3. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной.— М. : Наука, 1974.— 480 с.
4. *Friedman A.* Optimal control in Banach spaces // J. Math. Anal. and Appl.— 1967.— 19, N 1.— P. 35—55.

Киев. политехн. ин-т

Получено 02.07.85,
после доработки — 30.01.86

УДК 517.956

В. А. Маловичко

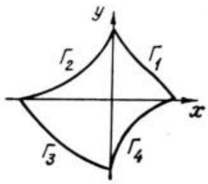
О краевых задачах для одного класса систем дифференциальных уравнений четвертого порядка

В настоящей работе изучается разрешимость краевых задач для системы дифференциальных уравнений

$$Lu(x, y) \equiv MMu(x, y) + C(x, y)\mathbf{u} = \mathbf{f}(x, y), \tag{1}$$

где $M\mathbf{u}(x, y) \equiv [A(x, y)\mathbf{u}_x]_x + [B(x, y)\mathbf{u}_y]_y$; $x,\ y \in R^1$; $\mathbf{u}$, $\mathbf{f}$ — N-мерные векторы; C — симметричная положительно определенная в R^2 матрица размерности $N \times N$;

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix};$$



A_1, B_1 — симметричные матрицы размерности $m \times m$; A_2, B_2 — симметричные матрицы размерности $(N - m) \times (N - m)$; $0 \leqslant m \leqslant N$, причем для любого вектора $\mathbf{z} \in R^N$, $\mathbf{z} \neq 0$, выполняются соотношения

$$\begin{aligned} &xA(x, y)\mathbf{zz} > 0, \quad x \neq 0, \quad A(0, y) = 0, \\ &yB(x, y)\mathbf{zz} > 0, \quad y \neq 0, \quad B(x, 0) = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Систему (1) будем рассматривать в односвязной области Ω, содержащей точку (0, 0) и ограниченную кусочно гладкими кривыми Γ_1, Γ_3 и гладкими кривыми Γ_2, Γ_4 (рисунок).

Обозначим через Ω_k, $k = 1, 2, 3, 4$, часть Ω, лежащую в k-й четверти плоскости xOy. В области $\Omega_1 \cup \Omega_3$ оператор M является эллиптическим, а в области $\Omega_2 \cup \Omega_4$ — гиперболическим. Отметим, что уравнения типа (1), но с другими операторами M и в других областях, изучались в работах [1 — 3].

Пусть $(l_1(x, y),\ l_2(x, y))$ — вектор единичной внешней нормали к границе Γ области Ω в точке $(x, y) \in \Gamma$. Будем считать, что кривые Γ_2, Γ_4 являются характеристиками оператора M, т. е.

$$A(x, y)\, l_1^2(x, y) + B(x, y)\, l_2^2(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Gamma_2 \cup \Gamma_4. \tag{3}$$

Относительно гладкости коэффициентов системы (1) предполагаем, что A, $B \in C^3(\overline{\Omega})$, $C \in C(\overline{\Omega})$.

Задача 1. В области Ω найти решение $\mathbf{u} = \mathbf{u}^{(1)} + \mathbf{u}^{(2)}$ системы (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$\mathbf{u}|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_3} = \mathbf{u}_l|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_3} = 0, \tag{4}$$

$$\mathbf{u}^{(1)}|_{\Gamma_2 \cup \Gamma_4} = M\mathbf{u}^{(2)}|_{\Gamma_2 \cup \Gamma_4} = 0, \tag{5}$$

где $\mathbf{u}^{(1)} = (u_1, \ldots, u_m, 0, \ldots, 0)$, $\mathbf{u}^{(2)} = (0, \ldots, 0, u_{m+1}, \ldots, u_N)$, $\mathbf{u}_l = A\mathbf{u}_x l_1 + B\mathbf{u}_y l_2$

Введем обозначения: W — множество вектор-функций из $C^4(\overline{\Omega})$, удовлетворяющих краевым условиям (4), (5); H_+ — гильбертово пространство, полученное замыканием множества W по норме $\| \mathbf{u} \|_{+}^{2} = \int\limits_{\Omega} [(M\mathbf{u})(M\mathbf{u}) + \mathbf{u}\mathbf{u}] \times$ $\times\, d\Omega$; $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ — скалярное произведение в $L_2(\Omega)$; H_- — гильбертово пространство с негативной нормой $\|\cdot\|_-$, построенное по $L_2(\Omega)$ и H_+.

