$a = a^*$, получаем оценку

$$0 \leqslant F(\underbrace{a * a * \ldots * a}_{4k})^2 \leqslant$$

$$\leqslant C^2 \left(\sum_{n_1=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{R - \frac{1}{\tau}}{R - \frac{1}{\tau_0}} \right)^{|n_1|} \| a \|^2_{l_2\left(\left(R - \frac{1}{\tau}\right)^{|n|}\right)} \right)^{4k-1} \| a \|^2_{l_2\left(\left(R - \frac{1}{\tau}\right)^{|n|}\right)},$$

из которой следует, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} F(\underbrace{a * a * \ldots * a}_{4k})^{-1/4k}$ расходится. Применяя к F доказанную теорему, получаем интегральное представление $F(f) = \int_{\operatorname{supp}\sigma} f(x)\, d\sigma(x)$ для любого $f \in A_{C_R}$, где σ — конечная мера на σ-алгебре борелевских множеств на $\mathbb{R}^1$, такая, что для некоторого $\tau = \left[\frac{1}{R-1}\right] + 1, \left[\frac{1}{R-1}\right] + 2, \ldots$ $\operatorname{supp}\sigma \subset \left(-\left(R - \frac{1}{\tau}\right), -\left(R - \frac{1}{\tau}\right)^{-1}\right) \cup \left(\left(R - \frac{1}{\tau}\right)^{-1}, R - \frac{1}{\tau}\right)$.

1. *Lassner G.* Topological algebras of operators // Rept. Math. Phys.— 1972.— **3, № 4.**— P. 279—293.
2. *Lassner G., Uhlmann A.* Faithful representations of algebras of test functions.— Preprint JINR E2-3583, 1967.
3. *Borchers H. J., Yngvason J.* On the algebra of fields operators. The weak commutant and integral decomposition of states // Communs Math. Phys.— 1975.— **42**, N 3.— P. 231—252.
4. *Borchers H. J., Yngvason J.* Integral representations for Schwinger functionals and the moment problem over nuclear spaces // Ibid.— **43**, N 3.— P. 255—271.
5. *Hegerfeldt G. C.* Extremal decomposition of Wightman functions and of states on nuclear *-algebras by Choquet theory // Ibid.— **45**, N 2.— P. 133—135.
6. *Березанский Ю. М.* Самосопряженные операторы в пространствах функций бесконечного числа переменных.— Киев : Наук. думка, 1978.— 360 с.
7. *Березанский Ю. М.* Проекционная спектральная теорема // Успехи мат. наук.— 1984.— **39**, № 4.— С. 3—52.
8. *Powers R. T.* Self — adjoint algebras of unbaunded operators // Communs Math. Phys.— 1971.— **21**, N 2.— P. 85—124.
9. *Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я.* Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства.— М. : Физматгиз, 1961.— 472 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев
Лейпцигский ун-т, ГДР

Получено 06.08.86

УДК 517.95

А. Н. Витюк, С. С. Клименко

Теорема Н. Н. Боголюбова для гиперболических дифференциальных включений

Вопросы усреднения дифференциальных включений рассматривал В. А. Плотников [1]. В настоящей работе доказана теорема Н. Н. Боголюбова для гиперболического дифференциального включения с условиями Дарбу.

Пусть R^n — n-мерное евклидово пространство с нормой $\|\cdot\|$ и нулевым элементом Θ. Обозначим через Ω ($\operatorname{conv}\Omega$) совокупность всех непустых компактных (выпуклых и компактных) подмножеств R^n с метрикой Хаусдорфа $\alpha(\cdot, \cdot)$. Пусть $\rho(a, A)$ — расстояние от точки $a \in R^n$ до множества $A \in \Omega$.

