УДК 517.929

Д. А. Взовокий

О некоторых применениях дифференциально-функциональных неравенств

1. Рассмотрим функциональное неравенство

$$u(t) \leqslant \sum_{i=1}^{m} \gamma_i(t)\, u[\theta_i(t)] + \delta(t), \tag{1}$$

где $\gamma_i(t)$, $\theta_i(t)$, $i = \overline{1, \ldots, m}$, $\delta(t)$ — действительные числовые функции, $t \in I_0 = [t_0, T)$, $t_0 \in R^1$, $t_0 < T \leqslant \infty$; $I = (t_0, T)$.

Лемма 1. *Пусть функция* $u : (-\infty, T) \to [0, \infty)$ *полунепрерывна сверху на* I_0, $\sup\limits_{s \leqslant t_0} u(s) < \infty$, *и при* $t \in I_0$ *выполняется неравенство* (1), *где* $\gamma_i(t) \geqslant 0$, $\theta_i(t) \leqslant t$, $i = \overline{1, \ldots, m}$, $\sum\limits_{i=1}^{m} \gamma_i(t) = \sigma(t) < 1$. *Тогда при* $t \in I_0$

$$u(t) \leqslant \alpha(t) = \max\{\sup_{s \leqslant t_0} u(s),\ \sup_{s \leqslant t} [\delta(s)/(1 - \sigma(s))]\}. \tag{2}$$

Доказательство. Рассмотрим множество $R^+ = \bigcap\limits_{i=1}^{m} R_i^+$, где $R_i^+ = \{t : u[\theta_i(t)] \leqslant u(t),\ t \in I_0\}$. Предположим, что существует число $t_1 \in I$ такое, что $u(t_1) > \alpha(t_1)$. В силу полунепрерывности сверху функции $u(t)$ на отрезке $[t_0, t_1]$ существует точка $\tau \in [t_0, t_1]$ такая, что $\sup\limits_{t_0 \leqslant s \leqslant t_1} u(s) = u(\tau)$ (см. [1]). Возможен один из следующих случаев.

I. $\tau \in R^+$. Тогда из неравенства (1) следует неравенство $u(\tau) \leqslant \alpha(\tau)$. Заметим, что $\alpha(\tau) \leqslant \alpha(t_1)$. Следовательно, $u(t_1) \leqslant \alpha(t_1)$ вопреки предположению.

II. $\tau \in R^- = I_0 \setminus R^+$. Тогда для некоторого k, $1 \leqslant k \leqslant m$, выполнено неравенство $u[\theta_k(\tau)] > u(\tau)$; следовательно, $\theta_k(\tau) < t_0$. В данном случае $u(t_1) \leqslant \sup\limits_{s \leqslant t_0} u(s)$. Последнее неравенство противоречит исходному предположению. Таким образом, лемма доказана.

Рассмотрим систему дифференциально-функциональных неравенств

$$u(t) \leqslant \sum_{i=1}^{m} \gamma_i(t)\, u[\theta_i(t)] + \nu(t) \sup_{s \leqslant t} v(s), \tag{3}$$

$$v'(t) \geqslant \lambda(t)\, v(t) - b_0(t) \sup_{s \leqslant t} v(s) - b_1(t) \sup_{s \leqslant t} u(s) \tag{4}$$

(все функции — числовые). Обозначим $I_0^+ = [a, T)$, $t_0 \leqslant a < T$,

$$p(t) = \max\{1, \sup_{s \leqslant t} [\nu(s)/(1 - \sigma(s))]\}, \quad z(t) = 1/p(t). \tag{5}$$

Лемма 2. *Пусть функция* $u:(-\infty, T)\to[0,\infty)$ *полунепрерывна сверху на* I_0, *функция* $v:(-\infty, T]\to R^1$ *локально абсолютно непрерывна на* I_0, $\sup\limits_{s\leqslant t_0} u(s)<\infty$, $\sup\limits_{s\leqslant t_0} v(s)<\infty$, *и почти всюду при* $t\in I_0$ *имеет место система неравенств* (3), (4), *где функции* $\gamma_i(t)$, $\theta_i(t)$, $i=\overline{1,\ldots,m}$, *удовлетворяют условиям леммы* 1, $\nu(t)$, $b_k(t)$, $k=0,1,$ — *неотрицательные на* I_0 *функции. Если* $\lambda(t)$ — *локально суммируемая функция*, $\lambda(t)\geqslant b_0(t)+p(t)b_1(t)$ *при* $t\in I_0^+$, *а также*

$$\sup_{s\leqslant a} v(s)=v(a)\geqslant z(a)\sup_{s\leqslant t_0} u(s), \tag{6}$$

то $v'(t)\geqslant 0$ *почти всюду на* I_0^+.

