УДК 517.946+531.19

Н. Н. Боголюбов (мл.), А. К. Прикарпатский, В. Гр. Самойленко

Функциональное уравнение Н. Н. Боголюбова и ассоциированная с ним симплектическая структура Ли—Пуассона—Власова

1. Рассмотрим систему многих одноатомных бозе-частиц с квантовомеханическим гамильтонианом H, который в представлении вторичного квантования [1] имеет вид

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\int\limits_{\Lambda} d^3x\psi^+(x)\,\nabla_x^2\,\psi(x) + \frac{1}{2}\int\limits_{\Lambda} d^3x\int\limits_{\Lambda} d^3yV(x-y)\,\psi^+(x)\,\psi^+(y)\,\psi(y)\,\psi(x) \tag{1}$$

где $\hbar$ — постоянная Планка, $m\in\mathbb{R}^1_+$ — масса одной частицы, $V(x-y)$, $x, y\in\in\Lambda$, — двухчастичный потенциал взаимодействия в объеме $\Lambda\nearrow\mathbb{R}^3$, $\psi^+(x)$ и $\psi(x)$ — соответственно операторы рождения и уничтожения одночастичных состояний в гильбертовом пространстве Фока. Используя квантованный оператор Вигнера [1]

$$W(x,p) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{\mathbb{R}^3} d^3\alpha\exp(i\alpha p)\,\psi^+\left(x+\frac{\hbar\alpha}{2}\right)\psi\left(x-\frac{\hbar\alpha}{2}\right), \tag{2}$$

где $i = \sqrt{-1}$, $(x, p) \in \Lambda \times \mathbb{R}^3$, легко убедиться, что оператор (1) можно записать в квазиклассическом виде

$$H = \int_\Lambda d^3x \int_{\mathbb{R}^3} d^3p p^2 W(x, p)/2m + \frac{1}{2} \int_\Lambda d^3x \int_\Lambda d^3y V(x-y) \times$$

$$\times \int_{\mathbb{R}^3} d^3p \int_{\mathbb{R}^3} d^3\xi : W(x, p) W(y, \xi) :, \tag{3}$$

где символ : : означает обычное нормальное виковское упорядочение [2] операторов рождения и уничтожения. С целью изучения неравновесных функций распределения рассматриваемой системы в классическом случае во всех дальнейших вычислениях переходим к правильному пределу при $\hbar \to 0$ (в слабом смысле) всех операторных выражений.

Рассмотрим производящий функционал Н. Н. Боголюбова [3] функций распределения $F_n(x_1, \ldots, x_n; p_1, \ldots, p_n)$, $x_j \in \Lambda \nearrow \mathbb{R}^3$, $p_j \in \mathbb{R}^3$, $j = \overline{1, n}$, $n \in N$, в виде [4]

$$\mathcal{L}(f) = \operatorname{tr}(\mathcal{P} \exp[i(W, f)]), \quad \operatorname{tr} \mathcal{P} = 1. \tag{4}$$

Здесь $(W, f) = \int_\Lambda d^3x \int_{\mathbb{R}^3} d^3p f(x, p) W(x, p)$, функция f принадлежит пространству действительных гладких функций, быстроубывающих по обоим аргументам, $\mathcal{P}$ — статистический оператор [1, 4], причем $F_n(x_1, \ldots, x_n; p_1, \ldots, p_n) = \operatorname{tr}(\mathcal{P} : W(x_1, p_1) \ldots W(x_n, p_n):)|_{\hbar \to 0} = : \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta f(x_1, p_1)} \ldots \frac{1}{i} \times \frac{\delta}{\delta f(x_n, p_n)} : \mathcal{L}(f) \Big|_{f=0}$, поскольку $\hbar \to 0$ и $[W(x, p), W(y, \xi)]^{\hbar \to 0} \simeq 0$, где скобка $[\cdot, \cdot]$ — обычный операторный коммутатор в гильбертовом пространстве Фока.

2. Если $t \in \mathbb{R}^1$ — эволюционный параметр, то статистический оператор $\mathcal{P}$ удовлетворяет уравнению Лиувилля [1] $\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P} = \frac{i}{\hbar} [\mathcal{P}, H]$, $\mathcal{P}|_{t=0} = \mathcal{P}_0$. Производящий функционал $\mathcal{L}(f)$ также зависит от параметра t и удовлетворяет следующему уравнению:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{L}(f) = \operatorname{tr}\left(\mathcal{P} \frac{i}{\hbar} [H, \exp[i(W, f)]]\right)\Big|_{\hbar \to 0}.$$

Используя полученные в [4] коммутационные соотношения для вигнеровских операторов $W(x, p)$, $(x, p) \in \Lambda \times \mathbb{R}^3$, находим

