УДК 517.5

А. И. Степанец

Приближение суммами Фурье функций с медленно убывающими коэффициентами Фурье

1. Предварительные замечания. Будем рассматривать классы периодических функций, определяющиеся следующим образом, основанным на преобразованиях рядов Фурье с помощью мультипликаторов и сдвигов по аргументу.

Пусть $f \in L(0,2\pi)$ и $a_k = a_k(f)$, $b_k = b_k(f)$, $k = 0, 1, \ldots,$ — ее коэффициенты Фурье. Пусть, далее, $\psi(k)$ — произвольная функция натурального аргумента и β — фиксированное действительное число, $\beta \in \mathbb{R}$. Предположим, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)} (a_k \cos(kx + \beta\pi/2) + b_k \sin(kx + \beta\pi/2)) \tag{1}$$

является рядом Фурье некоторой функции из $L(0, 2\pi)$. Эту функцию обозначим $f_\beta^\psi(\cdot)$ и назовем (ψ, β)-производной функции $f(\cdot)$, а множество функций $f(\cdot)$, удовлетворяющих таким условиям, обозначим L_β^ψ. Пусть $\mathfrak{N}$ — некоторое подмножество функций из $L(0, 2\pi)$. Тогда, если $f \in L_\beta^\psi$ и при этом $f_\beta^\psi \in \mathfrak{N}$, то будем говорить, что $f(\cdot)$ принадлежит классу $L_\beta^\psi\mathfrak{N}$. Подмножество непрерывных функций из класса $L_\beta^\psi\mathfrak{N}$ обозначим $C_\beta^\psi\mathfrak{N}$. При $\psi(k) = k^{-r}$, $r > 0$, классы $L_\beta^\psi\mathfrak{N}$ переходят в хорошо известные классы $W_\beta^r\mathfrak{N}$ Вейля — Надя, которые в свою очередь при натуральных r и $\beta = r$ являются классами 2π-периодических функций, r-е производные которых находятся в классе $\mathfrak{N}$. В случае, когда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos(kt + \beta\pi/2)$ является рядом Фурье некоторой суммируемой функции $\Psi_\beta(t)$, классы $L_\beta^\psi\mathfrak{N}$ совпадают с множествами функций $f(\cdot)$, представимых свертками $f(\cdot) = a_0/2 + \varphi * \Psi_\beta$, где $\varphi \in \mathfrak{N}$, которые изучались многими авторами (см., например, [1 — 8]). Классы функций, задающиеся одними мультипликаторами, рассматривались в [9].

Аппроксимативные свойства классов $L_\beta^\psi\mathfrak{N}$ существенно зависят от функций $\psi(k)$. Предположим, что $\psi(k)$ — бесконечно малая, выпуклая вниз последовательность, члены которой являются значениями некоторой выпуклой вниз при $v \geqslant 1$ функции $\psi(v)$ непрерывного аргумента. Множество таких функций обозначим $\mathfrak{M}$.

Если $\varphi \in \mathfrak{M}$ и, кроме того,

$$\int_1^{\infty} v^{-1}\psi(v + 1)\, dv < \infty, \tag{2}$$

то полагаем $\psi \in F$.

До сих пор при рассмотрении задач в равномерной метрике и в метрике пространства L предполагалось, что $\psi \in F$ (см., например, [1, 2, 10]).

В настоящей работе исследуются величины $\rho_n(f; x) = f(x) - S_{n-1}(f; x)$, где $S_k(f; x)$ — частная сумма Фурье функции $f(\cdot)$ на классах $C_\beta^\psi\mathfrak{N}$, когда по-прежнему $\psi \in \mathfrak{M}$, но условие (2) может быть и не выполненным.

Условие (2) равносильно сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-1}\psi(k), \tag{2'}$$

что, как известно, является необходимым условием того, чтобы ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k)\sin kt \tag{3}$$

был рядом Фурье некоторой функции из $L(0, 2\pi)$.

В связи с этим, допуская возможность расходимости ряда (2′), ограничимся случаем, когда $\beta = 2i\pi$, $i \in Z$, что позволит в наших рассмотрениях избежать появления рядов вида (3).

Заметим, что если $f \in L_{2i\pi}^\psi$, то $(-1)^i f(\cdot) \in L_0^\psi$. Стало быть, ограничиваясь случаем $\beta = 2i\pi$, $i \in Z$, достаточно рассмотреть лишь случай, когда $\beta = 0$, и остановиться на классах $C_0^\psi\mathfrak{N}$.

