УДК 517.925

С. К. Норкин

Асимптотика и структура интегрального O-множества системы из класса Липшица для скалярного произведения

Пусть $x \in \mathbb{R}_+$, $y = \operatorname{colon}(u, v, w) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-k-p}$, $k, p, n \in \mathbb{N}$, $n > k + p$; $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^3_+$, $\alpha(x) = \operatorname{diag}(\alpha_1(x), \alpha_2(x), \alpha_3(x))$; $F(x, y) = \operatorname{colon}(F_1(x, u, v, w), F_2(x, u, v, w), F_3(x, u, v, w)) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-k-p} \to \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-k-p}$; $I_a =]0; a[$, $\mathcal{J}_a = [0; a[$; $\|\cdot\|$ — евклидова норма; $\langle\cdot, \cdot\rangle$ — скалярное произведение; $\mathbb{C}_0(I_a)$ ($\mathbb{C}_+(I_a)$) — множество непрерывных неотрицательных (положительных) в интервале I_a функций.

Обозначим через $\overline{\mathrm{Lip}}_{(u,\cdot)}(L(x); \lambda(x))$, $\underline{\mathrm{Lip}}_{(u,\cdot)}(L(x); \lambda(x))$ множества вектор-функций $F(x, u, v, w)$ таких, что выполняются соответственно неравенства

$$\langle u_2 - u_1, F(x, u_2, v_2, w_2) - F(x, u_1, v_1, w_1)\rangle \leqslant L(x) \| u_2 - u_1 \|^2 + \lambda(x) (\| v_2 - v_1 \|^2 + \| w_2 - v_1 \|^2),$$

$$\langle u_2 - u_1, F(x, u_2, v_2, w_2) - F(x, u_1, v_1, w_1)\rangle \geqslant L(x) \| u_2 - u_1 \|^2 + \lambda(x) (\| v_2 - v_1 \|^2 + \| w_2 - w_1 \|^2).$$

Множества $\overline{\mathrm{Lip}}_{(u,\cdot)}$, $\underline{\mathrm{Lip}}_{(u,\cdot)}$ будем называть классами Липшица для скалярного произведения относительно переменной a.

1. Исследуем с помощью понятий асимптотической и локально-асимптотической воронки локальное интегральное O-множество сингулярной системы

$$\alpha(x)\, dy/dx = F(x, y), \tag{1}$$

определенной в области

$$S = \{(x, y): x \in I_a, \ \|u\| \in \mathcal{J}_b, \ \|v\| \in \mathcal{J}_c, \ \|w\| \in \mathcal{J}_d\}, \tag{2}$$

где a, b, c, $d \in \mathbb{R}$ — фиксированные числа.

Будем предполагать выполненными следующие условия: система (1) принадлежит классу $(\mathbb{C}_S, \mathrm{Un})$, т. е. через каждую точку области (2) проходит, и притом единственная, интегральная кривая системы (1), определенная на левом максимальном интервале существования;

$$\lim_{x\to+0} \alpha_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, 3; \qquad \|F(x, 0)\| \equiv 0, \quad x \in I_a; \tag{3}$$

$$F_1 \in \overline{\mathrm{Lip}}_{(u,\cdot)}(L_1(x); \lambda_1(x)), \tag{4}$$

$$F_2 \in \dot{\overline{\mathrm{Lip}}}_{(v,\cdot)}(L_0(x) + L_2(x); \lambda_2(x)), \tag{5}$$

$$F_2 \in \underline{\mathrm{Lip}}_{(v,\cdot)}(L_0(x) - L_2(x); -\lambda_2(x)), \tag{6}$$

$$F_3 \in \underline{\mathrm{Lip}}_{(w,\cdot)}(L_3(x); -\lambda_3(x)), \tag{7}$$

где L_i, λ_i, $L_0 - L_2 \in \mathbb{C}_+(I_a)$, $i = 1, 2, 3$.

Решение $y(x; x_0, y_0)$, $x \in I_{x_0}$, $(x_0, y_0) \in S$, $y(x_0; x_0, y_0) = y_0$, системы (1) назовем O-решением, если $\lim\limits_{x\to+0} \|y(x; x_0, y_0)\| = 0$, а соответствующую интегральную кривую $(x, y(x; x_0, y_0))$ — O-кривой.

