УДК 517.9

Р. Г. Алиев

О разрешимости уравнения с отклоняющимся аргументом и неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве

В настоящей работе изучается уравнение

$$Lu(t) \equiv \left(D_t - \sum_{j=0}^{m} A_j S_{h_j}\right) u(t) = f(t), \quad S_{h_j} u(t) \equiv u(t-h_j), \quad t > t_0, \tag{1}$$

содержащее в себе уравнения в частных производных параболического и эллиптического типов с отклоняющимся аргументом, а также классические уравнения. Полученные результаты являются новыми и для скалярного уравнения с отклоняющимся аргументом.

Пусть X, Y — гильбертовы пространства, $X \subset Y$, $\|\cdot\|_X \geqslant \|\cdot\|_Y$, $\|A_j u\|_Y \leqslant C\|u\|_X$ $\forall u \in X$, $j = 0, 1, \ldots, m$, $C = \mathrm{const}$, $h_j = \mathrm{const}$, $j = 1, 2, \ldots, m$, $h_0 = 0$. Если $t_0 > -\infty$, то для $t \leqslant t_0$ решение полагается известным:

$$u(t) = g(t), \quad t \leqslant t_0, \quad u(t_0 + 0) = g(t_0). \tag{2}$$

Под решением уравнения (1) понимается функция $u(t)$, сильно абсолютно непрерывная в Y и удовлетворяющая уравнению.

Основные обозначения и определения взяты из работы [1]. Оператор L из (1) рассматривается как оператор из пространства $X^{1,\alpha}_{(t_0,\infty)} = \{u(t),$ $u(t) = 0,\ t \leqslant t_0,\ \|u(t)\|^2 = \int\limits_{t_0}^{\infty} \exp(2\alpha t)(\|u(t)\|_X^2 + \|u'(t)\|_Y^2)\,dt < \infty\}$ в $Y^{0,\alpha}_{(t_0,\infty)} =$

$$= \{u(t),\ u(t) = 0,\ t \leqslant t_0,\ \|u(t)\|^2 = \int\limits_{t_0}^{\infty} \exp(2\alpha t)\|u(t)\|_Y^2\,dt < \infty\}.$$

Теорема 1. *Условия: резольвента* $R(\lambda) \equiv \left(\lambda E - \sum\limits_{j=0}^{m} A_j \exp(-i\lambda h_j)\right)^{-1}$ *регулярна**, $\|R(\lambda)\|_X = O(1)$, $\|\lambda R(\lambda)\|_Y = O(1)$, $|\lambda| \to \infty$, $\mathrm{Im}\,\lambda = \alpha$ $(\mathrm{Im}\,\lambda \leqslant \alpha)$ *необходимы и достаточны для непрерывной обратимости оператора* $L: X^{1,\alpha}_{(t_0,\infty)} \to Y^{0,\alpha}_{(t_0,\infty)}$, $t_0 = -\infty$ $(t_0 > -\infty)$.

Доказательство. Достаточность. Рассмотрим случай $t_0 = -\infty$. В силу условий теоремы функция $u(t)$, определяемая равенством

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathrm{Im}\lambda=\alpha} \exp(i\lambda t) R(\lambda) \tilde{f}(\lambda)\,d\lambda, \tag{3}$$

принадлежит $X^{1,\alpha}_{(-\infty,\infty)}$. Непосредственной оценкой $\|u(t+h) - u(t)\|_Y$ нетрудно показать сильно абсолютную непрерывность $u(t)$ в Y.

Обозначаем $\lim\limits_{N\to\infty} u'_N(t) = v(t)$, где $u_N(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-N+i\alpha}^{N+i\alpha} \exp(i\lambda t) R(\lambda) \times$

---

* Заметим, что достаточно было требовать существование $R(\lambda)$ $\forall\lambda$ с $\mathrm{Im}\lambda = \alpha$ $(\mathrm{Im}\lambda \leqslant \alpha)$. Отсюда и из теоремы об устойчивости ограниченной обратимости голоморфной оператор-функции [3, см. 459] следует регулярность $R(\lambda)$. При $t_0 > -\infty$ полагаем $h_j \geqslant 0$, $j = 1, 2, \ldots, m$.

