УДК 517.9

Я. С. Барис, О. Б. Лыкова

Об асимптотических разложениях инвариантных многообразий. I

1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений [1 — 4]

$$d\theta/dt = \omega + \mathcal{P}(\theta, h, \varepsilon), \quad dh/dt = Hh + Q(\theta, h, \varepsilon), \tag{1}$$

где ω — постоянный l-вектор, H — постоянная $n \times n$-матрица, ε — малый параметр. Полагаем, что правые части системы (1) определены и непрерывны на множестве

$$R^l \times R^n \tag{2}$$

при каждом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

Цель данной работы заключается в том, чтобы для системы (1) построить приближенное инвариантное многообразие ($M_{\text{пр}}$) [5, 6] и показать, что оно является асимптотическим разложением соответствующего инвариантного многообразия M этой системы.

Асимптотическим разложением функции $\varphi(\theta, \varepsilon)$ с точностью ε^k (или с точностью до порядка k) называется сумма [7]

$$\Phi(\theta, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{k} \varepsilon^i \varphi_i(\theta), \tag{3}$$

если выполняется предельное соотношение $\varepsilon^{-k} \| \varphi(\theta, \varepsilon) - \Phi(\theta, \varepsilon) \| \to 0$, $\varepsilon \to 0$. Согласно [8] асимптотическое разложение (3) будет называться равномерным, если это предельное соотношение выполняется равномерно относительно θ.

Будем строить $M_{\text{пр}}$ данной системы при следующих предположениях.

1°. Соответствующая (1) порождающая система

$$d\theta/dt = \omega + \mathcal{P}(\theta, h, 0), \quad dh/dt = Hh + Q(\theta, h, 0) \tag{4}$$

имеет инвариантное многообразие M_0, заданное непрерывно дифференцируемой вектор-функцией $h = \bar{\varphi}(\theta)$. Заметим, что в случае, когда $Q(\theta, 0, 0) = 0$, функция $h = 0$ будет задавать инвариантное многообразие системы (4).

2°. Вектор-функции $\tilde{\mathcal{P}} = \mathcal{P}(\theta, \varphi(\theta) + \varepsilon z, \varepsilon)$, $\tilde{Q} = Q(\theta, \varphi(\theta) + \varepsilon z, \varepsilon)$ допускают асимптотические разложения порядка $k + 1$: $\tilde{\mathcal{P}} = \sum_{i=0}^{k+1} \varepsilon^i \mathcal{P}_i(\theta, z) + o(\varepsilon^{k+1})$, $\tilde{Q} = \sum_{i=0}^{k+1} \varepsilon^i Q_i(\theta, z) + o(\varepsilon^{k+1})$, в которых коэффициенты $\mathcal{P}_1, Q_1$ не зависят от z. Если вектор-функции $\mathcal{P}(\theta, h, \varepsilon)$, $Q(\theta, h, \varepsilon)$ дифференцируемы по h в точке $(\theta, \bar{\varphi}, 0)$, то это означает, что $\mathcal{P}'_h(\theta, \bar{\varphi}, 0) = 0$, $Q'_h(\theta, \bar{\varphi}, 0) = 0$.

3°. Вещественные части собственных значений матрицы H отличны от нуля.

Согласно [5, 6] приближенным инвариантным многообразием с невязкой $(0, \varepsilon b)$ системы (1) является инвариантное многообразие системы

$$d\theta/dt = \omega + \mathcal{P}(\theta, h, \varepsilon), \quad dh/dt = Hh + Q(\theta, h, \varepsilon) + \varepsilon b. \tag{5}$$

Полагая в (5)

$$h = \bar{\varphi}(\theta) + \varepsilon z, \tag{6}$$

получаем систему уравнений

$$d\theta/dt = \omega + f(\theta, \varepsilon z, \varepsilon), \quad dz/dt = Hz + g(\theta, \varepsilon z, \varepsilon) + b, \tag{7}$$