Доказательство. В силу неравенства (3) и леммы 1 $(\forall t\geqslant t_0)$

$$u(t)\leqslant\max\{\sup_{s\leqslant t_0} u(s),\ \sup_{s\leqslant t}[\nu(s)/(1-\sigma(s))]\sup_{s\leqslant t} v(s)\}.$$

Учитывая (6), из неравенства (4) получаем неравенство

$$v'(t)\geqslant\lambda(t)v(t)-[b_0(t)+p(t)b_1(t)]\sup_{s\leqslant t} v(s) \tag{7}$$

почти всюду на I_0^+. На основании теоремы 16 ([2], гл. 2) при условиях леммы из неравенства (7) заключаем, что $v'(t)\geqslant 0$ почти всюду на I_0^+.

2. Рассмотрим систему функциональных и дифференциально-функциональных уравнений

$$x(t)=\sum_{i=1}^{m}\{P_i(t)x(t-\tau_{1i}(t))+Q_i(t)y(t-\tau_{2i}(t))\}+R(t)y(t), \tag{8}$$

$$y'(t)=\sum_{i=1}^{m}\{A_i(t)x(t-\tau_{3i}(t))+B_i(t)y(t-\tau_{4i}(t))\}+C(t)y(t), \tag{9}$$

$x(t)\in R^n$, $y(t)\in R^n$, с непрерывными на I_0 $(n\times n)$-матрицами $P_i(t)$, $Q_i(t)$, $R(t)$, $A_i(t)$, $B_i(t)$, $C(t)$, $i=\overline{1,\ldots,m}$, причем

$$\sigma(t)=\sum_{i=1}^{m}\|P_i(t)\|<1,\quad\forall t\in I_0, \tag{10}$$

(здесь используется евклидова норма матриц); $\tau_{kp}(t)\in C^0(I_0,[0,\infty))$, $k=\overline{1,\ldots,4}$, $p=\overline{1,\ldots,m}$. Обозначим через $\lambda(t)$, $\mu(t)$ наименьшие характеристические корни симметрических матриц соответственно $\frac{1}{2}[C(t)+C^{\text{т}}(t)]$ и $R^{\text{т}}(t)R(t)$; $\nu(t)=\|R(t)\|+\sum\limits_{i=1}^{m}\|Q_i(t)\|$, $H(t)=E-\sum\limits_{i=1}^{m}P_i(t)$, $S(t)=R(t)+\sum\limits_{i=1}^{m}Q_i(t)$; $E_{kp}=\{t-\tau_{kp}(t):t-\tau_{kp}(t)\leqslant t_0,\ t\in I_0\}\cup\{t_0\}$, $E_1=\left(\bigcup\limits_{i=1}^{m}E_{1i}\right)\cup\left(\bigcup\limits_{i=1}^{m}E_{3i}\right)$, $E_2=\left(\bigcup\limits_{i=1}^{m}E_{2i}\right)\cup\left(\bigcup\limits_{i=1}^{m}E_{4i}\right)$.

Решением системы (8), (9) будем называть пару функций $x(t)\in C^0(I,R^n)$, $y(t)\in C^1(I,R^n)$, если значения $x(t)$, $y(t)$, $y'(t)$ удовлетворяют данной системе при $t\in I$ и при начальных условиях $x(s)=\varphi(s)$ $(\forall s\in E_1)$, $y(s)=\psi(s)$ $(\forall s\in E_2)$, где $\varphi(t)\in C^0(E_1,R^n)$, $\psi(t)\in C^0(E_2,R^n)$ — заданные функции, удовлетворяющие *условию согласования* $\varphi(t_0)=\sum\limits_{i=1}^{m}\{P_i(t_0)\times\varphi(t_0-\tau_{1i}(t_0))+Q_i(t_0)\psi(t_0-\tau_{2i}(t_0))\}+R(t_0)\psi(t_0)$. Указанное решение обозначается также $x(t;\varphi)$, $y(t;\psi)$.

Замечание 1. В силу условия согласования и условия (10) нетрудно показать, что при указанных начальных условиях существует решение системы (8), (9).

В работе [3] введено понятие точечной полноты системы дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.

Будем называть систему (8), (9) *точечно полной по компоненте* x, если для любых $a \in I$, $X \in R^n$ существует решение системы $x(t; \varphi)$, $y(t; \psi)$ такое что $x(a; \varphi) = X$.

Аналогичным образом вводится понятие *точечной полноты системы по компоненте* y.