Будем изучать локальное интегральное O-множество

$$\mathfrak{M} = \{(\bar{x}, \bar{y}) \in S: \lim_{x\to+0} \|y(x; \bar{x}, \bar{y})\| = 0\}, \tag{8}$$

образованное всеми интегральными O-кривыми системы (1).

В работах [1—5] асимптотика и структура локального интегрального O-множества (8) изучалась при различных предположениях в случае, когда $p = 0$. В статье [6] найдена асимптотика интегральных O-кривых, образующих $\mathfrak{M}$ в случае, когда $p \geqslant 1$.

2. Подмножество $\mathfrak{M}^* \subset \mathfrak{M}$ будем называть интегральным O-подмножеством, если $(x_0, y_0) \in \mathfrak{M}^* \Rightarrow (x, y(x; x_0, y_0)) \in \mathfrak{M}^*$ $\forall x \in I_{x_0}$.

Пусть $x_0 \in I_a$— фиксированное число. Рассмотрим интегральное O-подмножество

$$\mathfrak{M}_{x_0} = \{(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathfrak{M}: \bar{x} \in I_{x_0}, \ (x, y(x; \bar{x}, \bar{y}) \in \mathfrak{M} \ \forall x \in I_{x_0}\}. \tag{9}$$

Пусть $\Omega \subset S$ — некоторая область такая, что $(x, y) = (0, 0) \in \bar{\Omega}$ и $\forall \bar{x} \in I_{x_0} \Omega \cap \{x = \bar{x}\} \neq \varnothing$. Обозначим через $\mathfrak{M}(\Omega)$ максимальное интегральное O-подмножество в области Ω, образованное интегральными O-кривыми системы (1), определенными в интервале I_{x_0}.

Определение 1. *Область Ω назовем асимптотической воронкой для локального интегрального O-множества $\mathfrak{M}$, если $\mathfrak{M}(\Omega) \neq \varnothing$ и $\mathfrak{M}(\Omega) = \mathfrak{M}_{x_0}$.*

Определение 2. *Область Ω назовем локально-асимптотической воронкой для локального интегрального O-множества $\mathfrak{M}$, если $\mathfrak{M}(\Omega) \neq \varnothing$ и $\mathfrak{M}(\Omega) = \mathfrak{M}_{x_0}$.*

Рассмотрим область вида

$$\Omega = \{(x, y) \in S: x \in I_{x_0}, \ \|u\|^2 < h^2(x)(\|v\|^2 + \|w\|^2), \ \|w\| < l(x)\|v\|, \\ H_-(x) < \|v\| < H_+(x)\}, \tag{10}$$

для которой функции h, l, $H_\pm \in \mathbb{C}_+(I_{x_0})$ и удовлетворяют свойству

$$h(x), \ l(x), \ H_\pm(x) = o(1) \ \text{при} \ x \to +0. \tag{11}$$

Как следует из определения 1 и вида (10) области Ω, подходящий выбор функций h, l, $H_\pm$ позволяет установить асимптотику всех O-решений сингулярной системы (1), т. е. асимптотику локального интегрального O-множества (8). Локально-асимптотическая воронка (10) в силу определения 2 дает асимптотику лишь для некоторых O-решений системы (1), т. е. устанавливает локально асимптотику интегрального O-множества (8).

Полагаем в дальнейшем для $x \in I_{x_0}$

$$h(x) = \left[\int_x^a 2\left(\frac{\lambda_2(s)}{\alpha_2(s)} + \frac{\lambda_3(s)}{\alpha_3(s)}\right)\exp\int_x^s 2\,\frac{L_0(\tau) - L_2(\tau)}{\alpha_2(\tau)}\,d\tau ds\right]^{-1/2}, \qquad (12)$$

$$l(x) = \left[\int_x^a 2\,\frac{\lambda_2(s)}{\alpha_2(s)}\exp\int_x^s 2\,\frac{L_0(\tau) - L_2(\tau)}{\alpha_2(\tau)}\,d\tau ds\right]^{-1/2}, \qquad (13)$$

$$H_\pm(x) = c\exp\left(\pm\int_x^{x_0}\frac{3\lambda_2(s)\,l^2(s) + L_2(s) \mp L_0(s)}{\alpha_2(s)}\,ds\right). \qquad (14)$$