Наша основная цель —получить асимптотические равенства для величин

$$\mathcal{E}_n(C_0^\psi\mathfrak{N}) = \sup\{|\rho_n(f; x)|,\ f \in C_0^\psi\mathfrak{N}\}. \tag{4}$$

В качестве $\mathfrak{N}$ в (4) берется либо единичный шар S_M в пространстве M почти всюду ограниченных функций, $S_M = \{\varphi : \|\varphi\|_M = \operatorname{ess\,sup}|\varphi| \leqslant 1\}$, либо класс $H_\omega = \{\varphi : |\varphi(t) - \varphi(t')| \leqslant \omega(|t - t'|)\}$, где $\omega(t)$ — произвольный модуль непрерывности.

При этом полагаем $C_0^\psi S_M = C_{0,\infty}^\psi$. Функции $\psi(\cdot)$ в (4) будем брать из множества $\mathfrak{M}_0$, к которому отнесем те функции $\psi(\cdot)$ из множества $\mathfrak{M}$, для которых

$$0 < t\left(\psi^{-1}\left(\frac{1}{2}(\psi(t)) - t\right)\right)^{-1} \leqslant K \quad \forall t \geqslant 1. \tag{5}$$

Здесь и в дальнейшем K, K_i, $i = 1, 2, \ldots$, — абсолютные постоянные, которые, вообще говоря, могут быть различными.

Если ограничиться определенной степенью строгости, то можно считать, что к множеству $\mathfrak{M}_0$ принадлежит всякая выпуклая вниз при $v \geqslant 1$ функция $\psi(v)$, которая убывает как функция v^{-r}, $r > 0$, или медленнее ее. К $\mathfrak{M}_0$, к примеру, принадлежит функция $\psi_\varepsilon(v) = \ln^{-\varepsilon}(t + C)$ при любом $\varepsilon > 0$ и надлежащем выборе постоянной C. Заметим, что если $\varepsilon \in (0, 1]$, то ряд (2′) для $\psi_\varepsilon(v)$ расходится.

Важное для дальнейшего свойство функций $\psi \in \mathfrak{M}_0$ устанавливается в следующем утверждении.

Лемма 1. *Если* $\psi = \mathfrak{M}_0$, *то* $\forall t \geqslant 1$

$$t|\psi'(t)| < K_1\psi(t), \quad (\psi'(t) \overset{\text{df}}{=} \psi'(t + 0)). \tag{6}$$

Доказательство этого утверждения дано в [11], леммы 1, 2.

2. Интегральные представления для $\rho_n(f; x)$ на множествах $C_0^\psi M$. Если $\psi \in \mathfrak{M}$, то ее производная $\psi'(v)\ (\psi'(v) \overset{\text{df}}{=} \psi'(v + 0))$ не убывает и удовлетворяет равенству

$$\psi(v) = \int_v^\infty \psi'(t)\,dt, \tag{7}$$

из которого, в частности, следует

$$\lim_{v\to\infty} \psi'(v) = 0. \tag{8}$$

Отметив это, получим интегральные представления величин $\rho_n(f; x)$ на множествах $C_0^\psi M$ функций $f \in L_0^\psi$, у которых производные $f_0^\psi(\cdot)$ почти всюду ограничены некоторой постоянной K:

$$\operatorname{ess\,sup} |f_0^\psi(t)| \leqslant K. \tag{9}$$

С этой целью докажем следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть* $\psi \in \mathfrak{M}$ *и* c — *любая точка из* $[0, 1)$,

$$\tau_\psi(c, v) = \tau_\psi(c, v, n) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant v \leqslant c, \\ \dfrac{v-c}{1-c}\psi(n), & c \leqslant v \leqslant 1, \\ \psi(nv), & v \geqslant 1. \end{cases} \tag{10}$$

Тогда для любого $n \in N$ *преобразование Фурье*

$$\hat{\tau}_\psi(c, t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \tau_\psi(c, v)\cos vt\,dv \tag{11}$$

суммируемо на всей числовой оси, т. е. $\hat{\tau}_\psi \in L(R)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\tau}_\psi(c, t)|\,dt < \infty. \tag{12}$$