Рассмотрим дифференциальное включение (д. в.)

$$u_{xy} \in \varepsilon^2 F(x, y, u), \tag{1}$$

$$u(0, y) = u(x, 0) = \Theta, \quad 0 \leqslant x, y < \infty, \tag{2}$$

где u — n-мерная вектор-функция, $F: D \to \operatorname{conv} \Omega$, $D = \{x \geqslant 0, \ y \geqslant 0, \ u \in Q \subset R^n\}$. Пусть

$$\overline{F}(u) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T F(x, y, u)\, dxdy. \tag{3}$$

Под решением д. в. (1) понимаем абсолютно непрерывную функцию $u(x, y)$, которая почти всюду (п. в.) удовлетворяет (1).

Докажем некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть многозначное отображение (м. о.) $\Phi: S \times Q \to \Omega$, $S = [0, a] \times [0, a]$, непрерывно и удовлетворяет условию Липшица с постоянной λ по переменной u и абсолютно непрерывная функция ω, $\omega(x, 0) = \omega(0, y) = \Theta$ такая, что п. в. на S $\rho(\omega_{xy}, \Phi(x, y, \omega)) \leqslant \mu(x, y)$ и $\operatorname{vraimax}_S \mu(x, y) \leqslant \mu_0$.*

Тогда существует такое решение дифференциального включения $u_{xy} \in \Phi(x, y, u)$ с условиями $u(x, 0) = u(0, y) = \Theta$, что $\| u - \omega \| \leqslant \frac{\mu_0}{\lambda} \times \exp(\lambda xy)$, $(x, y) \in S$.

Доказательство. Строим последовательность

$$u^{(m+1)}(x, y) = \int_0^x \int_0^y v^{(m)}(r, t)\, drdt, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

где $v^{(m)}(x, y) \in \Phi(x, y, u^{(m)})$, $\| v^{(m)} - u^{(m)}_{xy} \| = \rho(u^{(m)}_{xy}, \Phi(x, y, u^{(m)}))$ п. в. на S, а $u^{(0)} = \omega$. Легко показать, что $\lim_{m \to \infty} u^{(m)}(x, y) = u(x, y)$, $u \in AC(S)$, $u_{xy} \in \Phi(x, y, u)$ п. в. на S и $\| u - \omega \| \leqslant \frac{\mu_0}{\lambda} \exp(\lambda xy)$.

Рассмотрим сеточную область $S_h = \{(x_i, y_j): x_i = ih, \ y_j = jh, \ i, j = \overline{0, n}, \ x_n = y_n = a\}$.

Лемма 2. *Пусть сеточные функции $v: S_h \to R^n$, $w: S_h \to R_+$ удовлетворяют соотношениям*

$$\| v_{i+1,j+1} - v_{i+1,j} - v_{i,j+1} + v_{ij} \| \leqslant h^2 (A \| v_{ij} \| + B), \tag{4}$$

$$w_{i+1,j+1} \geqslant w_{i+1,j} + w_{i,j+1} - w_{ij} + h^2 (A w_{ij} + B), \tag{5}$$

$v_{i0} = v_{0j} = \Theta$, $w_{i0} = w_{0j} = 0$, $i, j = \overline{0, n}$, *причем* $A \geqslant 0$, $B \geqslant 0$.

Тогда

$$\| v_{ij} \| \leqslant w_{ij}, \quad i, j = \overline{0, n}, \tag{6}$$

и соотношению (6) *удовлетворяют* $w_{ij} = z(x_i, y_j)$, *где* $z(x, y)$ — *решение задачи*

$$z_{xy} = Az + B, \quad z(x, 0) = z(0, y) = 0. \tag{7}$$

Доказательство. Используя индукцию, соотношения (4) и (5), легко доказать (6). Для доказательства второй части утверждения следует учесть, что решение задачи (7) имеет неотрицательные производные любого порядка для $(x, y) \in S$. Затем подставить $z(x, y)$ в (5) и разложить $z_{i+1,j+1}$, $z_{i,j+1}$, $z_{i+1,j}$ (здесь $z_{ij} = z(x_i, y_j)$) в ряд Тейлора в окрестности точки (x_i, y_j).