где

$$f(\theta, \varepsilon z, \varepsilon) = \mathcal{P}(\theta, \bar{\varphi}(\theta) + \varepsilon z, \varepsilon), \quad \varepsilon g(\theta, \varepsilon z, \varepsilon) = Q(\theta, \bar{\varphi}(\theta) + \varepsilon z, \varepsilon) -$$

$$- Q(\theta, \bar{\varphi}(\theta), 0) - \frac{\partial \bar{\varphi}(\theta)}{\partial \theta}[\mathcal{P}(\theta, \bar{\varphi}(\theta) + \varepsilon z, \varepsilon) - \mathcal{P}(\theta, \bar{\varphi}(\theta), 0)]. \tag{8}$$

Вектор-функция $z = \Phi(\theta, \varepsilon)$ задает $M_{\text{пр}}$ системы

$$d\theta/dt = \omega + f(\theta, \varepsilon z, \varepsilon), \quad dz/dt = Hz + g(\theta, \varepsilon z, \varepsilon), \tag{9}$$

если она удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\omega + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\tilde{f} = H\Phi + \tilde{g} + b(\theta, \varepsilon), \tag{10}$$

где через $\tilde{f}$, $\tilde{g}$ обозначены функции f, g при $z = \Phi(\theta, \varepsilon)$; $(0, b(\theta, \varepsilon))$ — невязка искомого $M_{\text{пр}}$.

2. Будем искать решение уравнения (10) в виде (3). Из условия 2° следуют асимптотические разложения

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\theta, \varepsilon) &= f\left(\theta, \varepsilon \sum_{i=0}^{k} \varepsilon^i \varphi_i(\theta), \varepsilon\right) = \sum_{i=0}^{k} \varepsilon^i f_i(\theta) + R_k(\tilde{f}), \\ \tilde{g}(\theta, \varepsilon) &= g\left(\theta, \varepsilon \sum_{i=0}^{k} \varepsilon^i \varphi_i(\theta), \varepsilon\right) = \sum_{i=0}^{k} \varepsilon^i g_i(\theta) + R_k(\tilde{g}), \end{aligned} \tag{11}$$

где через $R_k(\tilde{f})$, $R_k(\tilde{g})$ обозначены остатки асимптотических разложений функций $\tilde{f}$, $\tilde{g}$, причем $f_i(\theta)$, $g_i(\theta)$ не зависят от φ_j при $j \geqslant i$. Подставляя разложения (3) и (11) в уравнение (10), получаем

$$\sum_{i=0}^{k} \varepsilon^i \left[\frac{\partial \varphi_i}{\partial \theta}\omega + \frac{\partial \varphi_i}{\partial \theta}\tilde{f}\right] = \sum_{i=0}^{k} \varepsilon^i H\varphi_i + \tilde{g} + b,$$

или

$$\sum_{i=0}^{k} \varepsilon^i \frac{\partial \varphi_i}{\partial \theta}\omega + \sum_{i=0}^{k} \varepsilon^i \left(\sum_{j+r=i} \frac{\partial \varphi_j}{\partial \theta} f_r(\theta)\right) + \sum_{i=0}^{k} \varepsilon^i \frac{\partial \varphi_i}{\partial \theta} R_k(\tilde{f}) = \sum_{i=0}^{k} \varepsilon^i H\varphi_i +$$

$$+ \sum_{i=0}^{k} \varepsilon^i g_i(\theta) + R_k(\tilde{g}) + b. \tag{12}$$

Приравнивая в (12) коэффициенты при одинаковых степенях ε^i, $i = 0, 1, \ldots, k$, получаем уравнения

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial \theta}\omega + \frac{\partial \varphi_i}{\partial \theta} f_0(\theta) = H\varphi_i + v_i, \tag{13}$$

где

$$v_i = g_i(\theta) - \sum_{\substack{j+r=i \\ r \neq 0}} \frac{\partial \varphi_j}{\partial \theta} f_r(\theta), \quad v_0 = g_0(\theta) = g(\theta, \bar{\varphi}(\theta), 0). \tag{14}$$

Приравнивая в (12) оставшиеся члены, находим выражение для определения невязки b:

$$b = R_k\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\tilde{f} - \tilde{g}\right), \tag{15}$$

откуда вытекает $b = o(\varepsilon^k)$, $\varepsilon \to 0$.

