УДК 519.4

Ю. М. Березанский, Г. Ласснер, В. С. Яковлев

О разложении положительных функционалов на коммутативных ядерных $*$-алгебрах

$*$-Алгебрам неограниченных операторов и представлениям с их помощью топологических $*$-алгебр посвящено большое количество работ (см., например, [1, 2]). Одним из важных применений таких представлений является получение разложений состояний топологических $*$-алгебр на чистые состояния. Для ядерных $*$-алгебр такие разложения получены в работах [3 — 5]. Существование чистых состояний коммутативных ядерных $*$-алгебр, не являющихся мультипликативными функционалами, указано в [3]. Известно, что для $*$-алгебр многочленов от конечного числа переменных определенные условия роста положительных функционалов на мономах относительно степеней переменных, входящих в моном, дают достаточное условия для разложимости положительных функционалов на мультипликативные. В данной работе для случая произвольной коммутативной ядерной $*$-алгебры U с единицей такой, что умножение в U совместно непрерывно, либо U является бочечным пространством, предлагается подобное условие роста положительного функционала на степенях элементов $*$-алгебры и с этим условием с помощью техники, развитой в [6, 7], доказано существование разложения на мультипликативные функционалы. С помощью этого результата получено интегральное представление непрерывного положительного функционала на $*$-алгебре аналитических функций в круговом кольце.

Пусть имеется ядерное локально-выпуклое сепарабельное пространство $U = \operatorname{pr}\lim\limits_{\tau\in T} H_\tau$, $U = \bigcap\limits_{\tau\in T} H_\tau$, где T—некоторое множество индексов τ [6, с. 27].

Пусть, кроме того, в U введены операции умножения и инволюции, превращающие U в коммутативную топологическую $*$-алгебру с единицей e. Пусть умножение в U совместно непрерывно, либо пространство U является бочечным. Линейный непрерывный функционал F положителен, если для любого $f \in U$ выполнено неравенство $F(f^*f) \geqslant 0$. Линейный функционал m на U будем называть симметрическим, если $m(f^*) = \overline{m(f)}$, $f \in U$.

Теорема. *Если функционал F таков, что для любого $f \in U$ такого, что $f = f^*$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} F(f^{4n})^{-1/4n}$ расходится, то существует индекс $\tau \in T$, зависящий от F, и конечная мера σ, заданная на некоторой σ-алгебре подмножеств множества M_τ мультипликативных линейных симметрических функционалов m, непрерывных относительно топологии на U, индуцированной топологией пространства H_τ, такая, что $F(f) = \int\limits_{M_\tau} m(f)d\sigma(m)$ для любого $f \in U$.*

Доказательство. Рассмотрим в U множество $N = \{f \in U : F(f^*f) = 0\}$. Множество N является замкнутым идеалом в U, инвариантным относительно инволюции. Рассмотрим фактор-алгебру $D(\pi) = U/N$, состоящую из классов эквивалентности $[g] = \{f \in U : g - f \in N\}$ $*$-алгебры U по модулю N. Определим на $D(\pi)$ скалярное произведение $([f], [g]) = F(g^*f)$. Пусть гильбертово пространство H есть пополнение $D(\pi)$ по скалярному произведению $(\cdot, \cdot)$. Определим на $D(\pi)$ операторы $\pi(f)$, $f \in U$, следующим образом. Положим $\pi(f)\xi = \pi(f)[g] = [fg]$, где $\xi = [g]$. Соответствие $U \ni f \mapsto \pi(f)$ является $*$-представлением $*$-алгебры