$\times \tilde{f}(\lambda)\,d\lambda$, и учитывая, что если $\{u_N(t)\}$ сходится в $L^2(\mathbb{R}, Y)$, то некоторая ее подпоследовательность $\{u_{N_k}(t)\}$ сходится почти всюду, т. е. $\lim\limits_{k\to\infty} u_{N_k}(t^*) = u(t^*)$, имеем, с одной стороны, $\int\limits_{t^*}^{t} u'_N(s)\,ds \to u(t) - u(t^*)$ в $L^2(\mathbb{R}, Y)$, где $u(t) = \lim\limits_{N\to\infty} u_N(t)$, а с другой — $\int\limits_{t^*}^{t} u'_N(s)\,ds \to \int\limits_{t^*}^{t} v(s)\,ds$. Таким образом, $u(t) - u(t^*) = \int\limits_{t^*}^{t} v(s)\,ds$. Отсюда в силу теоремы об интеграле с переменным верхним пределом от функции с суммируемым квадратом следует, что $u(t)$ имеет производную почти для всех $t \in \mathbb{R}$. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что $u(t)$ в виде (3) является решением уравнения (1).

Если допустим существование еще одного решения $u_1(t) \in X^{1,\alpha}_{(-\infty,\infty)}$, отличного от $u(t)$, определяемого равенством (3), то $U(t) = u(t) - u_1(t)$ обладает свойствами $LU(t) = 0$, $U(t) \in X^{1,\alpha}_{(-\infty,\infty)}$, $\tilde{U}(\lambda) = R(\lambda)0 = 0$, $\operatorname{Im}\lambda = \alpha$, т. е. $U(t) = 0$ почти для всех t.

Необходимость. Оператор L как сумма замкнутого оператора D_t и ограниченного оператора $A = \sum\limits_{j=0}^{m} A_j S_{h_j}$ является замкнутым оператором [4, с. 209, задача 5.6]. Оператор $L^{-1} : Y^{0,\alpha}_{(-\infty,\infty)} \to X^{1,\alpha}_{(-\infty,\infty)}$ существует, причем L^{-1} — замкнутый оператор [4, с. 555, теорема 1]. Так как $D(L^{-1}) = Y^{0,\alpha}_{(-\infty,\infty)}$, то L^{-1} — ограниченный оператор [4, с. 560, теорема 2] и справедлива оценка

$$\| u(t) \|^{1,\alpha}_{(-\infty,\infty)} \leqslant C \| f(t) \|^{0,\alpha}_{(-\infty,\infty)} \tag{4}$$

с константой C, не зависящей от нормы резольвенты $R(\lambda)$. Докажем отсутствие спектра оператора A на прямой $\operatorname{Im}\lambda = \alpha$.

Допустим, что A имеет на $\operatorname{Im}\lambda = \alpha$ точечный спектр P_σ и пусть λ_0 — точка, принадлежащая этому спектру, т. е. $\exists \varphi_0 \in X$, $\|\varphi_0\|_X = 1$, $L(\lambda_0)\varphi_0 \equiv R^{-1}(\lambda_0)\varphi_0 = 0$. Рассмотрим функцию $u_\varepsilon(t) = \eta(t)\exp(i(\lambda_0 + i\varepsilon)t)\varphi_0$, где

$$\eta(t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant t^0, \quad t^0 \in \mathbb{R}, \\ \varepsilon(t - t^0), & t^0 \leqslant t \leqslant t^0 + 1/\varepsilon, \\ 1, & t > t^0 + 1/\varepsilon, \quad \varepsilon > 0. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что $u_\varepsilon(t)$ и $f_\varepsilon(t) \equiv Lu_\varepsilon(t)$ при $\varepsilon \to 0$ противоречат (4).