Очевидно, что $h(x) < l(x)$, $x \in I_{x_0}$, и при расходимости интеграла

$$\int_{+0}\frac{L_0(x) - L_2(x) - 3\lambda_2(x)\,l^2(x)}{\alpha_2(x)}\,dx = +\infty \qquad (15)$$

выполняются свойства (11).

Локальную асимптотику $\mathfrak{M}$ устанавливает следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть расходится интеграл* (15) *и* x_0 *настолько мало, что в интервале* I_{x_0} *выполняются неравенства*

$$\frac{L_1(x)}{\alpha_1(x)} + 2\frac{\lambda_1(x)}{\alpha_1(x)\,h^2(x)} + \frac{\lambda_2(x)}{\alpha_2(x)} + \frac{\lambda_3(x)}{\alpha_3(x)} < 2\,\frac{L_0(x) - L_2(x)}{\alpha_2(x)}, \qquad (16)$$

$$2\,\frac{L_0(x)}{\alpha_2(x)} + \frac{\lambda_2(x)}{\alpha_2(x)} + 2\,\frac{\lambda_3(x)}{\alpha_3(x)\,l^2(x)} < \frac{L_3(x)}{\alpha_3(x)}, \qquad (17)$$

$$L_2(x) + 3\lambda_2(x)\,l^2(x) < L_0(x). \qquad (18)$$

Тогда область (10) *является локально-асимптотической воронкой для* $\mathfrak{M}$, *причем* $\forall \bar{x} \in I_{x_0}\,\forall\,\|\bar{v}\| \in \mathcal{J}_c\,\forall\,\|\bar{w}\| < l(\bar{x})\,\|\bar{v}\|\,\exists\,\bar{u}$

$$(x, y(x; \bar{x}, \bar{y})) \in \mathfrak{M}(\Omega) \quad \forall x \in I_{\bar{x}}, \qquad (19)$$

где $\bar{y} = \mathrm{colon}(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия теоремы* 1. *Если в интервале* I_{x_0} *справедливы неравенства*

$$\frac{L_1(x) + 2\lambda_1(x)}{\alpha_1(x)} + 2\,\frac{\lambda_2(x)}{\alpha_2(x)} \leqslant \frac{L_0(x) - L_2(x)}{\alpha_2(x)}, \qquad (20)$$

$$\frac{L_1(x) + 2\lambda_1(x)}{\alpha_1(x)} + 2\,\frac{\lambda_3(x)}{\alpha_3(x)} \leqslant \frac{L_3(x)}{\alpha_3(x)}, \qquad (21)$$

то 1) *интегральное О-подмножество* $\mathfrak{M}(\Omega)$ *является* $(n-k+1)$-*мерным многообразием в локально-асимптотической воронке* Ω; 2) *интегральное О-многообразие* $\mathfrak{M}(\Omega)$ *представимо в виде*

$$u = h(x)\,g^{(1)}(x, v, w), \qquad (22)$$

где $g^{(1)} \in \mathbb{C}(\mathfrak{N})$, $\|g^{(1)}(x, v, w)\| < (\|v\|^2 + \|w\|^2)^{1/2}$,

$$\mathfrak{N} = \{(x, v, w) : x \in I_{x_0}, \|v\| \in \mathcal{J}_c, \|w\| \in \mathcal{J}_d\}. \qquad (23)$$

Теорема 3. *Пусть выполняются условия теоремы 2. Если сходится интеграл*

$$\int\limits_{+0} \frac{L_1(x) + 2\lambda_1(x)}{\alpha_1(x)}\, dx < +\infty, \tag{24}$$