U [8]. Поскольку $\pi(e)[g] = [eg] = [g] \neq 0$ для всех $[g] \neq 0$, то отображение $U \ni f \mapsto \pi(f)$ является точным $*$-представлением $*$-алгебры U. При сделанных предположениях относительно U $*$-представление π является сильно непрерывным, т. е. для любого $\xi \in D(\pi)$ отображение $U \ni f \mapsto \pi(f)\xi \in H$ непрерывно [3, с. 246]. Покажем, что существует гильбертово пространство H_+ и такая локально-выпуклая топология на $D(\pi)$, что H_+ плотно и квазиядерно вложено в H, $D(\pi) \subseteq H_+$ плотно и топологично и топологически сопряженное к $D(\pi)$ пространство сепарабельно относительно слабой топологии. Пусть $\xi_0 = [e]$. Поскольку отображение $U \ni f \mapsto \pi(f)\xi_0 \in H$ непрерывно, то, по определению топологии в U, найдутся такие $\tau \in T$ и $\delta > 0$, что для любого $f \in U$, такого, что $\|f\|_{H_\tau} < \delta$, имеет место $\|\pi(f)\xi_0\| < 1$. Так как отображение $U \ni f \mapsto \pi(f)\xi_0 \in H$ линейно, то отсюда следует, что оно непрерывно относительно топологии, индуцированной из $H_\tau \supseteq U$. Так как пространство U ядерно, то найдется такой индекс $\tau' \in T$, что $H_{\tau'} \subseteq H_\tau$ квазиядерно. Понятно, что отображение $H_{\tau'} \supseteq U \ni f \mapsto \pi(f)\zeta_0 \in H$ также непрерывно. Пусть $i: H_{\tau'} \to H$ обозначает продолжение по непрерывности этого отображения. Обозначим $H_+ = iH_{\tau'}$. Определим скалярное произведение $(i\varphi, i\psi)_{H_+} = (P_{H_{\tau'} \ominus \mathrm{Ker}\, i}\varphi, P_{H_{\tau'} \ominus \mathrm{Ker}\, i}\psi)_{H_{\tau'}}$, где $P_{H_{\tau'} \ominus \mathrm{Ker}\, i}$ обозначает ортопроектор в $H_{\tau'}$ на подпространство $H_{\tau'} \ominus \mathrm{Ker}\, i$. Топологизируем $D(\pi)$ фактор-топологией топологии на U. Тогда нетрудно проверить, что H_+ и $D(\pi)$ удовлетворяют сформулированным условиям. Покажем, что для произвольных $f, g \in U$, $f = f^*$, $g = g^*$, эрмитовые операторы $\pi(f)$ и $\pi(g)$ существенно самосопряжены на области $D(\pi)$ и их замыкания коммутируют в смысле разложений единицы. Действительно, условие $\sum_{n=1}^{\infty} F(f^{4n})^{-1/4n} = +\infty$ для любого $f \in U$, $f = f^*$, эквивалентно условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} F(f^{2n}h^*h)^{-1/2n} = +\infty \tag{1}$$

для любых $f, h \in U$, $f = f^*$, но тогда для любого $[h] \in D(\pi)$ имеем $[h] \in \bigcap_{n=1}^{\infty} D(\pi(f)^n)$ и $\|\pi(f)^n[h]\|_H^2 = F(f^{2n}h^*h)$ и из расходимости соответствующего ряда получаем, что $[h]$ является квазианалитическим вектором оператора $\pi(f)$, и так как $D(\pi)$ плотно в H, то $\pi(f)$ является существенно самосопряженным на $D(\pi)$. Кроме того, для любого невещественного $z \in \mathbb{C}^1$ в силу существенной самосопряженности $\pi(g)$ на $D(\pi)$ множество $(\pi(g) - z \cdot 1_H) D(\pi)$ плотно в H. Справедливо включение $(\pi(g) - z \cdot 1_H) D(\pi) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} D((\pi(f)\restriction_{(\pi(g)-z\cdot 1_H)D(\pi)})^n)$. Поэтому в силу условия (1) для $[h] \in (\pi(g) - z \cdot 1_H) D(\pi)$ получаем, что $(\pi(g) - z \cdot 1_H) D(\pi)$ есть плотное множество квазианалитических векторов оператора $\pi(f)\restriction_{(\pi(g)-z\cdot 1_H D)(\pi)}$ и согласно теореме [6, с. 273] операторы $\overline{\pi(f)}$ и $\overline{\pi(g)}$ коммутируют в смысле разложений единицы.

Рассмотрим семейство операторов $\{\tilde{\pi}(f)\}_{f \in U}$, где $\tilde{\pi}(f) = \overline{\pi\left(\frac{f+f^*}{2}\right)} + i\overline{\pi\left(\frac{f-f^*}{2i}\right)}$. В силу существенной самосопряженности и коммутируемости в смысле разложений единицы операторов, соответствующих эрмитовым элементам U, операторы $\tilde{\pi}(f)$ являются нормальными операторами, коммутирующими в смысле разложений единицы. Оснащение $D(\pi) \subseteq H_+ \subseteq H$ удовлетворяет условиям теоремы [5, теорема 3.2] для семейства операторов $\{\tilde{\pi}(f)\}_{f \in U}$. Следовательно, справедливо представление $(\pi(f)\zeta, \eta)_H =$