Если допустить существование непрерывного спектра C_σ оператора A на $\operatorname{Im}\lambda = \alpha$ и $\lambda_0 \in C_\sigma$, то это означало бы существование последовательности $\varphi_n \in X$, $\|\varphi_n\|_X = 1$, такой, что $\delta_n = \| L(\lambda_0)\varphi_n \|_Y \to 0$ при $n \to \infty$. Противоречие получим как и в предыдущем случае, если рассмотреть функцию $u_{\varepsilon_n}(t) = \eta(t)\exp(i(\lambda_0 + i\varepsilon_n)t)\varphi_n$.

Наконец, если допустить существование остаточного спектра R_σ оператора A на $\operatorname{Im}\lambda = \alpha$ и $\lambda_0 \in R_\sigma$, то это означало бы существование $\varphi \in Y$, $\|\varphi\|_Y = 1$, такого, что $\forall \psi \in X$ справедливо равенство $(L(\lambda_0)\psi, \varphi)_Y = 0$. Поскольку с помощью подстановки $u(t) = \exp(i\lambda_0 t)v(t)$ можно перейти к случаю $\lambda_0 = 0$, то предположим, что выполняется равенство

$$\Big(\sum_{j=0}^{m} A_j \psi, \varphi\Big)_Y = 0. \tag{5}$$

Определим функцию

$$\theta(\lambda) = \begin{cases} 1, & |\operatorname{Re}\lambda| < a', \\ 0, & |\operatorname{Re}\lambda| > a, \quad a' < a, \quad \theta(\lambda) \in C^\infty. \end{cases}$$

и положим $\tilde{f}(\lambda)=\theta(\lambda)\varphi$. Тогда

$$\theta(\lambda)\varphi=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-i\lambda t)f(t)\,dt,\quad \int_{\operatorname{Im}\lambda=\alpha}\|\varphi\theta'(\lambda)\|_Y^2d\lambda=$$

$$=\int_{\operatorname{Im}\lambda=\alpha}|\theta'(\lambda)|^2d\lambda=\int_{-\infty}^{\infty}\exp(2\alpha t)\,t^2\|f(t)\|_Y^2dt.$$

Отсюда и из определения $\theta(\lambda)$ следует

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp(2\alpha t)(1+t^2)\|f(t)\|_Y^2dt<\infty, \tag{6}$$

где

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a+i\alpha}^{a+i\alpha}\exp(i\lambda t)\,\theta(\lambda)\,d\lambda. \tag{7}$$

Если $u(t)$ — решение уравнения (1) с правой частью $f(t)$ в виде (7), то $u(t)\in X^{1,\alpha}_{(-\infty,\infty)}$. Рассмотрим функцию $v(t)\doteq\exp(-\varepsilon t^2)(1+t^2)^{1/2}u(t)$, $\varepsilon>0$. Очевидно, что $\exp(\alpha t)\,v(t)\in L^2(\mathbb{R},X)$, а потому к уравнению

$$Lv(t)=\exp(-\varepsilon t^2)(1+t^2)^{1/2}f(t)+\frac{1}{i}\,t\exp(-\varepsilon t^2)(1+t^2)^{1/2}-u(t)-$$

$$-\frac{1}{i}\,2\varepsilon t\exp(-\varepsilon t^2)(1+t^2)^{1/2}u(t)-\sum_{j=0}^{m}\{[(1+(t-h_j)^2]^{1/2}\exp(-\varepsilon(t-h_j)^2)-$$

$$-(1+t^2)\exp(-\varepsilon t^2)\}A_jS_{h_j}u(t)\equiv F(t)$$

применимо преобразование Фурье, которое дает равенство $\tilde{v}(\lambda)=R(\lambda)\tilde{F}(\lambda)$. Отсюда по теореме Планшереля

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp(2\alpha t)\|v(t)\|_X^2dt=\int_{-\infty}^{\infty}\exp(2\alpha t)(1+t^2)\exp(-2\varepsilon t^2)\|u(t)\|_X^2dt\leqslant$$

$$\leqslant\sup_{\operatorname{Im}\lambda=\alpha}\|R(\lambda)\|_X^2\int_{\operatorname{Im}\lambda=\alpha}\|\tilde{F}(\lambda)\|_Y^2d\lambda.$$