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{L}(f) = \int_{\Lambda \times \mathbb{R}^3} d^3q \left\{ T(p), \frac{1}{i} \frac{\delta \mathcal{L}(f)}{\delta f(x, p)} \right\}_0^{(1)} +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{\Lambda \times \mathbb{R}^3} d^3q \int_{\Lambda \times \mathbb{R}^3} d^3q' \left\{ V(x-y), : \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta f(x, p)} \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta f(y, \xi)} : \mathcal{L}(f) \right\}_0^{(2)}, \tag{5}$$

где $q = (x, p)$, $q' = (y, \xi)$, $d^3q = d^3x d^3p$, $d^3q' = d^3y d^3\xi$, $T(p) = p^2/2m$, $\{\ldots\}_0^{(n)}$ — обычная каноническая скобка Пуассона на симплектическом пространстве $(\Lambda \times \mathbb{R}^3)^n$, $n \in N$ [1].

3. Уравнение (5) имеет явно не гамильтонову форму. Для погружения функционального уравнения (5) в гамильтонов формализм рассмотрим предварительно некоторые ассоциированные с данной задачей алгебраические объекты и их свойства. Пусть A_n, $n \in N$, — подпространство линейных симметричных операторов, действующих в n-частичном гильбертовом пространстве Фока и имеющих в терминах квантованных операторов Вигнера (2) следующее представление : $\mathcal{K}_n \in A_n$,

$$\mathcal{K}_n = \int_{\Lambda \times \mathbb{R}^3} d^3q_1 \ldots \int_{\Lambda \times \mathbb{R}^3} d^3q_n K_n(q_1, \ldots, q_n) : W(q_1) \ldots W(q_n):, \tag{6}$$

где $q_j = (x_j, p_j) \in \Lambda \times \mathbb{R}^3$, $j = \overline{1, n}$, $K_n(\ldots)$ принадлежит пространству симметричных действительнозначных функций на $(\Lambda \times \mathbb{R}^3)^n$. Легко убедиться, что для любых $j, k \in N$ имеет место вложение

$$[A_j, A_k] = \sum_{s=1}^{j+k-1} [A_j, A_k]^{(s)} \subset \sum_{s=1}^{j+k-1} A_s, \tag{7}$$

где $[\cdot, \cdot]$ — обычный операторный коммутатор в гильбертовом пространстве Фока, а $[\cdot, \cdot]^{(s)}$, $s \in N$, — коммутатор, действующий по формуле $\mathcal{K}_j \in A_j$, $\mathcal{K}_n \in A_n$,

$$A_s \ni [\mathcal{K}_j, \mathcal{K}_n]^{(s)} = \int\limits_{\Lambda \times \mathbb{R}^3} d^3 q_1 \ldots \int\limits_{\Lambda \times \mathbb{R}^3} d^3 q_{n+j-s} : W(q_1) \ldots W(q_{j+n-s}) \times$$

$$\times \left\{ \frac{\delta^s \mathcal{K}_j}{\delta W(q_1) \ldots \delta W(q_{j+n-s})}, \frac{\delta \mathcal{K}_n}{\delta W(q_1) \ldots \delta W(q_{j+n-s})} \right\}_0^{(j+n-s)}. \tag{8}$$

Таким образом, на «иерархической» алгебре Ли операторов $A = \sum_{j \in N} A_j$ имеется фильтрация (7), позволяющая [5] стандартным образом ввести на прямой сумме

$$\mathfrak{A} = \bigoplus_{n \in N} A_n \tag{9}$$

структуру новой алгебры Ли:

$$\{\mathfrak{A}, \mathfrak{A}\} = \bigoplus_{n \in N} \Big(\sum_{j, k \in N} [A_j, A_k]^{(n)} \Big). \tag{10}$$

Скобка (10) называется скобкой Пуассона—Власова [1, 6] и имеет важное значение в исследовании кинетических уравнений.

4. Рассмотрим отображение $\alpha : \mathfrak{A} \to A$, действующее согласно правилу

$$\alpha(\mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_n, \ldots) = \sum_{j \in N} \mathcal{K}_j \in A, \quad (\mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_n, \ldots) \in \mathfrak{A}. \tag{11}$$

Вводя отображение $\alpha^* : A^* \to \mathfrak{A}^*$, где $\mathfrak{A}^* = \bigoplus_{n \in N} A_n^*$, в силу (9) и (11) находим, что для любого $F \in A_r^*$ выполняется равенство $\alpha^* F = (F_1, \ldots, F_n, \ldots) \in \mathfrak{A}^*$, где $F_n = \operatorname{tr}(\mathcal{P} : W(q_1) \ldots W(q_n) :)$, $n \in N$, причем функционал $F \in A^*$ действует по определению следующим образом:

$$F \cdot \mathcal{K} = \operatorname{tr}(\mathcal{P}\mathcal{K}) \quad \forall \mathcal{K} \in A, \tag{12}$$

