УДК 517.948.35

В. Е. Слюсарчук

Слабо нелинейные возмущения нормально разрешимых функционально-дифференциальных и дискретных уравнений

Известно [1 — 4], что область значений широкого класса регулярных c-непрерывных операторов устойчива по отношению к c-непрерывным достаточно малым на бесконечности нелинейным возмущениям. Покажем, что это свойство сохраняется и в случае c-непрерывных операторов с замкнутой областью значений и с ядром, обладающим замкнутым дополнительным подпространством.

1. Функционально-дифференциальные уравнения. Будем придерживаться следующих обозначений: E — конечномерное B-пространство с нормой $\|\cdot\|_E$, C^0 — B-пространство ограниченных и непрерывных на $R = (-\infty, \infty)$ E-значных функций $x = x(t)$ с нормой $\|x\|_{C^0} = \sup\limits_{t\in R}\|x(t)\|_E$, C^1 — B-пространство функций $x = x(t) \in C^0$, для которых $dx/dt \in C^0$, с нормой $\|x\|_{C^1} = \|x\|_{C^0} + \|dx/dt\|_{C^0}$, $[X, Y]$ — B-пространство линейных непрерывных операторов $A: X \to Y$ с нормой $\|A\|_{[X,Y]} = \sup\{\|Ax\|_Y : \|x\|_X = 1\}$ (X и Y — B-пространства).

Оператор $B \in [C^p, C^0]$ (здесь $p \in \{0, 1\}$) называется c-непрерывным, если для каждых $\varepsilon > 0$ и $T > 0$ найдутся $\delta > 0$ и $Q > 0$ такие, что $\|(Bx)(t)\|_E < \varepsilon\ \forall\, t \in [-T, T]$, если $\|x\|_{C^p} \leqslant 1$ и $\|x(t)\|_E + p\left\|\dfrac{d^p x(t)}{dt^p}\right\|_E < \delta\ \forall\, t \in [-Q, Q]$ (здесь $d^0x(t)/dt^0$ обозначает $x(t)$).

Непрерывный на C^0 нелинейный оператор $N: C^0 \to C^0$ называется c-непрерывным, если:

1) $\sup\limits_{\|x\|_{C^0}\leqslant r}\|Nx\|_{C^0} < \infty\ \forall\, r > 0$;

2) для каждых чисел $r > 0$, $\varepsilon > 0$, $T > 0$ найдутся числа $\delta > 0$ и $Q > 0$ такие, что $\|(Nx_1)(t) - (Nx_2)(t)\|_E < \varepsilon\ \forall\, t \in [-T, T]$, если $\|x_i\|_{C^0} \leqslant r$, $i = \overline{1, 2}$, и $\|x_1(t) - x_2(t)\|_E < \delta\ \forall\, t \in [-Q, Q]$.

Рассмотрим функционально-дифференциальное уравнение $(d/dt + A)x + Nx = f$, где A — c-непрерывный элемент пространства $[C^0, C^0]$, $N: C^0 \to C^0$ — c-непрерывный оператор, для которого $l = \overline{\lim\limits_{r\to+\infty}}\sup\limits_{\|x\|_{C^0}\leqslant r}\|Nx\|_{C^0}(\|x\|_{C^0} + 1)^{-1} < \infty$ и $f \in C^0$.

Теорема 1. *Пусть*: 1) $R(d/dt + A)$ *замкнуто*; 2) $\operatorname{Ker}(d/dt + A)$ *обладает замкнутым дополнительным подпространством*; 3) $R(N) \subset R(d/dt + A)$; 4) l — *достаточно малое число. Тогда* $R(d/dt + A + N) = R(d/dt + A)$.

Доказательство. Запишем C^1 в виде прямой суммы $C^1 = \operatorname{Ker}\left(\dfrac{d}{dt} + A\right) \oplus X$, где X — замкнутое дополнительное подпространство к $\operatorname{Ker}(d/dt + A)$.