Рассмотрим следующую задачу:

$$z_{xy} \in \varepsilon^2 \overline{F}(z), \quad z(x, 0) = z(0, y) = \Theta. \tag{8}$$

Теорема. *Пусть выполняются условия:*

1) *м. о. F непрерывно и равномерно ограничено* ($|F| = \alpha(F, \Theta) \leqslant M$);

2) $\alpha(F(x, y, u), F(x, y, v)) \leqslant \lambda \| u - v \|$, $u, v \in Q$;

3) *равномерно относительно* $u \in Q$ *существует предел* (3);

4) *решения задачи* (8) *лежат в области* Q *вместе с некоторой* β-*окрестностью.*

Тогда для всякого $\eta > 0$, $L > 0$ *существует такое* $\varepsilon_0(\eta, L)$, *что при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ *в области* $G = [0, L/\varepsilon] \times [0, L/\varepsilon]$ *для каждого решения задачи* (8) *существует решение* $u(x, y)$ *задачи* (1), (2) *такое, что*

$$\| u(x, y) - z(x, y) \| \leqslant \eta \tag{9}$$

и наоборот.

Доказательство. Заметим, что м. о. $\overline{F}(u)$ является равномерно ограниченным и удовлетворяет условию Липшица с той же постоянной λ.

Пусть $z(x, y) = \varepsilon^2 \int\limits_0^x \int\limits_0^y v(r, t)\, dr dt$, $v \in \overline{F}(z(x, y))$ — произвольное решение задачи (8). Обозначим $h = L/(n\varepsilon)$, $x_i = ih$, $y_j = jh$, $G_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$. Построим функцию $\gamma(x, y)$, полагая для $(x, y) \in G_{ij}$

$$\gamma(x, y) = \gamma(x_i, y) + \gamma(x, y_j) - \gamma_{ij} + \varepsilon^2 (x - x_i)(y - y_j) s_{ij},$$

где $s_{ij} \in \overline{F}(t_{ij}^{(\gamma)})$, $\left\| s_{ij} h^2 - \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \int\limits_{y_j}^{y_{j+1}} v dx dy \right\| = \rho \left(\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \int\limits_{y_j}^{y_{j+1}} v dx dy, h^2 \overline{F}(t_{ij}^{(\gamma)}) \right)$, $t_{ij}^{(\gamma)} = \gamma_{i,j+1} + \gamma_{i+1,j} - \gamma_{ij}$.

Пусть $\delta_{ij} = z_{ij} - \gamma_{ij}$. Тогда, исходя из соотношений

$$z_{i+1,j+1} - z_{i+1,j} - z_{i,j+1} + z_{ij} = \varepsilon^2 \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \int\limits_{y_j}^{y_{j+1}} v dx dy, \quad \gamma_{i+1,j+1} - \gamma_{i+1,j} -$$

$$- \gamma_{i,j+1} + \gamma_{ij} = \varepsilon^2 (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j) s_{ij},$$

получаем

$$\| \delta_{i+1,j+1} - \delta_{i+1,j} - \delta_{i,j+1} + \delta_{ij} \| \leqslant \varepsilon^2 \left\| \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \int\limits_{y_j}^{y_{j+1}} v dx dy - h^2 s_{ij} \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon^2 \alpha \left(\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \int\limits_{y_j}^{y_{j+1}} \overline{F}(z)\, dx dy, \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \int\limits_{y_j}^{y_{j+1}} \overline{F}(t_{ij}^{(\gamma)})\, dx dy \right) \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon^2 \lambda \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \int\limits_{y_j}^{y_{j+1}} \| z(x, y) - t_{ij}^{(\gamma)} \| dx dy. \tag{10}$$