Из уравнений (13) следует, что функции φ_i задают инвариантные многообразия системы уравнений

$$d\theta/dt = \omega + f_0(\theta), \quad dz/dt = Hz + v_i(\theta), \ i = 0, 1, \ldots, k. \tag{16}$$

Вектор-функции φ_i находим по формуле

$$\varphi_i(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-s)\, v_i(\Psi(t-s, \theta))\, ds, \tag{17}$$

где $G(t-s)$ — функция Грина уравнения

$$dz/dt = Bz, \tag{18}$$

удовлетворяющая оценке $\| G(t-s) \| \leqslant Ne^{-\nu|t-s|}$, $\Psi(t-s, \theta)$ — решение задачи Коши

$$d\Psi/ds = \omega + f_0(\Psi), \quad \Psi|_{s=t} = \theta. \tag{19}$$

Определив φ_i, получим согласно формулам (3) и (6) представление $M_{\text{пр}}$ системы уравнений (1):

$$h = \overline{\varphi}(\theta) + \varepsilon \sum_{i=0}^{k} \varepsilon^i \varphi_i(\theta). \tag{20}$$

В результате можем сформулировать следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть относительно системы* (1) *выполняются условия* 1° — 3° *и формула* (17) *определяет непрерывно дифференцируемую вектор-функцию* $\varphi_i(\theta)$ *при каждом* $i = 0, 1, \ldots, k$.

Тогда система (1) *имеет приближенное инвариантное многообразие вида* (20) *с невязкой* $(0, \varepsilon\, b)$, *где* b *определяется формулой* (15).

Таким образом, для построения $M_{\text{пр}}$ системы (1) требуется выполнить следующую процедуру.

1. Проверить выполнение условий 1° — 3°.
2. Определить вектор-функции f, g посредством соотношений (8).
3. Представить функции $\tilde{f}$, $\tilde{g}$ в виде асимптотических разложений (11).
4. Найти функции v_i согласно формулам (14).
5. Построить функцию Грина уравнения (18) и решить задачу Коши (19).
6. Определить функции φ_i по формулам (17) и убедиться, что они являются непрерывно дифференцируемыми функциями.

Тогда $M_{\text{пр}}$ системы (1) задается равенством (20), а функция b, определяющая невязку $(0, \varepsilon\, b)$, — выражением (15).

Построение $M_{\text{пр}}$ в виде многочлена k-й степени относительно ε приводит к асимптотическому разложению инвариантного многообразия M с точностью ε^k. Однако на практике часто бывает достаточно ограничиться построением $M_{\text{пр}}$ в виде многочлена первой или второй степени, что дает асимптотические разложения M с точностью до порядка ε или ε^2 соответственно. Так, чтобы построить $M_{\text{пр}}$ системы (1) в виде многочлена первой степени, следует:

1. Найти инвариантное многообразие $M_0 : h = \overline{\varphi}(\theta)$ порождающей системы (4).
2. Посредством замены (6) привести исходную систему к виду (9).
3. Найти инвариантное многообразие $z = \varphi_0(\theta)$ соответствующей (9) порождающей системы ($\varepsilon = 0$).

Тогда искомое $M_{\text{пр}}$ системы (1) определяется формулой $y = \overline{\varphi}(\theta) + \varepsilon\varphi_0(\theta)$, а его невязка $(0, \varepsilon b)$ — формулой $b = R_1\left[\dfrac{\partial\varphi_0}{\partial\theta} f(\theta, \varepsilon\varphi_0, \varepsilon) - g(\theta, \varepsilon\varphi_0, \varepsilon)\right]$.

Чтобы построить $M_{\text{пр}}$ системы (1) в виде многочлена второй степени относительно ε, следует:

1. Ввести в системе (9) замену $z=\varphi_0(\theta)+\varepsilon w$.

2. Положив в полученной системе $\varepsilon=0$, прийти к рассмотрению системы (16) при $i=1$:

$$d\theta/dt=\omega+f(\theta,0,0),\quad dw/dt=Hw+g_1(\theta)-\frac{\partial\varphi_0}{\partial\theta}f_1(\theta),$$

где f_1, g_1 определяются формулами

$$f_1(\theta)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(\theta,\varepsilon\varphi_0,\varepsilon)-f(\theta,0,0)}{\varepsilon},\quad g_1(\theta)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{g(\theta,\varepsilon\varphi_0,\varepsilon)-g(\theta,0,0)}{\varepsilon},$$

и найти для этой системы инвариантное многообразие $w=\varphi_1(\theta)$.