Теорема 1. *Если* $(\forall t \in I_0)$

$$\lambda(t) \geqslant \sum_{i=1}^{m} \{\| B_i(t) \| + p(t) \| A_i(t) \|\}, \tag{11}$$

$\det S(t_0) \neq 0$, *и наименьший характеристический корень* ω_0 *матрицы* $\Omega(t_0) = [S^{-1}(t_0) H(t_0)]^{\mathrm{T}} S^{-1}(t_0) H(t_0)$ *удовлетворяет условию* $\omega_0 \geqslant z^2(t_0)$, *то система* (8), (9) *является точечно полной по компоненте* y.

Доказательство. Пусть $\alpha \in R^n$, $\|\alpha\| > 0$, $\beta = S^{-1}(t_0) H(t_0) \alpha$ и $x(t; \alpha)$, $y(t; \beta)$ — решение системы (8), (9); заметим, что начальные функции $\varphi(t) \equiv \alpha$, $\psi(t) \equiv \beta$ удовлетворяют условию согласования. Положим $u(t) = \| x(t; \alpha) \|$, $v(t) = \| y(t; \beta) \|$ $\forall t \in I$, а также $u(t) = \|\alpha\|$, $v(t) = \|\beta\|$ $\forall t \leqslant t_0$. В силу свойства матрицы $\Omega(t_0)$ выполнено неравенство $v(t_0) > 0$. Следовательно, существует число $t_1 \in I$ такое, что при $t \in [t_0, t_1)$ выполняется неравенство $v(t) > 0$. Тогда в силу системы (8), (9) при $t \in (t_0, t_1)$ приходим к системе неравенств (3), (4), где кроме указанных обозначений $\theta_i(t) = t - \tau_{1i}(t)$, $i = \overline{1, \ldots, m}$, $b_0(t) = \sum_{i=1}^{m} \| B_i(t) \|$, $b_1(t) = \sum_{i=1}^{m} \| A_i(t) \|$. Применяя лемму 2, получаем $v'(t) \geqslant 0$ при $t \in (t_0, t_1)$. Отсюда следует, что $v(t) > 0$, $v'(t) \geqslant 0$ при $t \in I$.

Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — базис пространства R^n, $\beta_i = S^{-1}(t_0) H(t_0) \alpha_i$, $i = \overline{1, \ldots, m}$. Рассмотрим решения $x(t; \alpha_i)$, $y(t; \beta_i)$, $i = \overline{1, \ldots, m}$, системы (8), (9). Покажем, что при любом $t \in I$ система векторов $y(t; \beta_i)$, $i = \overline{1, \ldots, m}$, образует базис в R^n. В самом деле, пусть $c_1, \ldots, c_n$ — произвольная система n действительных чисел, таких, что $\sum_{i=1}^{n} c_i^2 \neq 0$. Тогда $x(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i x(t; \alpha_i)$, $y(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i y(t; \beta_i)$ — решение системы (8), (9) с начальными функциями $\alpha = \sum_{i=1}^{n} c_i \alpha_i$, $\beta = \sum_{i=1}^{n} c_i \beta_i$. Заметим, что $\|\alpha\| > 0$. На основании доказанного выше для данного решения $x(t)$, $y(t)$ выполнено неравенство $v(t) > 0$ $\forall t \in I$. Отсюда следует утверждение о системе векторов $y(t; \beta_i)$, $i = \overline{1, \ldots, m}$. Таким образом, доказана теорема 1.

Теорема 2. *Если выполнены все условия теоремы* 1, *а также*

$$\sqrt{\mu(t)} > \sum_{i=1}^{m} \| Q_i(t) \| + p(t) \sigma(t), \quad \forall t \in I_0, \tag{12}$$

то система (8), (9) *является точечно полной по компоненте* x.

Доказательство. Заметим предварительно, что $\mu(t) \geqslant 0$ при любой действительной $(n \times n)$-матрице $R(t)$ (см. [4]). Сохраняя прежние обозначения, покажем, что для решения $x(t; \alpha)$, $y(t, \beta)$ (см. доказательство теоремы 1) выполнено неравенство $u(t) > 0$ при $t \in I$. Используя лемму 1 и начальные условия, из неравенства (3) получаем неравенство $u(t) \leqslant p(t) v(t)$ (при условиях теоремы 1 $\sup_{s \leqslant t} v(s) = v(t)$). С другой стороны, $\| R(t) y(t) \| \geqslant \sqrt{\mu(t)}\, v(t)$ и, следовательно, ввиду (8)

$$u(t) \geqslant \left\{ \sqrt{\mu(t)} - \sum_{i=1}^{m} \| Q_i(t) \| - p(t) \sigma(t) \right\} v(t). \tag{13}$$

В силу (12) и неравенства $v(t) > 0 \quad \forall t \in I$ получаем неравенство $u(t) > 0$ $\forall t \in I$.