а элемент $(F_1, \ldots, F_n, \ldots) \in \mathfrak{A}^*$ действует на элемент $(\mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_n, \ldots) \in \mathfrak{A}$ в силу (6) согласно формуле

$$(F_1, \ldots, F_n, \ldots)(\mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_n, \ldots) =$$

$$= \sum_{n \in N} \int\limits_{\Lambda \times \mathbb{R}^3} d^3 q_1 \ldots \int\limits_{\Lambda \times \mathbb{R}^3} d^3 q_n F_n(q_1, \ldots, q_n) K_n(q_1, \ldots, q_n), \tag{13}$$

при условии, что ряд в (13) сходится. Легко проверить, что отображение $\alpha^* : A^* \to \mathfrak{A}^*$ является отображением момента [7, 8], так как $\alpha : \mathfrak{A} \to A$ — гомоморфизм алгебр Ли. Прямыми вычислениями убеждаемся, что отображение момента α^* является пуассоновским, т. е. сохраняет скобки Пуассона над A^* и $\mathfrak{A}^*$:

$$\alpha^*([D(F), B(F)]_*) = \{\mathcal{D}(F), \mathcal{B}(F)\}_*. \tag{14}$$

Здесь $D(F) = F \cdot C \in A^*$, $B(F) = F \cdot B \in A^*$, $\mathcal{D}(F) = \alpha^* D(F) \in \mathfrak{A}^*$, $\mathcal{B}(F) = \alpha^* B(F) \in \mathfrak{A}^*$, $B, C \in A$, причем скобки Пуассона в (14) даются выражениями

$$\begin{gathered} [D(F), B(F)]_* = \operatorname{tr}(\mathcal{P}[D, B]), \\ \{\mathcal{D}(F), \mathcal{B}(F)\}_* = \operatorname{tr}(\mathcal{P}\{\mathcal{D}, \mathcal{B}\}) = (\alpha^* F) \cdot \{\{\mathcal{D}(F), \mathcal{B}(F)\}\}, \end{gathered} \tag{15}$$

где $\{\{\cdot\,,\cdot\}\}$ определяется формулой

$$\{\{\mathscr{D}(F),\,\mathscr{B}(F)\}\}=\left(\left\{\frac{\delta\mathscr{D}(F)}{\delta F_1}\,,\,\frac{\delta\mathscr{B}(F)}{\delta F_1}\right\}_0^{(1)},\;2\left\{\frac{\delta\mathscr{D}(F)}{\delta F_1}\,,\,\frac{\delta\mathscr{B}(F)}{\delta F_2}\right\}_0^{(1)}+\right.$$

$$\left.+\,2\left\{\frac{\delta\mathscr{D}(F)}{\delta F_2}\,,\,\frac{\delta\mathscr{B}(F)}{\delta F_1}\right\}_0^{(1)}+\left\{\frac{\delta\mathscr{D}(F)}{\delta F_2}\,,\,\frac{\delta\mathscr{B}(F)}{\delta F_2}\right\}^{(2)},\,\ldots\right).$$

Скобка $\{.\,,\,.\}_*$ называется скобкой Ли — Пуассона [10] на коприсоединенных орбитах алгебры Ли $\mathfrak{A}$ и является основным объектом изучения при исследовании гамильтоновых динамических систем, ассоциированных с уравнениями типа Эйлера на алгебрах Ли [9—11].

5. Рассмотрим теперь функциональное уравнение Н. Н. Боголюбова (5). Легко заметить, что это уравнение допускает следующую запись:

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\mathscr{L}(f)=\operatorname{tr}\left(\mathscr{P}\,\frac{i}{\hbar}\,[H,\,\exp\,[i\,(W,\,f)]]\right)=$$

$$=\operatorname{tr}\left(\mathscr{P}\int\limits_{\Lambda\times\mathbb{R}^3}d^3q:W(q)\left\{\frac{\delta H}{\delta W(q)}\,,\,\frac{\delta\exp\,[(W,\,\exp\,(if)-1)]}{\delta W(q)}\right\}_0^{(1)}\right)+$$