Доказательство. Учитывая (10), имеем

$$\hat{\tau}_\psi(c, t) = \frac{\psi(n)}{\pi(1-c)}\int_c^1 (v-c)\cos vt\,dv + \frac{1}{\pi}\int_1^\infty \psi(nv)\cos vt\,dv \overset{\mathrm{df}}{=} I_1(\psi; t) + I_2(\psi; t). \tag{13}$$

Выполняя интегрирование, находим

$$I_1(\psi, t) = \frac{\psi(n)}{\pi}\left(\frac{\sin t}{t} - \frac{2\sin((1+c)t/2)\sin((1-c)t/2)}{(1-c)t^2}\right). \tag{14}$$

Отсюда видим, что

$$I_1(\psi; t) = O(1)\psi(n), \quad t \to 0. \tag{15}$$

Теперь представим интеграл $I_2(\psi; t)$ в виде

$$I_2(\psi; t) = -\frac{\psi(n)\sin t}{\pi t} - \frac{n}{\pi t}\int_1^\infty \psi'(nv)\sin vt\,dv \overset{\mathrm{df}}{=} -\frac{\psi(n)\sin vt}{\pi t} - \frac{n}{\pi t} I_3(t) \tag{16}$$

и положим

$$\varphi_n(v) = \begin{cases} -\psi'(nv), & v \geqslant 1, \\ -\psi'(n), & 0 < v < 1, \quad n \in N. \end{cases}$$

При каждом фиксированном n функция $\varphi_n(v)$ не возрастает, поэтому

$$\Phi_n(t) = \int_0^\infty \varphi_n(v)\sin vt\,dv \geqslant 0 \qquad \forall t > 0. \tag{17}$$

Но

$$\Phi_n(t) = -\psi'(n)\int_0^1 \sin vt\,dv - I_3(t) = -\frac{2\psi'(n)}{t}\sin^2 t/2 - I_3(t). \tag{18}$$

Предположим теперь, что в некоторой точке $t > 0$ $I_3(t) > 0$. Тогда вследствие (17) и (18) будем иметь

$$I_3(t) \leqslant -\frac{2\psi'(n)}{t}\sin^2\frac{t}{2} < \frac{t}{2}\,\psi'(n). \tag{19}$$

Заметив это, для любого $a > 0$ разобьем отрезок $(0, a)$ на множества l_+ и l_-, положив $l_+ = \{t : t \in (0, a),\ I_3(t) > 0\}$, $l_- = (0, a) \setminus l_+$. Тогда

$$\frac{n}{\pi} \int_{-a}^{a} \left| \frac{1}{t} I_3(t) \right| dt = \frac{2n}{\pi} \int_{0}^{a} \left| \frac{1}{t} I_3(t) \right| dt = \frac{2n}{\pi} \left(2 \int_{l_+} \frac{1}{t} I_3(t)\, dt - \right.$$

$$\left. - \int_{0}^{a} \frac{1}{t} I_3(t)\, dt \right).$$

На множестве l_+ справедлива оценка (19), в силу которой

$$\frac{4n}{\pi} \int_{l_+} \frac{1}{t} I_3(t)\, dt < \frac{2an\,|\psi'(n)|}{\pi}.$$

Далее, поскольку функция $t^{-1}\psi'(nv) \sin vt$ суммируема в полосе $t \in (0, a)$, $v \in [1, \infty)$, то применима теорема Фубини, вследствие которой имеем

$$\frac{2n}{\pi} \left| \int_{0}^{a} \int_{1}^{\infty} \psi'(nv) \frac{\sin vt}{t}\, dv dt \right| \leqslant \frac{2n}{\pi} \int_{1}^{\infty} |\psi'(nv)| \left| \int_{0}^{av} \frac{\sin t}{t}\, dt \right| dv <$$

$$< \frac{2\psi(n)}{\pi} (\pi/2 + \operatorname{si} av) < 2\psi(n).$$

Поэтому $\forall a > 0$

$$\frac{n}{\pi} \int_{-a}^{a} \left| \frac{1}{t} I_3(t) \right| dt < 2\psi(n) + 2a\,|\psi'(n)|\,\frac{n}{\pi}. \tag{20}$$

Из соотношений (15), (16) и (20) следует, что функция $\tau_\psi(c, t)$ суммируема в некоторой окрестности начала координат. Убедимся в ее суммируемости и при больших значениях $|t|$.