Тогда искомое $M_{\text{пр}}$ системы (1) определится формулой $y=\bar\varphi(\theta)+\varepsilon\varphi_0(\theta)+\varepsilon^2\varphi_1(\theta)$, а его невязка $(0,\varepsilon b)$ — формулой $b=R_2[(\partial\varphi_0/\partial\theta+\varepsilon\partial\varphi_1/\partial\theta)f(\theta,\varepsilon\varphi_0+\varepsilon^2\varphi_1,\varepsilon)-g(\theta,\varepsilon\varphi_0+\varepsilon^2\varphi_1,\varepsilon)]$.

3. Обоснование развитого алгоритма сводится к доказательству существования инвариантного многообразия системы (1) и к оценке отклонения построенного приближенного инвариантного многообразия от инвариантного многообразия данной системы.

Предположим, что относительно системы (1) выполнено условие 1° и, следовательно, известно инвариантное многообразие $M_0: h=\bar\varphi(\theta)$ порождающей системы. Тогда вопрос о существовании инвариантного многообразия M системы (1) сводится к вопросу о существовании инвариантного многообразия системы (9).

Обозначим через $C_\rho(\eta)$ множество непрерывных на R^l при каждом $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ вектор-функций $\varphi(\theta,\varepsilon)$ со значениями в шаре $\|z\|\leqslant\rho$ пространства R^n, удовлетворяющих условию Липшица $\|\varphi(\bar\theta,\varepsilon)-\varphi(\theta,\varepsilon)\|\leqslant\eta\|\bar\theta-\theta\|$, где ρ,η — некоторые положительные постоянные. Расстояние на $C_\rho(\eta)$ определим нормой $|\cdot|=\sup\|\cdot\|$. Тогда $C_\rho(\eta)$ — полное метрическое пространство. Будем полагать, что вектор-функции f, g в системе (7) удовлетворяют условию Липшица относительно $\theta, \varepsilon z$ с постоянными Λ и $\mathscr{L}$ соответственно:

$$\|f(\bar\theta,\varepsilon\bar z,\varepsilon)-f(\theta,\varepsilon z,\varepsilon)\|\leqslant\Lambda(\|\bar\theta-\theta\|+\varepsilon\|\bar z-z\|),\tag{21}$$
$$\|g(\bar\theta,\varepsilon\bar z,\varepsilon)-g(\theta,\varepsilon z,\varepsilon)\|\leqslant\mathscr{L}(\|\bar\theta-\theta\|+\varepsilon\|\bar z-z\|),$$

а также выполняется неравенство

$$\|g(\theta,0,\varepsilon)\|\leqslant\mu.\tag{22}$$

Установим условия существования инвариантного многообразия системы (9) $M: z=\varphi(\theta,\varepsilon)$, $\varphi\in C_\rho(\eta)$. Для этого рассмотрим задачу Коши $d\theta/dt=\omega+f(\theta,\varepsilon\varphi(\theta,\varepsilon),\varepsilon)$, $\theta|_{s=t}=\xi$, где $\varphi\in C_\rho(\eta)$. В силу свойств вектор-функции f эта задача Коши имеет единственное на R решение $\theta=\Psi(t-s,\xi/\varphi)$. Вопрос о существовании инвариантного многообразия системы (9) сводится к вопросу о существовании неподвижной точки отображения S, определяемого равенством

$$S\varphi(\theta,\varepsilon)=\int_{-\infty}^{\infty}G(t-s)g(\Psi,\varepsilon\varphi(\Psi,\varepsilon),\varepsilon)ds,$$

где $\varphi\in C_\rho(\eta)$, $\Psi=\Psi(t-s,\theta/\varphi)$. Оценим $\|S\varphi(\theta,\varepsilon)\|$, $\|S\varphi(\bar\theta,\varepsilon)-S\varphi(\theta,\varepsilon)\|$, $\|S\bar\varphi(\theta,\varepsilon)-S\varphi(\theta,\varepsilon)\|$.