$$+\operatorname{tr}\left(\mathscr{P}\int\limits_{\Lambda\times\mathbb{R}^3}d^3q\int\limits_{\Lambda\times\mathbb{R}^3}d^3q':W(q)\,W(q')\left\{\frac{\delta^2H}{\delta W(q)\,\delta W(q')}\,,\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{\delta^2\exp\,[(W,\,\exp\,(if)-1)]}{\delta W(q)\,\delta W(q')}\right\}_0^{(2)}:\right)=\int\limits_{\Lambda\times\mathbb{R}^3}d^3q\left\{T(p),\,\frac{1}{i}\,\frac{\delta\mathscr{L}(f)}{\delta f(q)}\right\}_0^{(1)}+$$

$$+\,\frac{1}{2}\int\limits_{\Lambda\times\mathbb{R}^3}d^3q'\int\limits_{\Lambda\times\mathbb{R}^3}d^3q'\left\{V(x-y),:\frac{1}{i}\,\frac{\delta}{\delta f(q)}\,\frac{1}{i}\,\frac{\delta}{\delta f(q')}:\mathscr{L}(f)\right\}_0^{(2)}. \qquad (16)$$

Учитывая свойства отображения момента, из (6) и (16) получаем

$$\partial\mathscr{L}(f)/\partial t=\{\mathscr{L}(f),\,\mathscr{H}(F)\}_*, \qquad (17)$$

где в силу (4) и (12) справедливы формулы

$$\mathscr{H}(F)=\int\limits_{\Lambda\times\mathbb{R}^3}d^3qF_1(q)\,p^2/2m+\frac{1}{2}\int\limits_{\Lambda\times\mathbb{R}^3}d^3q\int\limits_{\Lambda\times\mathbb{R}^3}d^3q'V(x-y)\,F_2(q,\,q'), \qquad (18)$$

$$\mathscr{L}(f)=\sum_{n\in N}(n!)^{-1}\int\limits_{\Lambda\times\mathbb{R}^3}d^3q_1\ldots\int\limits_{\Lambda\times\mathbb{R}^3}d^3q_nF_n(q_1,\,\ldots,\,q_n)\prod_{j=1}^{n}\{\exp\,[if(q_j)]-1\}.$$

Прямыми вычислениями согласно формулам (15), (17) и (18) убеждаемся, что гамильтоново уравнение (17) полностью эквивалентно уравнению Н. Н. Боголюбова (5).

6. В связи с результатами данной работы возникает интересная проблема классификации функциональных уравнений Н. Н. Боголюбова в виде (17), которые являются вполне интегрируемыми динамическими системами. Эта задача частично эквивалентна классификации потенциалов взаимодействия $\{V(x-y)\colon x,\,y\in\Lambda\}$, для которых динамическая система (17) необходимо обладает бесконечной иерархией законов сохранения, находящихся относительно скобки $\{.\,,\,.\}_*$ в инволюции, и сводится к изучению уравнения (17) на коприсоединенных орбитах алгебры Ли $\mathfrak{A}$ (8), ассоциированной с исходным уравнением Н. Н. Боголюбова.

1. *Боголюбов Н. Н., Боголюбов Н. Н. (мл.)* Введение в квантовую статистическую механику.— М. : Наука, 1984.— 380 с.
2. *Боголюбов Н. Н.' Ширков Д. В.* Введение в теорию квантованных полей.— М. : Наука, 1973.— 416 с.
3. *Боголюбов Н. Н.* Проблемы динамической теории в статистической физике.— М.; Л.: Гостехиздат, 1946.— 117 с.
4. *Боголюбов Н. Н. (мл.), Прикарпатский А. К.* Квантованный оператор Вигнера и метод производящих функционалов Н. Н. Боголюбова в неравновесной статистической физике // Докл. АН СССР.— 1985.— 285, № 3.— С. 505—516.
5. *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли.— М. : Наука, 1972.— 331 с.
6. *Kaufman A., Dewar R. L.* Canonical derivation of the Vlasov—Coulomb noncanonical Poisson structure // Contemp. Math.— 1984.— 28.— P. 51—54.

7. *Guillemin V., Sternberg S.* The moment map and collective motion // Ann. Phys.— 1980.— 127.— P. 220—253.
8. *Kupershmidt B., Ratiu T.* Canonical maps between semidirect product with applications to elasticity and superfluids // Communs Math. Phys.— 1983.— 90. —P. 235—250.
9. *Flaschka H., Newell A. C., Ratiu T.* Kac—Moody Nie-algebras and soliton equations // Physica D.— 1983.— 9.— P. 300—332.
10. *Marsden J., Morrison P., Weinstein A.* The Hamiltonian structure of the BBQKY equations // Contemp. Math.— 1984.— 24.— P. 115—124.
11. *Парасюк И. О.* Непуассоновские коммутативные симметрии и многомерные инвариантные торы гамильтоновых систем // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1984.— № 10.— С. 13—16.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 30.08.85