то 1) *область* (10) *является асимптотической воронкой для локального интегрального О-множества* $\mathfrak{M}$; 2) $\dim \mathfrak{M}_{x_0} = n - k + 1$; 3) *интегральное О-многообразие* $\mathfrak{M}_{x_0}$ *представимо в виде*

$$u = g(x, v, w), \tag{25}$$

$$g \in \mathbb{C}(\mathfrak{N}), \quad \| g(x, 0, 0)\| \equiv 0, \tag{26}$$

и $\forall (x, v_1, w_1), (x, v_2, w_2) \in \mathfrak{N}$

$$\| g(x, v_2, w_2) - g(x, v_1, w_1)\| < h(x)(\|v_2 - v_1\|^2 + \|w_2 - w_1\|^2)^{1/2}, \tag{27}$$

где $\mathfrak{N}$ — *область* (23).

3. Доказательство теоремы 1. Полагаем $\xi_1(x) = \|u\|^2 - h^2(x)(\|v\|^2 + \|w\|^2)$, $\xi_2(x) = \|w\|^2 - l^2(x)\|v\|^2$, $\xi_3(x) = \|v\|^2 - c^2$.

Рассмотрим область $\Sigma = \{(x, y) \in S : x \in I_{x_0};\ \xi_i(x) < 0,\ i = 1, 2, 3;\ \|v\| > 0\}$ и множества $\partial\Sigma_i = \{(x, y) \in S : x \in I_{x_0};\ \xi_i(x) = 0,\ \xi_j(x) \leqslant 0,\ j \neq i,\ j = 1, 2, 3;\ \|v\| > 0\}$, $i = 1, 2, 3$.

Ввиду системы (1), учитывая (3), (4), (6), (7) и (17), находим

$$\frac{1}{2}\xi_1'(x)\,|_{\partial\Sigma_1} \leqslant (\|v\|^2 + \|w\|^2)\Big[-h'(x)h(x) + \frac{L_1(x)}{\alpha_1(x)}h^2(x) + \frac{\lambda_1(x)}{\alpha_1(x)} - \frac{L_0(x) - L_2(x)}{\alpha_2(x)}h^2(x) + \left(\frac{\lambda_2(x)}{\alpha_2(x)} + \frac{\lambda_3(x)}{\alpha_3(x)}\right)h^4(x) + \left(\frac{\lambda_2(x)}{\alpha_2(x)} + \frac{\lambda_3(x)}{\alpha_3(x)}\right)h^2(x).$$

Поскольку функция (12) является решением уравнения Бернулли

$$h' - \frac{L_0(x) - L_2(x)}{\alpha_2(x)}h - \left(\frac{\lambda_2(x)}{\alpha_2(x)} + \frac{\lambda_3(x)}{\alpha_3(x)}\right)h^3 = 0$$

и выполняется неравенство (16), то $\xi_1'(x)\,|_{\partial\Sigma_1} < 0$. Аналогично доказываются неравенства $\xi_2'(x)\,|_{\partial\Sigma_2} > 0$, $\xi_3'(x)\,|_{\partial\Sigma_3} > 0$.

Таким образом, множество $\Sigma_{sl} = \partial\Sigma_1 \setminus (\partial\Sigma_2 \cup \partial\Sigma_3)$ есть множество точек строгого выхода относительно системы (1) из области Σ при убывании x.

Для $\forall \bar{x} \in I_{x_0}\ \forall \|\bar{v}\| \in I_c \forall \|\bar{w}\| < l(\bar{x})\|\bar{v}\|$ граница $\Sigma_{sl} \cap R$ замкнутого шара $R = \{(\bar{x}, u, \bar{v}, \bar{w}) : \|u\| \leqslant h(\bar{x})(\|v\|^2 + \|w\|^2)^{1/2}$ в u-пространстве не является ретрактом для шара R, но является ретрактом для множества точек строгого выхода Σ_{sl}.

Применяя топологический принцип Важевского [7], убеждаемся в существовании $\bar{u}$, $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) \in \Sigma \cap R$, такого, что для решения $y(x; \bar{x}, \bar{y})$, $\bar{y} = \operatorname{colon}(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$, системы (1) справедливо

$$(x, y(x; \bar{x}, \bar{y})) \in \Sigma,\ x \in]\omega_-; \bar{x}], \tag{28}$$

где $]\omega_-; \bar{x}]$ — максимальный интервал существования рассматриваемого решения.