Из (13), (14) и (16) находим

$$\hat{\tau}_\psi(c, t) = -\frac{2 \sin((1 + c)\, t/2) \sin((1 - c)\, t/2)}{(1 - c)\, t^2} - \frac{n}{\pi t} I_3(t). \tag{21}$$

В [2] показано, что для интеграла $I_3(t)$ справедлива оценка

$$\left| \frac{n}{\pi t} I_3(t) \right| \leqslant \frac{n}{\pi t} \int_{1}^{2\pi/t} \psi'(nv)\, nv dv = \frac{1}{\pi t} (\psi(n) - \psi(n(1 + 2\pi/t))) < 2n\psi'(n)/t^2,$$

$$t > 0. \tag{22}$$

Отсюда с учетом (21) следует факт суммируемости функции $\hat{\tau}_\psi(c, t)$ при больших значениях $|t|$, а так как она непрерывна на всей оси, то в таком случае является и суммируемой на $\mathbb{R}$. Лемма доказана.

Объединяя утверждения леммы 2 и теоремы 1 из [2], получаем следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $c \in [0, 1)$ *и*

$$\lambda_n(c, v) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant v \leqslant c, \\ 1 - \dfrac{v - c}{1 - c} \dfrac{\psi(n)}{\psi(nv)}, & c \leqslant v \leqslant 1, \\ 0, & v \geqslant 1, \end{cases} \tag{23}$$

$$U_n(f; x; c) = a_0(f)/2 + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n(c, k/n)\, A_k(f; x). \tag{24}$$

Тогда, если $C_0^\psi K = \{f : f \in C_0^\psi, |f_0^\psi| \leqslant K\}$ и $\psi \in \mathfrak{M}$, *то в каждой точке* x *выполняется равенство*

$$f(x) - U_n(f; x; c) = \int_{-\infty}^{\infty} f_0^\psi(x + t/n)\,\hat{\tau}_\psi(c, t)\,dt. \tag{25}$$

Если положить $c = 1 - n^{-1}$, то полиномы $U_n(f; x; c)$ — суть частные суммы Фурье функции $f(x)$. Поэтому из теоремы 1 получаем такое следствие.

Следствие 1. *Пусть* $\psi \in \mathfrak{M}$ *и*

$$\hat{\tau}_\psi(1 - n^{-1}; t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant v \leqslant 1 - n^{-1}, \\ (1 - n(v-1))\,\psi(n), & 1 - n^{-1} \leqslant v \leqslant 1, \\ \psi(nv), & v \geqslant 1. \end{cases} \tag{26}$$

Тогда $\forall f \in C_0^\psi M$ *в каждой точке* x *справедливо равенство*

$$\rho_n(f; x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_0^\psi(x + t/n)\,\hat{\tau}_\psi(1 - n^{-1}; t)\,dt. \tag{27}$$

Интеграл $I_2(\psi; t)$ в равенстве (13) не зависит от точки c. Если же $c = 1 - n^{-1}$, то $I_1(\psi; t)$ будем обозначать через $i_1(\psi; t)$. Таким образом,

$$\hat{\tau}_\psi(1 - n^{-1}; t) = i_1(\psi; t) + I_2(\psi; t). \tag{28}$$

В [2] показано, что если $f \in L_\beta^\psi\ (\beta \in \mathbb{R})$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\beta^\psi(x + t/n)\,i_1(\psi; t)\,dt = \frac{1}{2} A_n(f; x) \tag{29}$$

где несобственный интеграл понимается в смысле его главного значения. При этих же условиях

$$\int_{-\infty}^{\infty} I_2(t)\,dt = 0. \tag{30}$$

Поэтому, объединяя соотношения (27) — (30), получаем следующее утверждение.

Следствие 1′. *Пусть* $\psi \in \mathfrak{M}$ *и* $\hat{\tau}_\psi(1 - n^{-1}; t)$ *определяется равенством* (26). *Тогда* $\forall f \in C_0^\psi M$ *в каждой точке* x *справедливо равенство*

$$\rho_n(f; x) = -\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x; t/n)\,I_2(\psi; t)\,dt + \frac{1}{2} A_n(f; x), \tag{31}$$

где

$$\delta(x; t/n) = f_0^\psi(x) - f_0^\psi(x + t/n) \tag{32}$$

и интеграл понимается в смысле его главного значения.