Оценивая последний интеграл и переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$, окончательно получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp(2\alpha t)\,t^2\|u(t)\|_X^2dt\leqslant\Big[\int_{-\infty}^{\infty}\exp(2\alpha t)(1+t^2)\|f(t)\|_Y^2\,dt+\int_{-\infty}^{\infty}\exp(2\alpha t)\times$$

$$\times\|u(t)\|_X^2dt\Big]\leqslant C\int_{-\infty}^{\infty}\exp(2\alpha t)(1+t^2)\|f(t)\|_Y^2dt,\quad C=\mathrm{const},$$

где C зависит от $\sup\limits_{\operatorname{Im}\lambda=\alpha}\|R(\lambda)\|_X<\infty$ (справедливость последнего неравенства следует из определения остаточного спектра). Отсюда и из оценки

$$\|\tilde{u}(\lambda+h)-\tilde{u}(\lambda)\|_X\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}\exp(\alpha t)(1-\cos ht)^{1/2}\|u(t)\|_Xdt\leqslant$$

$$\leqslant\Big(\int_{-\infty}^{\infty}\exp(2\alpha t)\,t^2\|u(t)\|_X^2dt\Big)^{1/2}\Big(\int_{-\infty}^{\infty}t^{-2}(1-\cos ht)^2dt\Big)^{1/2}$$

следует непрерывность функции $\tilde{u}(\lambda)$. Так как $\lambda=\sigma+i\alpha$ и $\tilde{f}(\lambda)=\theta(\lambda)\varphi\to$ $\to\tilde{f}(i\alpha)$ при $\sigma\to 0$, то из равенства $L(\lambda_0)\,\tilde{u}(\lambda)=\tilde{f}(\lambda)$ с учетом предположения $\lambda_0 = 0$ получаем $\varphi = \tilde{f}(0) = \sum_{j=0}^{m} A_j \tilde{u}(0)$. Отсюда и из (7) следует $\left(\sum_{j=0}^{m} A_j \psi, \sum_{j=0}^{m} A_j \tilde{u}(0)\right)_Y = 0$. Поскольку ψ — любой элемент из X, то $\psi = u(0)$, и из последнего равенства следует, что $\varphi = 0$, т. е. $\lambda_0 \overline{\in} R_\sigma$.

Таким образом, мы доказали существование $R(\lambda)$ на прямой $\operatorname{Im}\lambda = \alpha$. Так как $L(\lambda)$ — голоморфная оператор-функция, то из доказанного существования и теоремы о голоморфной оператор-функции [3, с. 459] следует регулярность $R(\lambda)$ на $\operatorname{Im}\lambda = \alpha$.

Если допустить теперь, что не выполняется условие $\| R(\lambda) \|_X = O(1)$, $|\lambda| \to \infty$, $\operatorname{Im}\lambda = \alpha$, то это означало бы существование последовательности $\{\lambda_n\} \to \infty$, $\operatorname{Im}\lambda_n = \alpha$, такой, что $\| R(\lambda_n) \|_X \to \infty$ при $n \to \infty$, т. е. $\forall n \exists \lambda_n$ такое, что выполняется неравенство $\| R(\lambda_n) \| > n$. Другими словами, найдется $\varphi_n \in Y$, $\| \varphi_n \|_Y = 1$, такое, что $\| R(\lambda_n) \varphi_n \|_X > n$. Отсюда и из непрерывности $R(\lambda)$ на $\operatorname{Im}\lambda = \alpha$ следует $\exists \varepsilon_n > 0$ такое, что выполняется неравенство $\| R(\lambda) \varphi_n \|_X > n/2$ для $|\lambda_n - \lambda| < \varepsilon_n$. Рассмотрим функцию $\tilde{f}_n(\lambda) = \sigma_n(\lambda) \varphi_n$, где

$$\sigma_n(\lambda) = \begin{cases} \varepsilon_n^{-1/2}, & |\lambda_n - \lambda| \leqslant \varepsilon_n/2, \\ 0, & |\lambda_n - \lambda| > \varepsilon_n/2. \end{cases}$$