Так как $\|g(\Psi,\varepsilon\varphi(\Psi,\varepsilon),\varepsilon)\|\leqslant\|g(\Psi,\varepsilon\varphi(\Psi,\varepsilon),\varepsilon)-g(\Psi,0,\varepsilon)\|+\|g(\Psi,0,\varepsilon)\|$, то, принимая во внимание свойства функции Грина $G(t-s)$ уравнения (18), можем написать

$$\|S\varphi\|\leqslant(\mathscr{L}\varepsilon\rho+\mu)\int_{-\infty}^{\infty}Ne^{-\nu|t-s|}ds\leqslant\frac{2N}{\nu}(\mathscr{L}\varepsilon\rho+\mu).\tag{23}$$

Установим теперь неравенство

$$\| S\varphi(\bar{\theta}, \varepsilon) - S\varphi(\theta, \varepsilon) \| \leqslant \eta \| \bar{\theta} - \theta \|.$$

Имеем

$$S\varphi(\bar{\theta}, \varepsilon) - S\varphi(\theta, \varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-s) [g(\bar{\Psi}, \varepsilon\varphi(\bar{\Psi}, \varepsilon), \varepsilon) - g(\Psi, \varepsilon\varphi(\Psi, \varepsilon), \varepsilon] \, ds,$$

где $\bar{\Psi} = \Psi(s-t, \bar{\theta}/\varphi)$. Отсюда получаем

$$\| S\varphi(\bar{\theta}, \varepsilon) - S\varphi(\theta, \varepsilon) \| \leqslant \mathscr{L}N(1 + \varepsilon\eta) \int_{+\infty}^{\infty} e^{-\nu|t-s|} \| \bar{\Psi} - \Psi \| \, ds, \qquad (24)$$

где $\bar{\Psi} = \Psi(s-t, \bar{\theta}/\mu)$. Оценим теперь разность $\bar{\theta}_t - \theta_t$:

$$\bar{\theta}_t - \theta_t = \bar{\xi} - \xi + \int_{\tau}^{t} [f(\bar{\theta}_s, \varepsilon\varphi(\bar{\theta}_s, \varepsilon), \varepsilon) - f(\theta_s, \varepsilon\varphi(\theta_s, \varepsilon), \varepsilon)] \, ds.$$

Принимая во внимание неравенство $\| f(\bar{\theta}_s, \varepsilon\varphi(\bar{\theta}_s, \varepsilon), \varepsilon) - f(\theta_s, \varepsilon\varphi(\theta_s, \varepsilon), \varepsilon) \| \leqslant \Lambda [\| \bar{\theta}_s - \theta_s \| + \varepsilon \| \varphi(\bar{\theta}_s, \varepsilon) - \varphi(\theta_s, \varepsilon) \|] \leqslant \Lambda (1 + \varepsilon\eta) \| \bar{\theta}_s - \theta_s \|$, при $t \geqslant \tau$ получаем

$$\| \bar{\theta}_t - \theta_t \| \leqslant \| \bar{\xi} - \xi \| + (1 + \varepsilon\eta) \Lambda \int_{\tau}^{t} \| \bar{\theta}_s - \theta_s \| \, ds.$$

Применяя неравенство Гронуолла — Беллмана, находим

$$\| \bar{\theta}_t - \theta_t \| \leqslant \| \bar{\xi} - \xi \| e^{(1+\varepsilon\eta)\Lambda|t-\tau|}.$$

Аналогичное неравенство получаем при $t \leqslant \tau$. Поэтому имеем

$$\| \bar{\Psi} - \Psi \| \leqslant \| \bar{\theta} - \theta \| e^{(1+\varepsilon\eta)|t-s|}.$$

Предположим, что выполняется неравенство

$$(1 + \varepsilon\eta) \Lambda < \nu. \qquad (25)$$

Тогда из неравенства (24) следует неравенство

$$\| S\varphi(\bar{\theta}, \varepsilon) - S\varphi(\theta, \varepsilon) \| \leqslant N\mathscr{L}(1 + \varepsilon\eta) \| \bar{\theta} - \theta \| \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} e^{[(1+\varepsilon\eta)\Lambda - \nu]|t-s|} \, ds \leqslant \frac{2N\mathscr{L}(1 + \varepsilon\eta)}{\nu - (1 + \varepsilon\eta)\Lambda} \| \bar{\theta} - \theta \|. \qquad (26)$$