Возьмем произвольные $f \in R(d/dt + A)$ и $v \in \operatorname{Ker}(d/dt + A)$. Для каждого натурального n определим оператор $P_n \in [C^0, C^0]$ равенством $(P_nx)(t) = \beta_n(t)x(t)$, $t \in R$, где

$$\beta_n(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } |t| \leqslant n, \\ n + 1 - |t|, & \text{если } |t| \in (n, n+1), \\ 0, & \text{если } |t| \geqslant n + 1. \end{cases}$$

Рассмотрим уравнение

$$Bu + NP_n(u + v) = f, \tag{1}$$

где B — сужение оператора $d/dt + A$ на подпространство X. Оператор $B \in [X, R(d/dt + A)]$ имеет непрерывный обратный B^{-1}, поскольку $R(B) =$

$= R(d/dt + A)$ и $(\operatorname{Ker} B) \cap X = \{0\}$. Поэтому уравнение (1) эквивалентно уравнению $u = \mathfrak{A}_n u$, где $\mathfrak{A}_n : C^0 \to X$ — оператор, определенный равенством $\mathfrak{A}_n x = -B^{-1} N P_n (x + v) + B^{-1} f$.

Пусть фигурирующее в формулировке доказываемой теоремы число l удовлетворяет условию $l \| B^{-1} \|_{[R(d/dt+A), X]} < 1$. Тогда найдется число $r > 0$ такое, что

$$\sup_{\|x\|_{C^0} \leqslant r} \| \mathfrak{A}_n x \|_{C^1} \leqslant r \quad \forall n \geqslant 1. \tag{2}$$

Из ограничений на N следует, что оператор $NP_n : C^0 \to C^0$ является непрерывным оператором. Сужение этого оператора на подпространство X является компактным оператором (в силу теоремы Арцела [5]). Поэтому сужения операторов $\mathfrak{A}_n$, $n \geqslant 1$, на подпространство X также являются компактными операторами. Тогда на основании (2) и теоремы Шаудера [6] найдутся такие $u_n \in X$, $n \geqslant 1$, что

$$u_n = \mathfrak{A}_n u_n \quad \forall n \geqslant 1 \tag{3}$$

и

$$\| u_n \|_{C^1} \leqslant r \quad \forall n \geqslant 1. \tag{4}$$

Итак, согласно (1) и (3)

$$du_n/dt + Au_n + NP_n (u_n + v) = f \quad \forall n \geqslant 1. \tag{5}$$

Не ограничивая общности доказательства, на основании (4) и теоремы Арцела [5] можно считать, что

$$\lim_{n,m \to \infty} \sup_{|t| \leqslant T} \| u_n(t) - n_m(t) \|_E = 0 \quad \forall T > 0. \tag{6}$$

Отсюда с учетом (5) и c-непрерывности операторов A и N следует

$$\lim_{n,m \to \infty} \sup_{|t| \leqslant T} \| du_n(t)/dt - du_m(t)/dt \|_E = 0 \quad \forall T > 0.$$

Поэтому на основании (4) и (6) существует функция $z = z(t) \in C^1$, для которой

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{|t| \leqslant T} (\| z(t) - u_n(t) \|_E + \| dz(t)/dt - du_n(t)/dt \|_E) = 0 \quad \forall T > 0.$$

Из последнего соотношения, соотношения (5) и c-непрерывности операторов $d/dt + A$ и N получаем $(d/dt + A) z + N(z + v) = f$. Поскольку $v \in \operatorname{Ker}(d/dt + A)$, то $(d/dt + A + N)(z + v) = f$ и, следовательно, $R(d/dt + A + N) = R(d/dt + A)$ (в силу произвольности выбора f). Теорема 1 доказана.

Замечание 1. $\operatorname{Ker}(d/dt + A)$ обладает замкнутым дополнительным подпространством, если, например, $\dim \operatorname{Ker}(d/dt + A) < \infty$ [7]. Это условие всегда выполняется для обыкновенных дифференциальных уравнений, поскольку $\dim \operatorname{Ker}(d/dt + A) \leqslant \dim E$.

2. Дискретные уравнения. Приведем дискретный аналог теоремы 1. Пусть M — произвольное счетное множество, $\mathfrak{M}$ — B-пространство ограниченных на M E-значных функций $x = x(g)$ с нормой $\| x \|_{\mathfrak{M}} = \sup_{g \in M} \| x(g) \|_E$, $\mathfrak{S}$ — множество всех конечных подмножеств множества M.

Оператор $A \in [\mathfrak{M}, \mathfrak{M}]$ называется c-непрерывным, если для произвольных $\varepsilon > 0$ и $P \in \mathfrak{S}$ найдутся $\delta > 0$ и $Q \in \mathfrak{S}$ такие, что $\|(Ax)(g)\|_E < \varepsilon \; \forall g \in P$, если $\| x \|_{\mathfrak{M}} \leqslant 1$ и $\| x(g) \|_E < \delta \; \forall g \in Q$.