Поэтому при $x \in]\omega_-; \bar{x}]$ для решения $y(x; \bar{x}, \bar{y}) = \operatorname{colon}(u(x), v(x), w(x))$ выполняются неравенства

$$\|w(x)\| < l(x)\|v(x)\|, \quad \|u(x)\| < h(x)(1 + l^2(x))^{1/2}\|v(x)\|. \tag{29}$$

Учитывая (3), (5), (6) и (29), получаем

$$\frac{L_0(x) - L_2(x) - \lambda_2(x)(l^2(x) + h^2(x)(1 + l^2(x))}{\alpha_2(x)}\|v(x)\| \leqslant \frac{d\|v(x)\|}{dx} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{L_0(x) + L_2(x) + \lambda_2(x)(l^2(x) + h^2(x)(1 + l^2(x)))}{\alpha_2(x)}\|v(x)\|.$$

Поскольку $h(x) < l(x)$, а x_0 можно взять настолько малым, чтобы $l(x) < 1$, $x \in I_{x_0}$, то разделяя переменные x и $\|v\|$ в полученном неравенстве, интегрируя от $x (\leqslant x_0)$ до x_0, потенцируя, с учетом обозначений (14) находим

$$H_{-}(x) < \|v(x)\| < H_{+}(x). \tag{30}$$

На основании теоремы о продолжении решения [7] можно положить в силу (11) $\omega_{-} = 0$. Поэтому (19) следует из (29), (30) и определения области Σ. Теорема доказана.

4. Доказательство теоремы 2. На основании теоремы 1 $\forall \bar{x} \in I_{x_0} \forall \|\bar{v}\| \in \mathcal{I}_c \forall \|\bar{w}\| < l(\bar{x}) \|\bar{v}\| \exists \bar{u}$ такое, что $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) \in \mathfrak{M}(\Omega)$. Допустим, что существует $\bar{\bar{u}}$ такое, что $(\bar{x}, \bar{\bar{u}}, \bar{v}, \bar{w}) \in \mathfrak{M}(\Omega)$ и $\bar{\bar{u}} \neq \bar{u}$. Рассмотрим два O-решения системы (1) — $y(x; \bar{x}, \bar{y}) = \operatorname{colon}(u_1(x), v_1(x), w_1(x))$, $y(x, \bar{x}, \bar{\bar{y}}) = \operatorname{colon}(u_2(x), v_2(x), w_2(x))$, $\bar{y} = \operatorname{colon}(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$, $\bar{\bar{y}} = \operatorname{colon}(\bar{\bar{u}}, \bar{v}, \bar{w})$. Для этих решений справедливо

$$(x, y(x; \bar{x}, \bar{y})) \in \mathfrak{M}(\Omega), \quad (x, y(x; \bar{x}, \bar{\bar{y}})) \in \mathfrak{M}(\Omega), \quad x \in I_{\bar{x}}. \tag{31}$$

Введем функции

$$\begin{aligned} \theta_1(x) &= \|u_2(x) - u_1(x)\|^2 - \|v_2(x) - v_1(x)\|^2, \\ \theta_2(x) &= \|u_2(x) - u_1(x)\|^2 - \|w_2(x) - w_1(x)\|^2, \end{aligned} \tag{32}$$

для которых очевидны неравенства $\theta_1(\bar{x}) = \theta_2(\bar{x}) = \|\bar{\bar{u}} - \bar{u}\| > 0$. Полагаем

$$x_i^* = \inf\{x \in I_{\bar{x}} : \theta_i(s) > 0, \ s \in [x; \bar{x}]\} \geqslant 0, \quad i = 1, 2; \qquad x^* = \max(x_1^*, x_2^*). \tag{33}$$

В интервале $]x^*; \bar{x}]$ выполняются неравенства

$$\|v_2(x) - v_1(x)\| < \|u_2(x) - u_1(x)\|, \quad \|w_2(x) - w_1(x)\| < \|u_2(x) - u_1(x)\|. \tag{34}$$