Далее из соотношения

$$S\bar{\varphi}(\theta, \varepsilon) - S\varphi(\theta, \varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-s) [g(\bar{\Psi}, \varepsilon\bar{\varphi}(\bar{\Psi}, \varepsilon), \varepsilon) - g(\Psi, \varepsilon\varphi(\Psi, \varepsilon), \varepsilon)] \, ds$$

с помощью аналогичных рассуждений получаем

$$\| S\bar{\varphi}(\theta, \varepsilon) - S\varphi(\theta, \varepsilon) \| \leqslant \mathscr{L} \| \bar{\varphi} - \varphi \| \int_{-\infty}^{\infty} \| G(t-s) \| e^{\Lambda(1+\varepsilon\eta)|t-s|} \, ds \leqslant$$

$$\leqslant \mathscr{L}N\varepsilon \| \bar{\varphi} - \varphi \| \int_{-\infty}^{\infty} e^{[\Lambda(1+\varepsilon\eta) - \nu]|t-s|} \, ds = \frac{2N\mathscr{L}\varepsilon}{\nu - \Lambda(1 + \varepsilon\eta)} \| \bar{\varphi} - \varphi \|. \qquad (27)$$

Пусть при всех положительных значениях $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ существуют такие $\rho = \rho(\varepsilon) > 0$ и $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$, что выполняются неравенства

$$2N(\mathscr{L}\varepsilon\rho + \mu) \leqslant \nu\rho, \quad 2N\mathscr{L}(1 + \varepsilon\eta) \leqslant \eta[\nu - (1 + \varepsilon\eta)\Lambda]. \qquad (28)$$

Тогда, очевидно, выполняется неравенство (25). Для этих ρ, η из (23) и (26) получаем $\| S\varphi \| \leqslant \rho$, $\| S\varphi(\bar{\theta}, \varepsilon) - S\varphi(\theta, \varepsilon) \| \leqslant \eta \| \bar{\theta} - \theta \|$, откуда следует, что отображение S переводит множество $C_\rho(\eta)$ в себя: $S: G_\rho(\eta) \to \to C_\rho(\eta)$. Второе из неравенств (28) можно представить в виде $\frac{2\mathscr{L}N\varepsilon}{\nu - \Lambda(1+\varepsilon\eta)} \leqslant 1 - \frac{2\mathscr{L}N}{[\nu - \Lambda(1+\varepsilon\eta)]\eta}$. Отсюда и из (27) вытекает, что $\| S\overline{\varphi} - S\varphi \| \leqslant q | \overline{\varphi} - \varphi |$, $q < 1$. Следовательно, это отображение имеет неподвижную точку $\varphi(\theta, \varepsilon) \in C_\rho(\eta)$.

График функции φ является инвариантным многообразием системы (9). Итак, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть относительно системы* (1) *выполняются условия* 1°, 3° *теоремы* 1, *а также следующие условия:*

а) *вектор-функции* f, g *удовлетворяют условию Липшица* (21), *и имеет место неравенство* (22);

б) *при некоторых* $\rho(\varepsilon)$, $\eta(\varepsilon)$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, *выполняются неравенства* (28).

Тогда для каждого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *система уравнений* (1) *имеет инвариантное многообразие*

$$M: h = \overline{\varphi}(\theta) + \varepsilon\varphi(\theta, \varepsilon), \quad \varphi \in C_\rho(\eta). \tag{29}$$

Замечание 1. Из доказательства теоремы видно, что достаточно выполнения условий этой теоремы не при всех $z \in R^n$, а при z из любой открытой области $U \subset R^n$, содержащей шар $\| z \| \leqslant \rho$.

