6. *Хома Г. П.* Периодические решения волновых дифференциальных уравнений второго порядка.— Киев, 1986.— 44 с.— (Препринт/АН УССР, Ин-т математики; 86.05).
7. *Хома Г. П.* О структуре периодических решений волнового уравнения второго порядка.— Киев, 1985.— 32 с.— (Препринт / АН УССР, Ин-т математики; 85.53).


Ин-т математики АН УССР, Киев
Тернопол. пед. ин-т

Получено 12.02.86