Заканчивается доказательство теоремы 2 так же, как доказательство теоремы 1.

3. Применим метод дифференциально-функциональных неравенств для получения оценок решений системы (8), (9). Кроме того, положим $h(t) = \sqrt{\mu(t)} - \sum_{i=1}^{m} \| Q_i(t) \| - p(t)\sigma(t)$, $r(t) = \lambda(t) - \sum_{i=1}^{m} \{ \| B_i(t) \| + p(t) \| A_i(t) \| \}$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (11), (12), *а также* $\sup_{s \in E_2} \| \psi(s) \| = \| \psi(t_0) \|$, $\| \psi(t_0) \| \geqslant z(t_0) \sup_{s \in E_1} \| \varphi(s) \|$. *Тогда решение* $x(t; \varphi)$, $y(t; \psi)$ *системы* (8), (9) *удовлетворяет неравенствам* $(\forall t \in I_0)$ $\| x(t; \varphi) \| \geqslant h(t) \| y(t; \psi) \|$, $\| y(t; \psi) \| \geqslant \| \psi(t_0) \| \exp \int_{t_0}^{t} r(s)\, ds$.

Доказательство. Положим $u(t) \equiv \| x(t; \varphi) \|$, $v(t) \equiv \| y(t; \psi) \|$. Так же, как и при доказательстве теоремы 1, получаем систему неравенств (3), (4) $\forall t \in I$. На основании леммы 2 получаем, что $v'(t) \geqslant 0$ почти всюду при $t \in I$. Следовательно, $v'(t) \geqslant r(t) v(t)$ почти всюду на I. Выполняется также неравенство (13) (см. доказательство теоремы 2). Таким образом, получаем утверждение теоремы.

Замечание 2. Существование решений указанного типа гарантируют, например, условия теоремы 2.

Рассмотрим множество $\tilde{L}$ всех решений системы (8), (9) с ограниченными начальными функциями $\sup_{s \in E_1} \| \varphi(s) \| < \infty$, $\sup_{s \in E_2} \| \psi(s) \| < \infty$. Заметим, что при условии (12) $\nu(t) > 0 \quad \forall t \in I_0$; при этом обозначим $M_0 = \max \{ \sup_{s \in E_2} \| \psi(s) \|, \sup_{s \in E_1} \| \varphi(s) \| [1 - \sigma(t_0)] / \nu(t_0) \}$.

Теорема 4. *Пусть* $(\forall t \in I_0)$ *выполнены условия* (11), (12). *Тогда для каждого решения* $(x(t), y(t)) \in \tilde{L}$ *системы* (8), (9) *либо*

$$\| x(t) \| \leqslant M_0 \sup_{s \leqslant t} [\nu(s)/(1 - \sigma(s))], \quad \| y(t) \| \leqslant M_0, \tag{14}$$

либо существует число $a \in I_0$ *такое, что* $(\forall t \geqslant a)$

$$\| x(t) \| \geqslant h(t) \| y(t) \|, \quad \| y(t) \| \geqslant M_0 \exp \int_{a}^{t} r(s)\, ds. \tag{15}$$

Доказательство. В силу (8) и леммы 1 при $t \geqslant t_0$

$$\| x(t) \| \leqslant \max \{ \sup_{s \in E_1} \| \varphi(s) \|, \sup_{s \leqslant t} [\nu(s)/(1 - \sigma(s))] \sup_{s \leqslant t} \| y(s) \| \}. \tag{16}$$

Рассмотрим множество $\Omega^+ = \{ t : \| y(t) \| \geqslant M_0, \ t \in I_0 \}$. Если $\Omega^+ = \varnothing$, то учитывая неравенство (16), имеем оценки (14).

Пусть $\Omega^+ \neq \varnothing$, $a = \inf \Omega^+$. Тогда $\sup_{s \leqslant a} \| y(s) \| = \| y(a) \| = M_0$. Ввиду (16) и выбора числа M_0 выполняется неравенство $\| y(a) \| \sup_{s \leqslant a} [\nu(s)/(1 - \sigma(s))] \geqslant \sup_{s \leqslant a} \| x(s) \|$. Используя лемму 2, аналогично доказательству теоремы 3 получим оценки (15). Теорема доказана.

1. *Грауэрт Г., Либ И., Фишер В.* Дифференциальное и интегральное исчисление.— М.: Мир, 1971.— 680 с.
2. *Мышкис А. Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом.— М. : Наука, 1972.— 351 с.
3. *Weiss L.* On the controllability of delay-differential systems // SIAM J. Contr.— 1967.— 5.— P. 575—587.
4. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости.— М. : Наука, 1967.— 472 с.

Моск. автомоб.-дор. ин-т

Получено 29.03.85