Для $(x, y) \in G_{ij}$ имеем

$$\| z(x, y) - t_{ij}^{(\gamma)} \| = \| z(x_i, y) + z(x, y_j) - z_{ij} + \varepsilon^2 \int\limits_{x_i}^{x} \int\limits_{y_j}^{y} v dr dt -$$

$$- t_{ij}^{(\gamma)} \pm t_{ij}^{(z)} \| \leqslant \varepsilon^2 Ma (| y - y_{j+1} | + | x - x_{i+1} |) +$$

$$+ \varepsilon^2 M (x - x_i)(y - y_j) + \| t_{ij}^{(z)} - t_{ij}^{(\gamma)} \|. \tag{11}$$

Так как

$$\| t_{ij}^{(z)} - t_{ij}^{(\gamma)} \| \leqslant \| \delta_{ij} \| + 4\varepsilon M L h. \tag{12}$$

то, подставляя (11), (12) в (10), получаем

$$\| \delta_{i+1,j+1} - \delta_{i+1,j} - \delta_{i,j+1} + \delta_{ij} \| \leqslant \varepsilon^2 \lambda h^2 \| \delta_{ij} \| + \varepsilon^2 \lambda h^2 (5M\varepsilon L h + \varepsilon^2 M h^2/4). \tag{13}$$

Учитывая, что в силу леммы 2 для $A = \varepsilon^2\lambda$ $B = \varepsilon^2\lambda(5M\varepsilon Lh + \varepsilon^2Mh^2/4)$ и для решения задачи (7) справедлива оценка $z(x, y) \leqslant B/A\exp(Axy)$, находим $\|\delta_{ij}\| \leqslant z(L/\varepsilon, L/\varepsilon) \leqslant r(L, n)$, $r(L, n) = (5ML^2/n + ML^2/(4n^2))\exp(\lambda L^2)$. Тогда $\|t_{ij}^{(z)} - t_{ij}^{(\gamma)}\| \leqslant 3r(L, n)$. Значит, для $(x, y) \in G_{ij}$ имеем

$$\|z(x, y) - \gamma(x, y)\| \leqslant \|z(x_i, y) + z(x, y_j) - z_{ij} +$$
$$+ \varepsilon^2 \int_{x_i}^{x}\int_{y_j}^{y} vdxdy - \gamma(x_i, y) - \gamma(x, y_j) + \gamma_{ij} - \varepsilon^2 \int_{x_i}^{x}\int_{y_j}^{y} s_{ij}dxdy \pm$$
$$\pm t_{ij}^{(z)} \pm t_{ij}^{(\gamma)}\| \leqslant 4ML^2/n + 2ML^2/n^2 + 3r(L, n). \tag{14}$$

В силу (3) для всякого $\eta_1 > 0$ и фиксированного n существует $\varepsilon_1(\eta_1, n)$ такое, что для $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$

$$\alpha\left(\frac{1}{h^2}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_{y_j}^{y_{j+1}} F(x, y, t_{ij}^{(\gamma)})\,dxdy, \overline{F}(t_{ij}^{(\gamma)})\right) \leqslant \eta_1.$$

Следовательно, существует такой селектор $w(x, y) \in F(x, y, t_{ij}^{(\gamma)})$, что

$$\left\|\frac{1}{h^2}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_{y_j}^{y_{j+1}} w(x, y)\,dxdy - s_{ij}\right\| \leqslant \eta_1. \tag{15}$$

Пусть для $(x, y) \in G_{ij}$, $i, j = \overline{1, n-1}$, $q(x, y) = q(x_i, y) + q(x, y_j) - q_{ij} + \varepsilon^2 \int_{x_i}^{x}\int_{y_j}^{y} wdxdy$ и $q(x, 0) = q(0, y) = \Theta$, $0 \leqslant x$, $y \leqslant L/\varepsilon$. Если $\beta_{ij} = q_{ij} - \gamma_{ij}$, то в силу (15) $\|\beta_{i+1,j+1} - \beta_{i+1,j} - \beta_{i,j+1} + \beta_{ij}\| = \varepsilon^2\left\|\int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_{y_j}^{y_{j+1}} wdxdy - h^2s_{ij}\right\| \leqslant \varepsilon^2h^2\eta_1$. Отсюда и из леммы 2 (при $A = 0$, $B = \varepsilon^2\eta_1$) получаем