Далее, подставляя в (31) выражение интеграла $I_2(\psi, t)$ из (16), находим

$$\rho_n(f; x) = \frac{\psi(n)}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(x; \frac{t}{n}\right) \frac{\sin t}{t}\,dt + \frac{n}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(x; \frac{t}{n}\right) \frac{1}{t} I_3(t)\,dt + \\ + \frac{1}{2} A_n(f; x). \tag{33}$$

Но (см., например, [10, с. 88])

$$\frac{\psi(n)}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(x; \frac{t}{\pi}\right) \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\psi(n)}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_0^\psi(x) \frac{\sin t}{t}\,dt - \frac{\psi(n)}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_0^\psi(x + t) \times \\ \times \frac{\sin nt}{t}\,dt = \psi(n)\,(f_0^\psi(x) - S_{n-1}(f_0^\psi; x)) - \frac{\psi(n)}{2} A_n(f_0^\psi; x) \tag{34}$$

и, как нетрудно проверить, отправляясь от формулы (1),

$$\frac{1}{2} A_n(f;\ x) = \frac{\psi(n)}{2} A_n(f_0^\psi;\ x). \tag{35}$$

Поэтому, сопоставляя соотношения (33) — (35), приходим к такому утверждению.

Теорема 2. *Пусть* $\psi \in \mathfrak{M}$. *Тогда* $\forall f \in C_0^\psi M$ *в каждой точке* x *выполняется равенство*

$$\rho_n(f;\ x) = f(x) - S_{n-1}(f;\ x) = \psi(n)\rho_n(f_0^\psi;\ x) + \frac{n}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x;\ t/n)\frac{1}{t} I_3(t)\,dt, \tag{36}$$

где величины $\delta(x;\ t/n)$ *и* $I_3(t)$ *определены соответственно равенствами* (32) *и* (16), *а интеграл понимается в смысле его главного значения.*

3. Асимптотические равенства для величин $\mathscr{E}_n(C_{0,\infty}^\psi)$ и $\mathscr{E}_n(C_0^\psi H_\omega)$. Будем исходить из равенства (36) и сначала получим необходимые оценки величин

$$R_n(f;\ \psi;\ x) = \frac{n}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta\left(x;\ \frac{t}{n}\right)\frac{1}{t} I_3(t)\,dt \tag{37}$$

на классах $C_{0,\infty}^\psi$ и $C_0^\psi H_\omega$.

В [2] показано, что функция $\Phi_3(x) = \int\limits_x^\infty \frac{1}{t} I_3(t)\,dt,\ x > 0$, на каждом промежутке $(x_k,\ x_{k+1}),\ k = 0, 1, \ldots$, где $\{x_k\},\ k = 1, 2, \ldots$,—множество нулей интегрального синуса

$$\operatorname{si} x = -\int\limits_x^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt,$$

перенумерованное в возрастающем порядке, обращается в нуль с переменой знака в некоторой точке $\bar{x}_k$, причем

$$k\pi + \pi/2 < \bar{x}_k < (k+1)\pi + 2\pi/3. \tag{38}$$

Учитывая эту информацию, имеем

$$R_n^+ \stackrel{\mathrm{df}}{=} \frac{n}{\pi}\int\limits_0^\infty \delta\left(x;\ \frac{t}{n}\right)\frac{1}{t} I_3(t)\,dt = \frac{n}{\pi}\int\limits_0^{\bar{x}_0} \delta\left(x;\ \frac{t}{n}\right)\frac{1}{t} I_3(t)\,dt +$$

$$+ \frac{n}{\pi}\sum_{k=0}^\infty \int\limits_{\bar{x}_k}^{\bar{x}_{k+1}} \delta\left(x;\ \frac{t}{n}\right)\frac{1}{t} I_3(t)\,dt. \tag{39}$$

Если теперь $f \in C_0^\psi H_\omega$, то $f_0^\psi \in H_\omega$ и, стало быть, на интервале $[0,\ \bar{x}_0]$

$$|\delta(x;\ t/n)| \leqslant \omega(\bar{x}_0/n) < K\omega\left(\frac{1}{n}\right).$$

При этом для каждого члена ряда в (39) легко получается оценка (см. [2, с. 117])

$$\left|\int\limits_{\bar{x}_k}^{\bar{x}_{k+1}} \delta(x;\ t/n)\frac{1}{t} I_3(t)\,dt\right| \leqslant K\omega(1/n). \tag{40}$$

Поэтому $\forall f \in C_0^\psi H_\omega$

$$|R_n^+| < Kn\omega\left(\frac{1}{n}\right)\int_0^\infty\left|\frac{1}{t} I_3(t)\right| dt.$$