Из очевидных соотношений

$$\| \| \exp(\alpha t)\, u_n(t) \|_X \|_{L_2}^2 = \| \| \tilde{u}_n(\lambda) \|_X \|_{L_2(\operatorname{Im}\lambda = \alpha)}^2 = \int_{\operatorname{Im}\lambda = \alpha} \| R(\lambda) \tilde{f}_n(\lambda) \|_X^2 d\lambda >$$

$$> \int_{|\lambda_n - \lambda| \leqslant \varepsilon_n/2,\ \operatorname{Im}\lambda = \alpha} \| R(\lambda) \sigma_n(\lambda) \varphi_n \|_X^2 d\lambda > \frac{n^2}{4\varepsilon_n} \int_{|\lambda_n - \lambda| \leqslant \varepsilon_n/2} d\lambda = \frac{n^2}{4}$$

следует, что $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(2\alpha t) \| u_n(t) \|_X^2 dt \to \infty$ при $n \to \infty$. С другой стороны,

$$(\| f_n(t) \|_{(-\infty,\infty)}^{0,\alpha})^2 = \int_{\operatorname{Im}\lambda = \alpha} \| \sigma_n(\lambda) \varphi_n \|_Y^2 d\lambda \leqslant \frac{1}{\varepsilon_n} \varepsilon_n = 1.$$

Полученное противоречие с неравенством (4) доказывает неверность нашего допущения.

Аналогично доказывается справедливость равенства $\| \lambda R(\lambda) \|_Y = O(1)$, $|\lambda| \to \infty$, $\operatorname{Im}\lambda = \alpha$. Для случая $t_0 = -\infty$ теорема доказана.

Рассмотрим случай $t_0 > -\infty$. Д о с т а т о ч н о с т ь. В силу доказанной первой части теоремы остается показать справедливость равенства $u(t) = 0$, $t \leqslant t_0$. В условиях теоремы существует функция

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\operatorname{Im}\lambda = \alpha_1} \exp(i\lambda t) R(\lambda) \tilde{f}(\lambda)\, d\lambda, \quad \alpha_1 \leqslant \alpha.$$

Отсюда в силу теоремы Планшереля следует неравенство

$$\int_{-\infty}^{t_0} \exp(2\alpha_1 t) \| u(t) \|_X^2 dt \leqslant \sup_{\operatorname{Im}\lambda \leqslant \alpha} \| R(\lambda) \|_X^2 \int_{t_0}^{\infty} \exp(2\alpha_1 t) \| f(t) \|_Y^2 dt.$$

Умножая обе части на $\exp(-2\alpha_1 t_0)$, получаем

$$\int_{-\infty}^{t_0} \exp(2\alpha_1 (t - t_0)) \| u(t) \|_X^2 dt \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\operatorname{Im}\lambda = \alpha} \| R(\lambda) \|_X^2 \int_{t_0}^{\infty} \exp(2\alpha (t - t_0)) \| f(t) \|_Y^2 dt = C.$$

Теперь из цепочки неравенств

$$\exp(-2\alpha_1\varepsilon)\int_{-\infty}^{t_0-\varepsilon}\|u(t)\|_X^2dt\leqslant\int_{-\infty}^{t_0-\varepsilon}\exp(2\alpha_1(t-t_0))\|u(t)\|_X^2dt\leqslant C,\quad \varepsilon>0,$$

при $\alpha_1\to-\infty$ следует требуемое равенство в силу произвольности ε.

Необходимость. Для простоты положим $t_0=0$, $\alpha=0$. Таким образом, дано $\|u(t)\|_{(0,\infty)}^{1,0}\leqslant C\|f(t)\|_{(0,\infty)}^{0,0}$.