Непрерывный на $\mathfrak{M}$ нелинейный оператор $N : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ называется c-непрерывным, если:

1) $\sup_{\|x\|_{\mathfrak{M}} \leqslant r} \| Nx \|_{\mathfrak{M}} < \infty \quad \forall r > 0$;

2) для каждых $r > 0$, $\varepsilon > 0$, $P \in \mathfrak{S}$ найдутся $\delta > 0$ и $Q \in \mathfrak{S}$ такие, что $\|(Nx_1)(g) - (Nx_2)(g)\|_E < \varepsilon \; \forall g \in P$, если $\| x_i \|_{\mathfrak{M}} \leqslant r$, $i = \overline{1, 2}$, и $\| x_1(g) - x_2(g) \|_E < \delta \; \forall g \in Q$.

Рассмотрим уравнение $Ay + Ny = f$, где A — c-непрерывный элемент пространства $[\mathfrak{M}, \mathfrak{M}]$, $N : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ — c-непрерывный оператор, для которого $l = \overline{\lim\limits_{r \to +\infty}} \sup\limits_{\|x\|_{\mathfrak{M}} \leqslant r} \| Nx \|_{\mathfrak{M}} (\| x \|_{\mathfrak{M}} + 1)^{-1} < \infty$, и $f \in \mathfrak{M}$.

Теорема 2. *Пусть*: 1) $R(A)$ *замкнуто*; 2) Ker A *обладает замкнутым дополнительным подпространством*; 3) $R(N) \subset R(A)$; 4) l — *достаточно малое число. Тогда* $R(A + N) = R(A)$.

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1.

Замечание 2. Необходимые и достаточные условия выполнения первого условия теорем 1 и 2 можно найти, например, в [7].

1. *Слюсарчук В. Е.* Об ограниченных решениях нелинейных почти периодических дискретных систем // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1979.— № 7.— С. 520 — 522.
2. *Слюсарчук В. Е.* Ограниченные решения нелинейных эллиптических уравнений // Успехи мат. наук.— 1980.— **35**, № 1.— С. 215—216.
3. *Слюсарчук В. Е.* Нелокальные теоремы об ограниченных решениях функционально-дифференциальных уравнений с нелипшицевыми нелинейностями // Исследование дифференциальных, разностных и дифференциально-разностных уравнений.— Киев : Наук. думка, 1980.— С. 121—130.
4. *Слюсарчук В. Е.* Ограниченные решения импульсных систем // Диф. уравнения.— 1983.— **19**, № 4.— С. 588—596.
5. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа.— М. : Наука, 1968.— 496 с.
6. *Ниренберг Л.* Лекции по нелинейному функциональному анализу.— М. : Мир, 1977.— 232 с.
7. *Крейн С. Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве.— М. : Наука, 1971.— 104 с.

Укр. ин-т инженеров вод. хоз-ва, Ровно Получено 18.06.85

УДК 517.9

В. П. Шпакович, В. И. Мунтян

Метод усреднения для дифференциальных уравнений с максимумами

В настоящей работе исследуется вопрос применимости асимптотического метода усреднения Крылова — Боголюбова — Митропольского [1, 2] для исследования систем дифференциальных уравнений с максимумами. Развитие теории функционально-дифференциальных уравнений с максимумами связано с их применением в различных задачах автоматического управления [3, 4].

В работах [5, 6] показано, что обобщение и распространение первой основной теоремы Н. Н. Боголюбова на более широкий класс уравнений существенно связано с классическими теоремами анализа о непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от параметра. Указанный подход используется нами для обоснования применения метода усреднения на конечном временном интервале к исследованию дифференциальных уравнений с максимумами.

Рассмотрим систему функционально-дифференциальных уравнений

$$dx/dt = X(t, x(t), \max\{x(s) : s \in [t-h, t]\}, \lambda), \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$
$$x(t, \lambda) = \varphi(t, \lambda), \ -h \leqslant t \leqslant 0, \tag{1}$$

где $x \in D \subset R^n$, $\lambda \in \Lambda$, D — ограниченная область, а Λ — множество значений параметра λ, для которого λ_0 — предельная точка.

Будем говорить, что функция $X(t, x, y, \lambda)$ интегрально непрерывна по параметру λ в точке λ_0, если при всех $t \in [0, T]$

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \int_0^t X(\tau, x, y, \lambda)\, d\tau = \int_0^t X(\tau, x, y, \lambda_0)\, d\tau. \tag{2}$$