Ясно, что в силу четности функции $t^{-1}I_3(t)$ такая же оценка верна и для интеграла, взятого по промежутку $t<0$. Значит, $\forall f \in C_0^\psi H_\omega$

$$|R_n(f;\ \psi;\ x)| < Kn\omega\left(\frac{1}{n}\right)\int_0^\infty \frac{1}{t} I_3(t)\, dt. \tag{41}$$

В случае, когда $f \in C_{0,\infty}^\psi$, справедлива простейшая оценка

$$|R_n(f;\ \psi;\ t)| < Kn\int_0^\infty\left|\frac{1}{t} I_3(t)\right| dt. \tag{42}$$

Покажем теперь, что $\forall \psi \in \mathfrak{M}_0$

$$i_3 \overset{\mathrm{df}}{=} n\int_0^\infty\left|\frac{1}{t} I_3(t)\right| dt < K\psi(n), \quad n \in N. \tag{43}$$

Для этого сначала представим интеграл в (43) суммой двух интегралов, например, по промежуткам $[0,\ \pi/2]$ и $[\pi/2,\ \infty)$. К первому применим неравенство (20), ко второму — (22). Получим $i_3 < \pi\psi(n) + \pi n\psi'(n)\ 2 + 4n\psi'(n)$. Отсюда, чтобы получить (43), достаточно воспользоваться соотношением (6).

Итак, $\forall\ \psi \in \mathfrak{M}_0$ справедливы неравенства

$$|R_n(f;\ \psi;\ t)| < \begin{cases} K\psi(n)\,\omega(1/n) & \forall\ f \in C_{0,\infty}^\psi H_\omega, \quad n \in N, \qquad (44)\\ K\psi(n) & \forall\ f \in C_{0,\infty}^\psi, \quad n \in N. \qquad (45)\end{cases}$$

Сопоставляя полученные оценки с утверждением теоремы 2, видим, что справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть* $\psi \in \mathfrak{M}_0$. *Тогда* $\forall\ f \in C_0^\psi H_\omega$ *в каждой точке* x

$$\rho_n(f;\ x) = \psi(n)\,\rho_n(f_0^\psi;\ x) + O(1)\,\psi(n)\,\omega(1/n). \tag{46}$$

Если же $f \in C_{0,\infty}^\psi$, *то в каждой точке* x

$$\rho_n(f,\ x) = \psi(n)\,\rho_n(f_0^\psi;\ x) + O(1)\,\psi(n), \tag{46'}$$

где $O(1)$ — *величины, равномерно ограниченные по* f, x *и* n.

Отсюда, замечая, что (см., например., [10, с. 121 и 168]),

$$\sup_{f \in C_0^\psi H_\omega} |\rho_n(f_0^\psi;\ x)| = \sup_{\varphi \in H_\omega} |\rho_n(\varphi;\ x)| = \frac{2s_n(\omega)}{\pi^2}\ln n + O(1), \tag{47}$$

$$\sup_{f \in C_{0,\infty}^\psi} |\rho_n(f_0^\psi;\ x)| = \sup_{|\varphi| \leqslant 1} |\varphi(x) - S_n(\varphi;\ x)| = \sup_{|\varphi| \leqslant 1} |S_n(f;\ x)| + O(1) =$$

$$= \sup_{|\varphi| \leqslant 1}\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x+t)\,D_{n-1}(t)\,dt\right| + O(1) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi |D_{n-1}(t)|\,dt + O(1) =$$

$$= \frac{4}{\pi^2}\ln n + O(1), \tag{47'}$$

где $D_{n-1}(t)$ — ядро Дирихле порядка $n-1$, получаем такое утверждение.

Следствие 1. *Пусть* $\psi \in \mathfrak{M}_0$. *Тогда при* $n \to \infty$

$$\mathcal{E}_n (C_0^\psi H_\omega) = \frac{2\psi(n) s_n(\omega)}{\pi^2} \ln n + O(1)\psi(n)\omega(1/n), \tag{48}$$

$$\mathcal{E}_n (C_{0,\infty}^\psi) = \frac{4\psi(n)}{\pi^2} \ln n + O(1)\psi(n), \tag{48'}$$

где $O(1)$ — *величины, равномерно ограниченные по* n, *а* $s_n(\omega)$ — *величина, определяемая соотношением* $s_n(\omega) = \theta_\omega \int\limits_0^{\pi/2} \omega(2t/n) \sin t dt$, $\theta_\omega \in [2/3, 1]$, *причем* $\theta_\omega = 1$, *если* $\omega(t)$ — *выпуклая функция.*

4. О множителях равномерной сходимости. Равенства (48) и (48′) дают решение известной задачи Колмогорова — Никольского для классов $C_{0,\infty}^\psi$ и $C_0^\psi H_\omega$. Эти равенства представляют интерес также и с точки зрения известной в теории тригонометрических рядов задачи о множителях равномерной сходимости.