Докажем, что $\forall f(t)\in Y_{(-\infty,\infty)}^{0,\beta}$, $\beta<0$, существует единственное решение $u(t)\in X_{(-\infty,\infty)}^{1,\beta}$ уравнения (1), т. е. докажем непрерывную обратимость оператора $L:X_{(-\infty,\infty)}^{1,\beta}\to Y_{(-\infty,\infty)}^{0,\beta}$, $\beta<0$. Рассмотрим функцию

$$f_k(t)=\begin{cases}f(t), & k/|\beta|\leqslant t\leqslant(k+1)/|\beta|,\\ 0, & t\in(-\infty,k/|\beta|]\cup((k+1)/|\beta|,\infty).\end{cases}$$

Тогда $f(t)=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}f_k(t)$ и $f_k(t)\in Y_{(-\infty,\infty)}^{0,0}$ как финитная функция. Поэтому уравнение $Lu(t)=f_k(t)$, $t\in\mathbb{R}$, имеет единственное решение $u_k(t)\in X_{(k/|\beta|,\infty)}^{1,0}$, причем $\|u_k(t)\|_{(k/|\beta|,\infty)}^{1,0}\leqslant C\|f_k(t)\|_{(k/|\beta|,\infty)}^{0,0}$. Покажем, что $u_k(t)\in X_{(-\infty,\infty)}^{1,\beta}$ $\forall\beta<0$. Действительно,

$$(\|u_k(t)\|_{(-\infty,\infty)}^{1,\beta})^2=\int_{k/|\beta|}^{\infty}\exp(2\beta t)(\|u_k(t)\|_X^2+\|u_k'(t)\|_Y^2)\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\exp(-2k)\int_{k/|\beta|}^{\infty}(\|u_k(t)\|_X^2+\|u_k'(t)\|_Y^2)\,dt\leqslant$$

$$\leqslant C\exp(-2k)\int_{k/|\beta|}^{(k+1)/|\beta|}\|f_k(t)\|_Y^2dt\leqslant C\exp(2)(\|f(t)\|_{(k/|\beta|,\infty)}^{0,\beta})^2.$$

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}u_k(t)$. Для любого конечного интервала $\Delta\in\mathbb{R}$ этот ряд представляет собой конечную сумму. Поэтому сумма этого ряда (обозначим ее через $u(t)$), является решением уравнения (1) и

$$(\|u(t)\|_{(-\infty,\infty)}^{1,\beta})^2=\left(\left\|\sum_{k=-\infty}^{\infty}u_k(t)\right\|_{(-\infty,\infty)}^{1,\beta}\right)^2=$$

$$=\left(\left\|\sum_{k=-\infty}^{\infty}L^{-1}f_k(t)\right\|_{(-\infty,\infty)}^{1,\beta}\right)^2\leqslant C(\|f(t)\|_{(-\infty,\infty)}^{0,\beta})^2,$$

где константа C зависит от нормы оператора $L^{-1}:Y_{(-\infty,\infty)}^{0,\beta}\to X_{(-\infty,\infty)}^{1,\beta}$. Таким образом, мы показали непрерывную обратимость оператора $L:X_{(-\infty,\infty)}^{1,\beta}\to Y_{(-\infty,\infty)}^{0,\beta}$ $\forall\beta<0$. Отсюда и из доказанной первой части теоремы следует регулярность $R(\lambda)$ и выполнение равенств $\|R(\lambda)\|_X=O(1)$, $\|\lambda R(\lambda)\|_Y=O(1)$ при $|\lambda|\to\infty$ на прямой $\operatorname{Im}\lambda=\beta<0$, причем

$$\|u(t)\|_{(-\infty,\infty)}^{1,\beta}\leqslant C\|f(t)\|_{(-\infty,\infty)}^{0,\beta},\tag{8}$$

где постоянная C не зависит от β.