$= \int\limits_M m(f)(P(m)\xi, \eta)_H d\rho(m)$ для $\xi, \eta \in D(\pi)$, $f \in U$, где ρ — конечная мера, определенная на σ-алгебре $C_\sigma(M) = C_\sigma(\mathbb{C}^U) \cap M$; $M \in B(\mathbb{C}^U)$ — множество полной внешней меры, построенной по совместному разложению единицы E семейства операторов $\{\pi\widetilde{(f)}\}_{f\in U}$, $P(m): H_+ \to H_-$ — положительные операторы, такие, что $\| P(m) \| \leqslant \sum\limits_{i=1}^{\infty} (P(m)e_i, e_i)_H = 1$, где $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис в H_+, а $\| \ \|$ обозначает норму Гильберта—Шмидта, такое, что выполнены равенства

$$(P(m)\xi, \pi\widetilde{(f)}^*\eta)_H = m(f)(P(m)\xi, \eta)_H, \quad (P(m)\xi, \pi\widetilde{(f)}\eta)_H = \overline{m(f)}\,(P(m)\xi, \eta)_H \tag{2}$$

для любых $\xi \in H_+$, $\eta \in D(\pi)$, $f \in U$. Из этих равенств, используя тот факт, что π есть $*$-представление $*$-алгебры U, получаем, что M состоит из мультипликативных линейных симметрических функционалов m на $*$-алгебре U. Нулевой функционал исключается из M аналогично [6, с. 221]. Подставляя вместо ξ и η вектор $\xi_0 = [e] \in D(\pi)$, получаем

$$F(f) = F(e^*fe) = (\pi(f)\xi_0, \xi_0)_H = \int\limits_M m(f)(P(m)\xi_0, \xi_0)_H d\rho(m).$$

Рассмотрим множество $M_+ = \{m \in M: (P(m)\xi_0, \xi_0)_H > 0\}$, принадлежащее $C_\sigma(M) = C_\sigma(\mathbb{C}^U) \cap M$ в силу измеримости функции $M \ni m \mapsto (P(m)\xi_0, \xi_0)_H \in \mathbb{R}^1$. В силу равенств (2) для $m \in M_+$ имеем $\overline{m(f)} = (P(m)\xi_0, \pi\widetilde{(f)}\xi_0)_H \times (P(m)\xi_0, \xi_0)_H^{-1}$ и поскольку отображение $U \ni f \mapsto \pi(f)\xi_0 \in D(\pi)$, а следовательно, и $U \ni f \mapsto \pi(f)\xi_0 \in H_+$ непрерывно, то существует индекс $\tau \in T$ такой, что $H_\tau \supseteq U \ni f \mapsto \pi(f)\xi_0 \in H_+$ непрерывно относительно топологии H_τ и, следовательно, $H_\tau \supseteq U \ni f \mapsto \overline{m(f)} \in \mathbb{C}^1$ непрерывно относительно топологии H_τ. Таким образом, $M_+ \subseteq M_\tau$. Определяя меру $\sigma(\Delta \cap M_\tau) = \int\limits_{\Delta\cap M_+} (P(m)\xi_0, \xi_0)_H \times d\rho(m)$, $\Delta \in C_\sigma(\mathbb{C}^U)$, получаем представление $F(f) = \int\limits_{M_\tau} m(f)\, d\sigma(m)$. Теорема доказана.

Пусть A_{C_R} обозначает $*$-алгебру функций, аналитических в круговом кольце $C_R = \{z \in \mathbb{C}^1: R^{-1} < |z| < R, R > 1\}$ с топологией равномерной сходимости на компактах, лежащих внутри C_R, с поточечным умножением и инволюцией $f^*(z) = \overline{f(\bar{z})}$. A_{C_R} изоморфна $*$-алгебре $U = \operatorname{pr}\lim\limits_{\tau=1,2,\ldots} l_2\left(\left(R - \frac{1}{\tau}\right)^{|n|}\right)$ со сверткой в качестве умножения и инволюцией $(a_n)^*_{n\in\mathbb{Z}} = (\bar{a}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ при переходе от аналитических функций из A_{C_R} к последовательностям $a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in U$ коэффициентов их рядов Лорана. Ядерность U следует из [9, с. 111]. Совместная непрерывность умножения в U следует из неравенства

$$\| a*b \|^2_{l_2\left(\left(R-\frac{1}{\tau}\right)^{|n|}\right)} \leqslant \sum_{n_1=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{R-\frac{1}{\tau}}{R-\frac{1}{\tau_0}}\right)^{|n_1|} \| b \|^2_{l_2\left(\left(R-\frac{1}{\tau_0}\right)^{|n|}\right)} \| a \|^2_{l_2\left(\left(R-\frac{1}{\tau}\right)^{|n|}\right)} \tag{3}$$