4. Оценка отклонения приближенного инвариантного многообразия $M_{\text{пр}}$ системы (1) от инвариантного многообразия M сводится к оценке разности $\varphi - \Phi$. Из того, что φ — неподвижная точка отображения S, следует

$$\varphi(\theta, \varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-s)\, g(\Psi, \varepsilon\varphi(\Psi, \varepsilon), \varepsilon)\, ds. \tag{30}$$

Из того, что вектор-функция $\Phi(\theta, \varepsilon)$ задает приближенное инвариантное многообразие системы (9), следует

$$\Phi(\theta, \varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-s)\, [g(\tilde{\Psi}, \varepsilon\Phi(\tilde{\Psi}, \varepsilon), \varepsilon) + b(\tilde{\Psi}, \varepsilon)]\, ds,$$

где $\tilde{\Psi} = \Psi(t-s, \theta/\Phi)$. Вычитая это равенство из (30), получаем соотношение для $\varphi(\theta, \varepsilon) - \Phi(\theta, \varepsilon)$, оценивая которое, находим

$$| \varphi - \Phi | \leqslant (1-q)^{-1} \frac{2N}{\nu} \sup_{\theta} \| b \|, \tag{31}$$

где $q = \frac{2N\mathscr{L}\varepsilon}{\nu - \Lambda(1+\varepsilon\eta)} < 1$.

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть относительно системы* (1) *выполняются условия теорем* 1, 2. *Тогда имеет место оценка* (31), *характеризующая отклонение приближенного инвариантного многообразия* $h = \overline{\varphi}(\theta) + \varepsilon\Phi(\theta, \varepsilon)$ *от инвариантного многообразия* $h = \overline{\varphi}(\theta) + \varepsilon\varphi(\theta, \varepsilon)$. *При этом если функция* $b(\theta, \varepsilon)$, *характеризующая невязку, равномерно ограничена, то приближенное инвариантное многообразие является равномерным асимптотическим разложением инвариантного многообразия с точностью до порядка* ε^k.

Замечание 2. Мы не предполагали, что $\Phi \in C_\rho(\eta)$. Если дополнительно предположить, что $\Phi \in C_\rho(\eta)$, то доказательство теоремы 3 легко следует из равенства $\varphi(\theta, \varepsilon) - \Phi(\theta, \varepsilon) = S\varphi - S\Phi - \int_{-\infty}^{\infty} G(t-s)\, b(\tilde{\Psi}, \varepsilon) ds$ и того факта, что S — сжимающее отображение, заданное на $C_\rho(\eta)$.

Проиллюстрируем доказанные теоремы на примере системы вида

$$d\theta/dt = 1 + \varepsilon y, \quad dy/dt = -y + \varepsilon\cos\theta. \tag{32}$$

Соответствующая (32) порождающая система $d\theta/dt = 1$, $dy/dt = -y$ имеет инвариантное многообразие $\bar{\varphi} = 0$. Замена типа (6) приводит систему (32) к виду

$$d\theta/dt = 1 + \varepsilon^2 z, \quad dz/dt = -z + \cos\theta. \tag{33}$$

Соответствующая (33) порождающая система $d\theta/dt = 1$, $dz/dt = -z + \cos\theta$ имеет инвариантное многообразие $M_0 : \varphi_0 = \frac{1}{2}(\cos\theta + \sin\theta)$. Тогда $M_{пр}$ системы (32) с невязкой $(0, \varepsilon b)$ имеет вид $M_{пр} : y = \frac{\varepsilon}{2}(\cos\theta + \sin\theta)$, где согласно (15) $b = \varepsilon^2 \frac{\partial\varphi_0}{\partial\theta}\varphi_0 = \frac{\varepsilon^2}{4}\cos 2\theta$.

Применив к системе (33) теорему 2, установим существование инвариантного многообразия этой системы. Для этого проверим выполнение условий теоремы 2. Условия $1^\circ - 3^\circ$, очевидно, выполняются.