Докажем, что $\|R(\lambda)\|_X\leqslant 4C$, $\operatorname{Im}\lambda\leqslant 0$. Допущение противного означало бы существование точки λ_0, $\operatorname{Im}\lambda_0\leqslant 0$ такой, что $\|R(\lambda_0)\|_X>4C$. Другими словами, $\exists\varphi_0\in Y$, $\|\varphi_0\|_Y=1$, $\|R(\lambda_0)\varphi_0\|_X>4C$. Отсюда и из непрерывности $R(\lambda)$ вдоль прямой $\operatorname{Im}\lambda=\operatorname{Im}\lambda_0$ следует $\exists\varepsilon>0$ такое, что $\|R(\lambda)\varphi_0\|_X>2C$ для $\lambda\in(\sigma_0-\varepsilon,\sigma_0+\varepsilon)$, $\lambda_0=\sigma_0+i\alpha_0$. Рассмотрим функцию $\tilde f(\lambda)=\tau(\lambda)\varphi_0$, где $\tau(\lambda)=\begin{cases}\varepsilon^{-1/2}, & |\lambda-\lambda_0|\leqslant\varepsilon/2,\\ 0, & |\lambda-\lambda_0|>\varepsilon/2.\end{cases}$ Тогда

$\int\limits_{\mathrm{Im}\lambda=\alpha_0} \| \tilde{f}(\lambda) \|_Y^2 \, d\lambda = 1$, т. е. $\| f(t) \|^{0,\alpha_0}_{(-\infty,\infty)} = 1$, а $\int\limits_{\mathrm{Im}\lambda_0=\alpha_0} \| \tilde{u}(\lambda) \|_X^2 \, d\lambda =$ $= \int\limits_{\mathrm{Im}\lambda_0=\alpha_0} \| R(\lambda) \tilde{f}(\lambda) \|_X^2 \, d\lambda > 4C^2$, т. е. $\| u(t) \|^{1,\alpha_0}_{(-\infty,\infty)} > 2C$, что противоречит неравенству (8).

Аналогично доказывается равномерная ограниченность $\| \lambda R(\lambda) \|_Y$ в полуплоскости $\mathrm{Im}\,\lambda \leqslant 0$. Теорема доказана полностью.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия:*

а) $R(\lambda)$ *регулярна и* $\| R(\lambda) \|_X = O(1)$, $\| \lambda R(\lambda) \|_Y = O(1)$, $\mathrm{Im}\,\lambda \leqslant \alpha$;

б) $f(t) = 0$, $t \leqslant t_0$, $f(t) \in Y^{0,\alpha}_{\Delta}$, $\Delta \subset (t_0, \infty)$.

Тогда существует единственное решение $u(t)$ *уравнения* (1) *такое, что* $u(t) = 0$ *при* $t \leqslant t_0$.

Доказательство. Единственность. Если допустим существование двух различных решений $u_1(t)$ и $u_2(t)$, то разность $U(t) = u_1(t) - u_2(t)$ является решением однородного уравнения (1). Для функции $v(t) = \theta(t) U(t)$, где

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & t \leqslant T - h^0, \\ 0, & t > T + 1, \quad \theta(t) \in C^\infty, \quad h^0 = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant m} \{|h_j|\}, \quad T = \mathrm{const}, \end{cases} \tag{9}$$

$$Lv(t) = \theta(t) D_t U(t) + U(t) D_t \theta(t) - \sum_{j=0}^{m} A_j S_{h_j}(U(t)\theta(t)) \equiv \Phi(t).$$

Легко проверить, что $\Phi(t) = 0$ для $t < T - 2h^0$ и $t > T + h^0 + 1$, $\Phi(t) \in Y^{0,\alpha}_{(t_0,\infty)}$. Таким образом, $\Phi(t)$ финитна и для уравнения $Lv(t) = \Phi(t)$ выполнены все условия теоремы 1 при $t_0 = T - 2h^0$. Отсюда в силу произвольности выбора T следует, что $U(t) \equiv 0$.