Пусть $\mathfrak{N}$ — некоторый класс функций $\varphi \in L(0, 2\pi)$, $S[f] = \sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k(\varphi; x)$, $A_k(\varphi; x) = a_k(\varphi)\cos kx + b_k(\varphi)\sin kx$, и λ_k, $k \in N$, — некоторая числовая последовательность. Если ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k A_k(\varphi; x) \tag{49}$$

равномерно сходится для любой $\varphi \in \mathfrak{N}$, то числа λ_k называют множителями равномерной сходимости для класса $\mathfrak{N}$ (см., например, [12]).

Если $\mathfrak{N} = S_M$ или $\mathfrak{N} = H_\omega$, а λ_k — выпуклая вниз бесконечно малая последовательность, то непрерывная функция $f(\cdot)$, ряд Фурье которой имеет вид (49), принадлежит соответственно классу $C_{0,\infty}^\psi$ или $C_0^\psi H_\omega$ при $\psi(k) \equiv \lambda_k$ и тогда из следствия 1 получается такое утверждение.

Теорема 4. *Члены бесконечно малой выпуклой вниз последовательности* λ_k *являются множителями равномерной сходимости для класса* S_M *тогда и только тогда, когда* $\lambda_n \ln n = o(1)$, $n \to \infty$, *для класса* H_ω — *тогда и только тогда, когда* $\lambda_n \omega(1/n) \ln n = o(1)$, $n \to \infty$.

Основные результаты этой статьи анонсированы автором в [13].

1. *Степанец А. И.* Классы периодических функций и приближение их элементов суммами Фурье // Докл. АН СССР.— 1984.— 50, № 5.— С. 1074—1077.
2. *Степанец А. И.* Классификация периодических функций и скорость сходимости их рядов Фурье // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1986.— 50, № 1.— С. 108—136.
3. *Никольский С. М.* Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами // Тр. Мат. ин-та АН СССР.— 1945.— 15.— 76 с.
4. *Nagy B.* Sur une classe gènerale de procèdès de sommation pour les seriès de Fourier // Hung. Acta Math.— 1948.— 1, № 3.— P. 14—52.
5. *Стечкин С. Б.* О наилучшем приближении некоторых классов периодических функций тригонометрическими полиномами // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1956.— 20, № 5.— С. 643—648.
6. *Дзядык В. К.* О наилучшем приближении на классах периодических функций, определяемых ядрами, являющимися интегралами от абсолютно монотонных функций // Там же.— 1959.— 23, № 6.— С. 933—950.
7. *Ефимов А. В.* О приближении некоторых классов непрерывных функций суммами Фурье и суммами Фейера // Там же.— 1958.— 22, № 4.— С. 81—116.
8. *Теляковский С. А.* О приближении дифференцируемых функций линейными средними их рядов Фурье // Там же.— 1960.— 24, № 2.— С. 213—242.
9. *Butzer P., Nessel J.* Fourier analysis and approximation.— Basel; Stuttgart : Birkhäser Verlag, 1971.— V. 1.— 554 P.
10. *Степанец А. И.* Равномерные приближения тригонометрическими полиномами.— Киев : Наук. думка, 1981.— 340 с.
11. *Степанец А. И.* Модули полураспада монотонных функций и скорость сходимости рядов Фурье // Укр. мат. журн.— 1986.— 38, № 5.— С. 618—624.
12. *Теляковский С.А.* О множителях равномерной сходимости рядов. Фурье функций с заданным модулем непрерывности // Мат. заметки.— 1971.— 10, № 1. — С. 33—40.
13. *Степанец А. И.* Приближение суммами Фурье функций с медленно убывающими коэффициентами Фурье // Приближение периодических функций суммами Фурье.— Киев, 1984.— С. 3—25.— (Препринт / АН УССР, Ин-т математики АН УССР; 84.43).

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 24.12.85