Функции $f = \varepsilon^2 z$, $g = \cos\theta$ в правой части системы (33) удовлетворяют условию Липшица $|f(\bar{\theta}, \bar{z}, \varepsilon) - f(\theta, z, \varepsilon)| \leqslant \varepsilon^2 |\bar{z} - z|$, $|g(\bar{\theta}, \bar{z}, \varepsilon) - g(\theta, z, \varepsilon)| \leqslant |\bar{\theta} - \theta|$. Неравенство (22) имеет вид $|\cos\theta| = 1$. Таким образом, в рассматриваемом случае $\Lambda = \varepsilon^2$, $\mathscr{L} = 1$, $\mu = 1$. Проверим выполнение неравенств (28), определив тем самым ρ, η, ε_0. Имеем

$$2(\varepsilon\rho + 1) \leqslant \rho, \quad 2(1 + \varepsilon\eta) \leqslant \eta[1 - (1 + \varepsilon\eta)\varepsilon^2]. \tag{34}$$

Найдем функции $\rho(\varepsilon)$, $\eta(\varepsilon)$, удовлетворяющие неравенствам (34). Согласно первому из неравенств (34) можно положить

$$\rho(\varepsilon) = \frac{2}{1 - 2\varepsilon}. \tag{35}$$

Второе из неравенств (34) можно представить в виде

$$\varepsilon^3\eta^2 - (1 - 2\varepsilon - \varepsilon^2)\eta + 2 \leqslant 0. \tag{36}$$

Нули левой части этого неравенства можно определить равенствами $\eta_\pm(\varepsilon) = \frac{4}{1 - 2\varepsilon - \varepsilon^2 \mp \sqrt{(1 - 2\varepsilon - \varepsilon^2)^2 - 8\varepsilon^3}}$. Чтобы η_+, η_- были вещественными, достаточно положить $0 < \varepsilon \leqslant 0{,}3$.

Очевидно, что функция

$$\eta(\varepsilon) = \frac{4}{1 - 2\varepsilon - \varepsilon^2} \tag{37}$$

удовлетворяет двойному неравенству $\eta_-(\varepsilon) \leqslant \eta(\varepsilon) \leqslant \eta_+(\varepsilon)$, следовательно, удовлетворяет также второму из неравенств (34) при

$$0 < \varepsilon \leqslant 0{,}3. \tag{38}$$

Итак, функции $\rho(\varepsilon)$, $\eta(\varepsilon)$ определены равенствами (35) и (37) при всех значениях ε, удовлетворяющих неравенству (38).

Для построения отклонения $M_{пр}$ от M системы (32) воспользуемся теоремой 3. Согласно неравенству (31) имеем

$$|\varphi - \varphi_0| \leqslant (1 - q)^{-1}\frac{\varepsilon^2}{2}. \tag{39}$$

Так как $q = \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon^2(1 + \varepsilon\eta)} \leqslant \varepsilon$, то $(1 - q)^{-1} \leqslant (1 - \varepsilon)^{-1}$. Следовательно, неравенство (39) может быть представлено в виде $|\varphi - \varphi_0| \leqslant (1 - \varepsilon)^{-1}\frac{\varepsilon^2}{2}$. Принимая во внимание замену $y = \varepsilon z$, получаем искомую оценку $|\varepsilon\varphi -$

$- \varepsilon\Phi | \leqslant (1-\varepsilon)^{-1} \frac{\varepsilon^2}{2}$. Таким образом, мы получили равномерное асимптотическое разложение $y = \frac{1}{2}\varepsilon(\cos\theta + \sin\theta) + o(\varepsilon)$, $\varepsilon \to 0$, инвариантного многообразия системы (32).

1. *Боголюбов Н. Н.* О некоторых статистических методах в математической физике.— Львов: Изд-во АН УССР, 1945.— 137 с.
2. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М. : Физматгиз, 1963.— 407 с.
3. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике.— Киев : Наук. думка, 1967.— 350 с.
4. *Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия в нелинейной механике.— М. : Наука, 1973.— 512 с.
5. *Барис Я. С., Лыкова О. Б.* Приближенные интегральные многообразия систем дифференциальных уравнений.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1979.— 19 с.
6. *Барис Я. С., Лыкова О. Б.* О приближенных интегральных многообразиях систем нелинейных дифференциальных уравнений.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1980.— 31 с.
7. *Бурбаки Н.* Функции действительного переменного.— М. : Наука, 1965.— 124 с.
8. *Найфэ А.* Методы возмущений.— М. : Мир, 1976.— 456 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 23.02.87