Существование. Пусть $\theta_i(t) \in C_0^\infty$, $i = 1, 2, \ldots$, $\theta_i(t) = 0$ для $t \overline{\in} \Delta_i = (\alpha_i, \beta_i)$, $\alpha_i < \beta_i$, $\bigcup\limits_i \Delta_i = \mathbb{R}$, образуют разбиение единицы для бесконечного интервала $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$. Тогда $f(t) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \theta_i(t) f(t) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} f_i(t)$. Для уравнения $Lu_i(t) = f_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, выполнены все условия теоремы 1, согласно которой оно имеет единственное решение $u_i(t)$, принадлежащее пространству $X^{1,\alpha}_{(-\infty,\infty)}$ и обладающее свойством $u_i(t) = 0$ для $t \leqslant \alpha_i$, $i = 1, 2, \ldots$.

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i(t)$. Для любого конечного интервала $(t_0, t_0 + T)$, $T > 0$, этот ряд представляет собой конечную сумму. Поэтому $u(t) = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i(t)$ при $t \in (t_0, t_0 + T)$ является решением уравнения (1), поскольку в случае конечной суммы можно поменять местами знаки суммы и оператора L. Так как $u_i(t) = 0$ при $t \leqslant t_0$, $i = 1, 2, \ldots$, то $u(t) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i(t) = 0$ при $t \leqslant t_0$. Утверждение теоремы следует теперь из произвольности выбора $T > 0$.

Замечание. Вторая часть теоремы 1 утверждает существование единственности решения полуоднородной задачи $Lu(t) = f(t)$, $t > t_0$, $u(t) = 0$, $t \leqslant t_0$ в пространстве $X^{1,\alpha}_{(t_0,\infty)}$ $\forall f(t) \in Y^{0,\alpha}_{(t_0,\infty)}$, $t_0 > -\infty$. Случай $u(t) = g(t) \not\equiv 0$, $t \leqslant t_0$, можно свести к рассмотренному. Для этого допустим, что $u(t)$ — решение задачи (1), (2) и

$$u_1(t) = \begin{cases} g(t), & t \leqslant t_0, \\ (1 - t + t_0) g(t_0), & t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + 1, \\ 0, & t > t_0 + 1. \end{cases}$$

Тогда для $v(t) = u(t) - u_1(t)$

$$Lv(t) = f(t) - Lu_1(t) \equiv f_1(t), \quad t > t_0, \quad v(t) = 0, \quad t \leqslant t_0. \tag{10}$$

Легко видеть, что $f_1(t) \in Y^{0,\alpha}_{(t_0,\infty)}$. Поэтому в силу теоремы 1 задача (10) имеет единственное решение $v(t) \in X^{1,\alpha}_{(-\infty,\infty)}$. Теперь из представления $u(t) = u_1(t) + v(t)$ следует, что $u(t) = g(t)$ для $t \leqslant t_0$, т. е. задача (1), (2) с неоднородным начальным условием (2) имеет единственное решение.

Попутно из неравенства

$$\int_{t_0}^{\infty} \exp(2\alpha t) \| u(t) \|_X^2 \, dt \leqslant C \int_{t_0}^{\infty} \exp(2\alpha t) \| f_1(t) \|_Y^2 \, dt$$

легко получается оценка

$$\int_{t_0}^{\infty} \exp(2\alpha t) \|u(t)\|_X^2 \, dt \leqslant C \left\{ \int_{t_0}^{\infty} \exp(2\alpha t) \| f(t) \|_Y^2 \, dt + \int_{t_0-h^0}^{t_0} \exp(2\alpha t) \| g(t) \|_X^2 \, dt \right\},$$

где $h^0 = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant m} \{|h_j|\}$.

1. *Алиев Р. Г.* К вопросу о необходимых и достаточных условиях однозначной разрешимости уравнения с отклоняющимся аргументом и неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве // Докл. АН СССР.— 1982.— 267, № 1.— С. 11—14.
2. *Алиев Р. Г.* О разрешимости уравнения с периодическими коэффициентами и отклонениями аргумента в гильбертовом пространстве // Изв. вузов. Математика.— 1984.— № 5.— С. 3—8.
3. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов.— М. : Мир, 1972.— 740 с.
4. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики: В 5-х т.— М. : Гостехтеоретиздат, 1959.— Т. 5. 656 с.

Дагестан. ун-т

Получено 22.02.85,
после доработки — 11.05.85