$$\|\beta_{ij}\| \leqslant \eta_1L^2. \tag{16}$$

Рассуждая аналогично, как и при выводе оценки (14), для $(x, y) \in G_{ij}$ имеем $\|q(x, y) - \gamma(x, y)\| \leqslant 4ML^2/n + 2ML^2/n^2 + L^2\eta_1$, $\rho(q_{xy}(x, y), \varepsilon^2F(x, y, q(x, y))) \leqslant \varepsilon^2\alpha(F(x, y, t_{ij}^{(\gamma)}), F(x, y, q(x, y))) \leqslant \varepsilon^2\lambda\|q(x, y) - t_{ij}^{(\gamma)}\| \leqslant \varepsilon^2\lambda[\|q(x, y) - t_{ij}^{(q)}\| + \|t_{ij}^{(q)} - t_{ij}^{(\gamma)}\|] \leqslant \mu_0$, $\mu_0 = \varepsilon^2\lambda[\varepsilon^2Mh^2 + 2ML\varepsilon h + 3\eta_1L^2]$. Здесь учтено, что в силу (16) $\|t_{ij}^{(q)} - t_{ij}^{(\gamma)}\| \leqslant 3\beta_{ij}$. В силу леммы 1 существует такое решение $u(x, y)$ задачи (1), (2), что $\|u(x, y) - q(x, y)\| \leqslant \mu_0\exp(\lambda L^2)$.

Итак, для $(x, y) \in G$ $\|z(x, y) - \gamma(x, y)\| = O(1/n)$, $\|q(x, y) - \gamma(x, y)\| = O(1/n)$, $\|u(x, y) - q(x, y)\| = O(1/n + \eta_1)$. Поэтому можно указать такие n_0, $\eta_0(\eta)$, что $\|u(x, y) - z(x, y)\| \leqslant \eta$ при $n > n_0$, $\eta_1 < \eta_0$.

Аналогично доказываем, что для любого решения $u(x, y)$ задачи (1), (2) существует такое решение (8), что выполняется соотношение (9).

Замечание 1. Известно [2], что если $F(x, y, u): D \to \Omega$, то множество решений д. в. $u_{xy} \in F(x, y, u)$ всюду плотно во множестве решений д. в. $u_{xy} \in \operatorname{conv} F(x, y, u)$. Кроме того, для интеграла (Аумана или Римана) от многозначного отображения $\iint_G \Phi(x, y)\,dxdy = \iint_G \operatorname{conv}\Phi(x, y)\,dxdy$. Поэтому доказанная теорема верна и для м. о. $F: D \to \Omega$.

Замечание 2. Теорема Н. Н. Боголюбова для задачи

$$u_{xy} = \varepsilon^2 f(x, y, u), \quad u(x, 0) = u(0, y) = \Theta \tag{17}$$

доказана в работе [3] на основании теоремы о непрерывной зависимости решения задачи $u_{xy} = f(x, y, u, p_1, p_2)$, $u(x, 0) = u(0, y) = 0$ от параметров p_1, p_2.

1. *Плотников В. А.* Асимптотические методы в задачах оптимального управления: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук.— Л., 1980.— 31 с.
2. *Витюк А. Н.* О существовании решений задачи Гурса для гиперболических дифференциальных включений в частных производных.— Одесса, 1982.— 34 с.— Деп. в ВИНИТИ, № 5982-82.
3. *Киселевич М.* Теорема типа Н. Н. Боголюбова для гиперболических уравнений // Укр. мат. журн.— 1970.— **22**, № 3.— С. 374—379.