Лемма 1. *Задача* 1 *является самосопряженной.*

Доказательство. Интегрируя по частям выражение $(L\mathbf{u})\,\mathbf{v}$, где $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$, приходим к тождеству

$$\int\limits_{\Omega} (L\mathbf{u})\,\mathbf{v}\,d\Omega = \int\limits_{\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\Gamma_3\cup\Gamma_4} [A(M\mathbf{u})_x l_1 + B(M\mathbf{u})_y l_2]\,\mathbf{v}\,d\Gamma -$$

$$- \int\limits_{\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\Gamma_3\cup\Gamma_4} M\mathbf{u}\cdot(A\mathbf{v}_x l_1 + B\mathbf{v}_y l_2)\,d\Gamma + \int\limits_{\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\Gamma_3\cup\Gamma_4} (A\mathbf{u}_x l_1 + B\mathbf{u}_y l_2)\,M\mathbf{v}\,d\Gamma -$$

$$- \int\limits_{\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\Gamma_3\cup\Gamma_4} \mathbf{u}\,[A(M\mathbf{v})_x l_1 + B(M\mathbf{v})_y l_2]\,d\Gamma + \int\limits_{\Omega} \mathbf{u}\,(L\mathbf{v})\,d\Omega. \tag{6}$$

Из условий (4) следует, что все интегралы по $\Gamma_1 \cup \Gamma_3$ в (6) равны нулю.

Так как оператор $l_2\partial/\partial x - l_1\partial/\partial y$ является внутренним дифференциальным оператором на $\Gamma_2 \cup \Gamma_4$, то из условия $M\mathbf{u}^{(2)}|_{\Gamma_2\cup\Gamma_4} = 0$ следует, что на $\Gamma_2 \cup \Gamma_4$

$$l_2(M\mathbf{u}^{(2)})_x - l_1(M\mathbf{u}^{(2)})_y = 0. \tag{7}$$

Умножая (7) на $B_2 l_2$ и учитывая (3), получаем на $\Gamma_2 \cup \Gamma_4$ равенство

$$A_2(M\mathbf{u}^{(2)})_x l_1 + B_2(M\mathbf{u}^{(2)})_y l_2 = 0. \tag{8}$$

Учитывая (8) и условие $\mathbf{v}^{(1)}|_{\Gamma_2} = 0$, замечаем, что на $\Gamma_2 \cup \Gamma_4$

$$[A(M\mathbf{u})_x l_1 + B(M\mathbf{u})_y\ _2]\,\mathbf{v} = 0. \tag{9}$$

Из равенства (9) следует, что первый интеграл по $\Gamma_2 \cup \Gamma_4$ в (6) равен нулю. Аналогично можно доказать, что и остальные интегралы по $\Gamma_2 \cup \Gamma_4$ в (6) равны нулю. Лемма доказана.

Лемма 2. *Для вектор-функций* $\mathbf{u} \in W$ *справедливы энергетические неравенства*

$$\gamma_1 \| \mathbf{u} \|_+ \geqslant \| L\mathbf{u} \|_- \geqslant \gamma_2 \| \mathbf{u} \|_+, \tag{10}$$

где γ_1, γ_2 — *некоторые положительные постоянные, не зависящие от* $\mathbf{u}$.

Доказательство. Интегрируя по частям выражение $(L\mathbf{u})\,\mathbf{u}$, $\mathbf{u} \in W$, имеем

$$\int\limits_{\Omega} (L\mathbf{u})\,\mathbf{u}\,d\Omega = \int\limits_{\Gamma} [A(M\mathbf{u})_x l_1 + B(M\mathbf{u})_y l_2]\,\mathbf{u}\,d\Gamma -$$

$$- \int\limits_{\Gamma} M\mathbf{u}\cdot(A\mathbf{u}_x l_1 + B\mathbf{u}_y l_2)\,d\Gamma + \int\limits_{\Omega} [(M\mathbf{u})(M\mathbf{u}) + C\mathbf{u}\mathbf{u}]\,d\Omega. \tag{11}$$

Как и при доказательстве леммы 1, можно показать, что интегралы по Γ в (11) равны нулю. Тогда

$$\int\limits_{\Omega} (L\mathbf{u})\,\mathbf{u}\,d\Omega = \int\limits_{\Omega} [(M\mathbf{u})(M\mathbf{u}) + C\mathbf{u}\mathbf{u}]\,d\Omega. \tag{12}$$

Применяя к левой части равенства (12) неравенство Шварца и учитывая, что матрица C положительно определена, получаем правое неравенство (10).