для любых $\tau_0 > \tau$, $a, b \in U$. Для непрерывного F на U найдутся такие индекс τ и константа $C > 0$, что для любого $a \in U$ имеем $|F(a)| \leqslant C \| a \|_{l_2\left(\left(R-\frac{1}{\tau}\right)^{|n|}\right)}$ и, следовательно, из неравенства (3) для любого $a \in U$,

$a = a^*$, получаем оценку

$$0 \leqslant F(\underbrace{a * a * \ldots * a}_{4k})^2 \leqslant$$

$$\leqslant C^2 \left(\sum_{n_1=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{R - \frac{1}{\tau}}{R - \frac{1}{\tau_0}} \right)^{|n_1|} \| a \|^2_{l_2\left(\left(R-\frac{1}{\tau}\right)^{|n|}\right)} \right)^{4k-1} \| a \|^2_{l_2\left(\left(R-\frac{1}{\tau}\right)^{|n|}\right)},$$

из которой следует, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} F(\underbrace{a * a * \ldots * a}_{4k})^{-1/4k}$ расходится. Применяя к F доказанную теорему, получаем интегральное представление $F(f) = \int_{\mathrm{supp}\,\sigma} f(x)\, d\sigma(x)$ для любого $f \in A_{C_R}$, где σ — конечная мера на σ-алгебре борелевских множеств на $\mathbb{R}^1$, такая, что для некоторого $\tau = \left[\frac{1}{R-1}\right] + 1, \left[\frac{1}{R-1}\right] + 2, \ldots$ $\mathrm{supp}\,\sigma \subset \left(-\left(R - \frac{1}{\tau}\right), -\left(R - \frac{1}{\tau}\right)^{-1}\right) \cup \left(\left(R - \frac{1}{\tau}\right)^{-1}, R - \frac{1}{\tau}\right)$.

1. *Lassner G.* Topological algebras of operators // Rept. Math. Phys.— 1972.— **3**, **№ 4**.— P. 279—293.
2. *Lassner G., Uhlmann A.* Faithful representations of algebras of test functions.— Preprint JINR E2-3583, 1967.
3. *Borchers H. J., Yngvason J.* On the algebra of fields operators. The weak commutant and integral decomposition of states // Communs Math. Phys.— 1975.— **42**, N 3.— P. 231—252.
4. *Borchers H. J., Yngvason J.* Integral representations for Schwinger functionals and the moment problem over nuclear spaces // Ibid.— **43**, N 3.— P. 255—271.
5. *Hegerfeldt G. C.* Extremal decomposition of Wightman functions and of states on nuclear *-algebras by Choquet theory // Ibid.— **45**, N 2.— P. 133—135.
6. *Березанский Ю. М.* Самосопряженные операторы в пространствах функций бесконечного числа переменных.— Киев : Наук. думка, 1978.— 360 с.
7. *Березанский Ю. М.* Проекционная спектральная теорема // Успехи мат. наук.— 1984.— **39**, № 4.— С. 3—52.
8. *Powers R. T.* Self — adjoint algebras of unbaunded operators // Communs Math. Phys.— 1971.— **21**, N 2.— P. 85—124.
9. *Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я.* Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства.— М. : Физматгиз, 1961.— 472 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев
Лейпцигский ун-т, ГДР

Получено 06.08.86

УДК 517.95

А. Н. Витюк, С. С. Клименко

Теорема Н. Н. Боголюбова для гиперболических дифференциальных включений

Вопросы усреднения дифференциальных включений рассматривал В. А. Плотников [1]. В настоящей работе доказана теорема Н. Н. Боголюбова для гиперболического дифференциального включения с условиями Дарбу.

Пусть R^n — n-мерное евклидово пространство с нормой $\|\cdot\|$ и нулевым элементом Θ. Обозначим через Ω ($\mathrm{conv}\,\Omega$) совокупность всех непустых компактных (выпуклых и компактных) подмножеств R^n с метрикой Хаусдорфа $\alpha(\cdot, \cdot)$. Пусть $\rho(a, A)$ — расстояние от точки $a \in R^n$ до множества $A \in \Omega$.