Одес. ун-т Получено 02.07.85

УДК 530.1

Н. В. Жернаков

Интегрирование цепочек Тоды в классе операторов Гильберта — Шмидта

Хорошо известны построения решений бесконечной в обе стороны цепочки Тоды

$$\dot{a}_n(t) = 2^{-1}a_n(t)(b_{n+1}(t) - b_n(t)), \quad \dot{b}_n(t) = a_n^2(t) - a_{n-1}^2(t), \tag{1}$$
$$a_n(t) > 0, \quad b_n(t) \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \cdot = d/dt, \quad t \in [0, \infty),$$

в периодическом случае и при наличии рассеяния, т. е. когда $a_n(t) \to 2^{-1}$, $b_n(t) \to 0$ при $|n| \to \infty$ [1—3]. В данной статье (1) интегрируется в классе последовательностей $a(t) = (a_n(t))_{n\in\mathbb{Z}}$, $b(t) = (b_n(t))_{n\in\mathbb{Z}}$, таких, что при каждом $t \in [0, \infty)$ $a(t) \in l_2$, $b(t) \in l_2$.

Оказывается, что изучение такой цепочки можно свести к решению задачи интерполяции мероморфной функции, которое, в свою очередь, эквивалентно решению линейной алгебраической системы бесконечного числа уравнений с бесконечным числом неизвестных. Предлагаемый подход связан с методом обратной спектральной задачи, применявшимся в [4], с введением вспомогательного спектра и методикой изучения его эволюции, использовавшимися при решении периодической цепочки Тоды [2]. Полученные результаты обобщаются на случай, когда $a_n(t) \to 0$, $b_n(t) \to 0$ при $|n| \to \infty$.

1. Вспомогательный спектр разностного оператора. Рассмотрим разностный оператор Гильберта — Шмидта

$$(L\varphi)(n) = a_{n-1}\varphi(n-1) + b_n\varphi(n) + a_n\varphi(n+1), \quad (a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l_2,$$
$$(b_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l_2, \quad (\varphi(n))_{n\in\mathbb{Z}} \in l_2, \quad a_n > 0, \quad b_n \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

Пусть последовательность $0 = \lambda_0 < \ldots < \lambda_n < \ldots < \lambda_1$ — его спектр (ниже, за исключением п. 2, для удобства изложения дополнительно предполагается неотрицательность L). Рассмотрим матрицу Вейля $M(z) = (M_{\alpha,\beta}(z))_{\alpha,\beta=-1,0}$ оператора L (сведения по спектральной теории разностных операторов см. в [7], гл. VII, § 3). Будем называть интервалы $[\lambda_{k+1}, \lambda_k]$ лакунами, а корни уравнения $M_{0,0}(z) = 0$ — вспомогательным спектром. Если занумеровать эти нули функции в порядке убывания $\mu_1 > \mu_2 > \ldots$ $\ldots > \mu_n > \ldots > 0$, то они будут расположены по одному в лакунах $[\lambda_1, \lambda_2]$, $[\lambda_2, \lambda_3], \ldots, [\lambda_{n+1}, \lambda_n], \ldots$, причем с краем лакуны могут совпадать лишь два нуля одновременно, т. е. $((\mu_k = \lambda_k) \Leftrightarrow (\mu_{k+1} = \lambda_k)$, $k = 1, 2, \ldots)$. Для элементов матрицы Вейля в области $\mathbb{C}^1 \setminus \{\lambda_k : k = 0, 1, 2, \ldots\}$ справедливо тождество [6]

$$-a_{-1}(M_{0,0}(z)M_{-1,-1}(z) - M_{0,-1}^2(z)) = M_{0,-1}(z). \tag{3}$$

Подставив в последнее μ_k, нетрудно убедиться, что $2a_{-1}M_{0,-1}(\mu_k) - 1 = \delta_k$, где $\varepsilon_k = \pm 1$. Таким образом, с каждым оператором L ассоциируется набор спектральных данных $((\lambda_k)_{k=0}^\infty, (\mu_k)_{k=1}^\infty, (\varepsilon_k)_{k=1}^\infty)$: $(\lambda_k)_{k=0}^\infty$ — спектр оператора, $(\mu_k)_{k=1}^\infty$ — вспомогательный спектр и $(\varepsilon_k)_{k=1}^\infty$ — набор, состоящий