Из условий (4), (6), (7), учитывая (20), (21) и (34), получаем для функций (32) в интервале $]x^*; \bar{x}]$ неравенства

$$\theta_1'(x) \leqslant 2 \frac{L_0(x) - L_2(x)}{\alpha_2(x)} \theta_1(x), \quad \theta_2'(x) \leqslant 2 \frac{L_2(x)}{L_2(x)} \theta_2(x). \tag{35}$$

Допустим, что $x^* > 0$. Тогда из (33) следует, что либо $\theta_1(x^*) = 0$, либо $\theta_2(x^*) = 0$. Интегрируя неравенства (35) от x^* до $\bar{x}$ и применяя известную лемму Гроноулла, убеждаемся, что либо $\theta_1(x) \equiv 0$, либо $\theta_2(x) \equiv 0$. Это противоречит условию $\theta_1(\bar{x}) = \theta_2(\bar{x}) = \|\bar{\bar{u}} - \bar{u}\|^2 > 0$.

Итак, неравенства (34) выполняются в интервале $I_{\bar{x}}$. Применяя (34), а также (4), находим

$$\frac{d\|u_2(x) - u_1(x)\|}{dx} \leqslant \frac{L_1(x) + 2\lambda_1(x)}{\alpha_1(x)} \|u_2(x) - u_1(x)\|.$$

По теореме о дифференциальных неравенствах [7] получаем

$$\|\bar{\bar{u}} - \bar{u}\| \exp \int_{x_0}^{x} \frac{L_1(s) + 2\lambda_1(s)}{\alpha_1(s)} ds \leqslant \|u_2(x) - u_1(x)\|, \quad x \in I_{\bar{x}}. \tag{36}$$

Из (31) и формул (10), (14) следует

$$\exp \int_{x}^{x_0} \left(\frac{L_0(s) - L_2(s) - 3\lambda_2(s) l^2(s)}{\alpha_2(s)} - \frac{L_1(s) + \lambda_1(s)}{\alpha_1(s)} \right) ds / h(x) \leqslant$$

$$\leqslant 2c(1 + l^2(x))^{1/2} / \|\bar{\bar{u}} - \bar{u}\|.$$

Возьмем x_0 настолько малым, чтобы $3l^2(x) < 2$. Тогда из (20) и свойства (11) функции h следует, что левая часть неравенства стремится к $+\infty$ при $x \to +0$, в то время как правая часть неравенства остается ограниченной. Полученное противоречие доказывает единственность значения $\bar{u}$ такого, что $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) \in \mathfrak{M}(\Omega)$. Обозначим $\bar{u} = g(\bar{x}, \bar{v}, \bar{w})$. Отображение $(x, v, w) \in \in \mathfrak{N} \to (x, g(x, v, w), v, w) \in \mathfrak{M}(\Omega)$ однозначно, непрерывно в силу интегральной непрерывности и имеет непрерывное обратное отображение, являющееся проекцией $\mathfrak{M}(\Omega) \to \mathfrak{N}$.

Таким образом, интегральное O-множество $\mathfrak{M}(\Omega)$ гомеоморфно $\mathfrak{N}$, т. е. является $(n-k+1)$-мерным интегральным многообразием в локально-асимптотической воронке Ω.

Из формулы (10) вытекает, что отображение $g^{(1)}(x, v, w) = g(x, v, w)/ /h(x)$ непрерывно и ограничено. Теорема доказана.

5. Доказательство теоремы 3 при предположении $(\bar{x}, \bar{\bar{u}}, \bar{v}, \bar{w}) \in \in \mathfrak{M}_{x_0}$ аналогично доказательству теоремы 2 до неравенства (36). Учитывая, что интеграл (24) сходится, на основании (36) заключаем, что $\| u_2(x) - - u_1(x) \| \not\to 0$ при $x \to +0$. Это противоречит предположению $(\bar{x}, \bar{\bar{u}}, \bar{v}, \bar{w}) \in \mathfrak{M}_{x_0}$.

Таким образом, $\mathfrak{M}(\Omega) = \mathfrak{M}_{x_0}$, и Ω является асимптотической воронкой.