Левое неравенство (10) доказывается так:

$$\| L\mathbf{u} \|_- = \sup_{\mathbf{v}\in H_+} \frac{(L\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\| \mathbf{v} \|_+} = \sup_{\mathbf{v}\in W} \frac{(L\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\| \mathbf{v} \|_+} =$$

$$= \sup_{\mathbf{v}\in W} \frac{1}{\| \mathbf{v} \|_+}\cdot\int\limits_{\Omega} [(M\mathbf{u})(M\mathbf{v}) + C\mathbf{u}\mathbf{v}]\,d\Omega \leqslant \gamma_1 \| \mathbf{u} \|_+.$$

Определение. *Пусть* $\mathbf{f} \in L_2(\Omega)$. *Вектор-функцию* $\mathbf{u} \in H_+$ *назовем сильным решением задачи* 1, *если существует последовательность вектор-функций* $\mathbf{u}_k \in W$ *такая, что* $\lim_{k\to\infty} \| \mathbf{u}_k - \mathbf{u} \|_+ = \lim_{k\to\infty} \| L\mathbf{u}_k - \mathbf{f} \|_- = 0$.

Согласно [4], из неравенств (10) следует такая теорема.

Теорема. *Для любой вектор-функции* $\mathbf{f} \in L_2(\Omega)$ *сильное решение задачи* 1 *существует и единственно.*

Замечание 1. Аналогичные результаты можно получить для других краевых задач для системы (1). Краевые условия надо задавать так, чтобы выполнялись условия (4) и $(M\mathbf{u})\,\mathbf{u}|_{\Gamma_2\cup\Gamma_4} = 0$. В качестве примера сформулируем две задачи.

Задача 2. В области Ω найти решение системы (1), удовлетворяющее краевым условиям (4) и $\mathbf{u}|_{\Gamma_2} = \mathbf{u}^{(2)}|_{\Gamma_4} = M\mathbf{u}^{(1)}|_{\Gamma_4} = 0$.

Задача 3. В области Ω найти решение системы (1), удовлетворяющее краевым условиям (4) и $M\mathbf{u}|_{\Gamma_2} = \mathbf{u}|_{\Gamma_4} = 0$.

Замечание 2. Все сформулированные выше результаты справедливы, если условия (2) заменить условиями

$$yA(x, y)\,\mathbf{zz} > 0, \quad y \neq 0, \quad A(x, 0) = 0,$$

$$xB(x, y)\,\mathbf{zz} > 0, \quad x \neq 0, \quad B(0, y) = 0.$$

1. *Самедов Н. И.* О разрешимости одной краевой задачи в пространстве для квазилинейной системы уравнений смешанного типа 4-го порядка // Докл. АН СССР.— 1976.— **230**, № 4.— С. 785—788.
2. *Маловичко В. А.* О первой краевой задаче для одного дифференциального уравнения 4-го порядка // Сиб. мат. журн.— 1983.— **24**, № 1.— С. 125—129.
3. *Маловичко В. А.* Задача типа Гурса для системы дифференциальных уравнений четвертого порядка // Приближенные методы исследования нелинейных колебаний.— Киев : Ин-т математики, 1983.— С. 120—124.
4. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов.— Киев : Наук. думка, 1965.— 798 с.

Киев. технол. ин-т пищ. пром-сти

Получено 03.04.85,
после доработки — 17.09.85

УДК 62-50:517.928

А. В. Плотников

Усреднение уравнений управляемого движения с многозначными траекториями

В последние годы в теории управления возник интерес к исследованию задач управления пучком [1, 2] и ансамблем [3] траекторий. Как известно, однозначные управляемые траектории удобно описывать с помощью дифференциальных включений. В качестве математического аппарата для описания управляемых многозначных траекторий в работах [4, 5] использованы дифференциальные уравнения и дифференциальные включения с производной Хукухары, а также обычные дифференциальные включения, содержащие в правой части вектор управления

$$\dot{x} \in F(t, x, u), \quad x(t_0) = x^0, \tag{1}$$

где $F: I \times R^n \times U \to \mathrm{Comp}(R^n)$, $U(t) \in \mathrm{Comp}(R^n)$, $I = [t_0, t_1]$, $u: I \to U$ — вектор управления, $x^0 \in S_0 \subset R^n$, $\mathrm{Comp}(R^n)$ $(\mathrm{Conv}(R^n))$ — пространство, состоящее из всех непустых компактных (выпуклых) подмножеств R^n.

Включения вида (1) встречаются, например, при исследовании объектов управления в условиях неопределенности

$$\dot{x} = f(t, x, u, v), \quad x(t_0) = x^0, \tag{2}$$