Обозначим через $u = g(x, v, w)$ такой вектор, что $(x, g(x, v, w), v, w) \in \in \mathfrak{M}_{x_0}$. Гомеоморфизм $\mathfrak{M}_{x_0}$ и $\mathfrak{N}$ устанавливается так же, как и при доказательстве теоремы 2 для $\mathfrak{M}(\Omega)$ и $\mathfrak{N}$.

Итак, $\dim \mathfrak{M}_{x_0} = n - k + 1$, и интегральное O-многообразие $\mathfrak{M}_{x_0}$ представимо в виде (25), причем тождество (26) следует из (3).

Докажем справедливость условия Липшица (27). Пусть $(\bar{x}, v_1, w_1)$, $(\bar{x}, v_2, w_2) \in \mathfrak{N}$, $u_1 = g(\bar{x}, v_1, w_1)$. Пусть $y(x; \bar{x}, y_1) = \mathrm{colon}(u_1(x), v_1(x), w_1(x))$, $y_1 = \mathrm{colon}(u_1, v_1, w_1)$ является O-решением системы (1). Выполняя в (1) замену

$$u = \xi + u_1(x), \quad v = \zeta + v_1(x), \quad w = \eta + w_1(x), \tag{37}$$

получаем систему

$$\alpha_1(x) \frac{d\xi}{dx} = F_1(x, \xi + u_1(x), \zeta + v_1(x), \eta + w_1(x)) - F_1(x, u_1(x), v_1(x), w_1(x)) \equiv G_1(x, \xi, \zeta, \eta), \tag{38}$$

$$\alpha_2(x) \frac{d\zeta}{dx} = F_2(x, \xi + u_1(x), \zeta + v_1(x), \eta + w_1(x)) - F_2(x, u_1(x), v_1(x), w_1(x)) \equiv G_2(x, \xi, \zeta, \eta),$$

$$\alpha_3(x) \frac{d\eta}{dx} = F_3(x, \xi + u_1(x), \zeta + v_1(x), \eta + w_1(x)) - F_3(x, u_1(x), v_1(x), w_1(x)) = G_3(x, \xi, \zeta, \eta),$$

которая принадлежит классу $(\mathbb{C}(D), \mathrm{Un})$, где $D = \{(x, \xi, \zeta, \eta) : x \in I_a, \|\xi\| \in \mathcal{J}_{2b}, \|\zeta\| \in \mathcal{J}_{2c}, \|\eta\| \in \mathcal{J}_{2d}\}$. Очевидно, что $\| G_i(x, 0, 0, 0) \| \equiv 0$, $i = 1, 2, 3$. А из условий (4) — (7) следует

$$G_1 \in \overline{\mathrm{Lip}}_{(\xi, \cdot)}(L_1(x); \lambda_1(x)), \; G_2 \in \overline{\mathrm{Lip}}_{(\zeta, \cdot)}(L_0(x) + L_2(x); \lambda_2(x)),$$

$$G_2 \in \underline{\mathrm{Lip}}_{(\zeta, \cdot)}(L_0(x) - L_2(x); -\lambda_2(x)), \quad G_3 \in \underline{\mathrm{Lip}}_{(\eta, \cdot)}(L_3(x); -\lambda_3(x)),$$

В силу теоремы 2 для $\bar{x} \in I_{x_0}$, $\bar{\zeta} = v_2 - v_1$, $\eta_0 = w_2 - w_1$ существует единственное значение ξ_0 такое, что решение $\mathrm{colon}(\xi(x), \zeta(x), \eta(x))$ системы (38), удовлетворяющее начальным условиям $\xi(\bar{x}) = \xi_0$, $\zeta(\bar{x}) = \zeta_0$, $\eta(\bar{x}) = = \eta_0$, является O-решением, для которого справедливо неравенство $\|\xi(x)\| < < h(x)(\|\zeta(x)\|^2 + \|\eta(x)\|^2)^{1/2}$. Подставляя в это неравенство $x = \bar{x}$, находим

$$\|\xi_0\| < h(\bar{x})(\|v_2 - v_1\|^2 + \|w_2 - w_1\|^2)^{1/2}. \tag{39}$$